УДК 519.62/.63

Студ. Д.С. Матусков
Науч. рук. зав. кафедрой О.Н. Пыжкова
(кафедра высшей математики, БГТУ)

ПРОСТЕЙШИЕ МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Для решения математических задач используются аналитические и численные методы. При использовании аналитических методов решение задачи можно представить в виде формул. Для решения сложных задач чаще используются численные методы, которые позволяют свести решение задачи к выполнению конечного числа арифметических действий над числами. Численные методы позволяют получить решение задачи при конкретных начальных значениях. Основы численных методов вообще и для дифференциальных уравнений в частности были заложены Л. Эйлером.

Цель работы: изучить простейшие методы численного решения дифференциальных уравнений и самостоятельно получить несколько численных решений.

Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка можно записать в явном виде $y' = f(x, y)$. Такое уравнение в общем случае имеет бесконечно много решений, и для того, чтобы выбрать из них одно конкретное, ставят дополнительное условие, обычно в виде $y(x_0) = y_0$. Если функция $f(x, y)$ непрерывна по x и непрерывно дифференцируема по y, то задача Коши имеет единственное решение, непрерывно зависящее от начальных данных x_0 и y_0.

Одними из простых методов решения являются метод Эйлера и метод касательных. Метод Эйлера – это одношаговый метод первого порядка для приближенного решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Он основан на идее, что следующее значение функции можно найти, используя текущее значение и наклон (производную) в этой точке. Рассмотрим решение задачи Коши на промежутке [a; b]. Обозначим: $\dfrac{b-a}{n} = h$ – шаг разбиения, $x_i = a + ih$ – узловые точки, $x_0 = a, x_n = b \quad i = 0,1,2,...,n \quad , y\left(x_i\right) = y_i$. Уравнение $y' = f(x, y)$ в точке x_i и y_i имеет вид $y_i' = f(x_i, y_i)$, после аппроксимации $y_{i+1} - y_i = f(x_i, y_i) \cdot h$ получаем формулу метода Эйлера: $y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i) \cdot h$. Метод Эйлера прост в реализации, но может быть неточным для жестких ОДУ или при больших шагах h. В. Э. Милном описывается не менее простая, но более точная формула

$y_{i+1} = y_{i-1} + 2f(x_i, y_i) \cdot h$. Разница в точности численных решений видна на графике (рис 1).

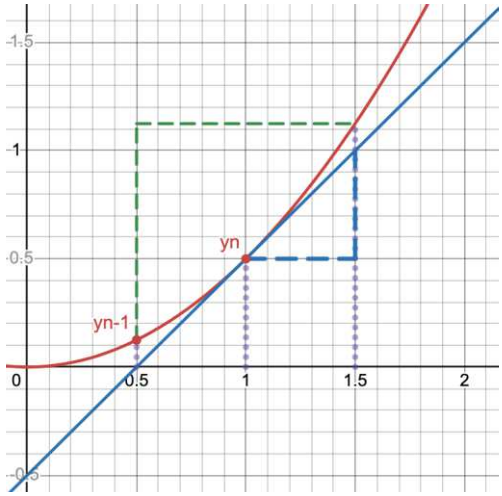

Рисунок 1 – Визуализация формул Милна и Эйлера

С помощью этой формулы численные решения уравнения $y' = y^2 + xy - x^2$ удовлетворяющие начальному условию $y(x_0) = y_0$ в соответствии со следующим алгоритмом:

1) находим значение $y'\left(x_0, y_0\right) = y_0'$;

2) продифференцируем уравнение $y'' = 2yy' + y + xy' - 2x$ и найдем y_0'';

3) найдем y_1 с помощью первых трёх членов формулы Тейлора $y_{n+1} = y_n + y_n'\Delta x + \frac{1}{2}y_n''\left(\Delta x\right)^2$;

4) найдем y_2 по формуле $y_{n+1} = y_{n-1} + 2f(x_n, y_n) \cdot \Delta x$, и т.д.

В таблице представлено численное решение для одного из начальных условий:

x_0	-1	-0.95	-0.9	-0.85	-0.8	-0.75
y_0'	0	0.048	0.09	0.128	0.126	0.19
y_0	1	0.9	0.802	0.706	0.614	0.526

Метод Милна – это метод численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений, который относится к классу многошаговых методов. Он основан на предположении, что будущие значения функции можно вычислить, используя прошлые значения и производные, что делает его более эффективным по сравнению с одношаговыми методами, такими как метод Эйлера.

Этот метод может быть полезен, когда доступны данные о предыдущих точках и когда функция изменяется достаточно плавно.