УДК 336.781.5

Студ. А.М. Альшевская, Н.А. Борисов
Науч. рук. доц. Чайковский М. В.[1],
ст. преп. Архипенко О. А.[2]
(кафедра высшей математики БГТУ[1];
кафедра програмной инженерии БГТУ[2])

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим задачу Коши для линейного интегро-дифференциального уравнения первого порядка

$$\begin{cases} x'(\tau) = q \cdot x(\tau) + \int\limits_0^\tau K(\tau - t)x(t)dt + F(\tau), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

где $x(\tau)$ – искомая функция, $x'(\tau)$ – ее производная, q – константа, $F(\tau)$ есть заданная функция, $K(\tau - s)$ – известное ядро интегрального оператора. Предполагается существование и единственность решения данной задачи Коши, а также наличие необходимой гладкости функций, входящих в уравнение, обеспечивающей возможность проводимых в дальнейшем преобразований.

Чаще всего интегро-дифференциальные уравнения сводят к дифференциальным и в последствии их решают. Другой путь решения интегро-дифференциальных уравнений – это сведение их к интегральным. Методы точного решения интегральных уравнений подробно проанализированы, например, в работе [1]. В случае, если часть или все функции, входящие в исходную задачу Коши, заданы таблично, то приходится применять численные методы решения.

В предлагаемой работе строится и исследуется алгоритм численного решения задачи Коши на основании сведения ее к интегральному уравнению Вольтерра второго рода и последующему его приближенному решению. Проинтегрируем левую и правую часть уравнения по промежутку $[0, \tau]$ целиком лежащему на отрезке $\left[0, T\right]$:

$$\int\limits_0^\tau x'(t)dt = q\int\limits_0^\tau x(t)dt + \int\limits_0^\tau dt\int\limits_0^t K(t-s)x(s)ds + \int\limits_0^\tau F(t)dt .$$

Сделав замену порядка интегрирования в полученном двойном интеграле, придем к следующему интегральное уравнение для нахождения $x(\tau)$

$$x(\tau) = \int\limits_0^\tau R(\tau - t)x(t)dt + \Phi(\tau),$$

где $\Phi(\tau)=\int_0^{\tau}F(t)dt+x_0$, а ядро полученного интегрального уравнения Вольтерра имеет вид $R(\tau-t)=q+\int_t^{\tau}K(\tau-s)ds$. Решение задачи в равноотстоящих точках $\tau_j=jh$ $(h=const)$ отрезка $[0,T]$: $0=\tau_0<\tau_1<\ldots<\tau_j<\tau_{j+1}<\ldots<\tau_N=T$ получаем с помощью алгоритма последовательного повышения порядка точности, идея которого изложена в работе [2]. Правые части интегрального уравнения и значения ядер интегрального оператора находятся соответственно по формулам:

$$\Phi(jh)=x_0+h\left[\frac{1}{2}F(jh)+F((j-1)h)+F((j-2)h)+...+F(h)+\frac{1}{2}F(0)\right],$$

$$R(jh)=q+h[\frac{1}{2}K(jh)+K((j-1)h)+...+K(2h)+K(h)+\frac{1}{2}K(0)].$$

Для получения приближений решения применен следующий алгоритм:

$$x^{(0)}(jh)=h[\frac{1}{2}R(jh)x(0)+R((j-1)h)x(h)+...+$$
$$+\frac{1}{2}R(h)x((j-1)h)]+hR(h)x((j-1)h)+\Phi(jh),$$
$$x^{(1)}(jh)=h[\frac{1}{2}R(jh)x(0)+R((j-1)h)x(h)+...+$$
$$+R(h)x((j-1)h)+\frac{1}{2}R(0)x^{(0)}(jh)]+\Phi(jh),$$
$$x^{(2)}(jh)=h[\frac{1}{2}R(jh)x(0)+R((j-1)h)x(h)+...+$$
$$+R(h)x((j-1)h)+\frac{1}{2}R(0)x^{(1)}(jh)]+\Phi(jh).$$

Полагаем для дальнейших вычислений значение $x(jh)$ равным $x^{(2)}(jh)$ и переходим к вычислениям на следующем шаге $j+1$. Алгоритм имеет второй порядка точности относительно шага h.

ЛИТЕРАТУРА

1. Полянин, А. Д. Справочник по интегральным уравнениям. Точные решения. / А. Д. Полянин, А. В. Манжиров. – М. : Факториал, 1998. – 482 с.

2. Янович, Л. А. Об одном численном методе четвертого порядка для решения системы линейных интегро-дифференциальных уравнений вольтерровского типа / Л. А. Янович // Докл. АН БССР. – 1984. – Том 28. – № 4. – С. 293-296.