УДК 519.854.6 Студ. А.И. Милькевич
Науч. рук. зав. кафедрой О.Н. Пыжкова
(кафедра высшей математики, БГТУ)

ЧЕТВЁРТОЕ ИЗМЕРЕНИЕ

Четвёртое измерение, или четырёхмерное («4D») пространство – в математике абстрактное понятие, производимое путём обобщения правил трёхмерного пространства и понимаемое, как множество векторов с четырьмя вещественными координатами (x, y, z, t). В частности, неравенство $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \le R^2$ можно тогда рассматривать как условие того, что точка лежит внутри четырехмерного шара радиуса R с центром в начале координат. Четырёхмерное пространство можно так же представить в виде бесконечного числа трёхмерных пространств, расположенных вдоль четвёртой пространственной координаты. Довольно часто за четвёртую координату принимают время, что делает представление четвёртого измерения относительно простым. Но, при представлении её в виде ещё одной пространственной координаты, всё становится намного сложней.

Так же, как и с объектами двумерного и трёхмерного пространства, мы можем производить математические операции и над объектами высших размерностей. Рассмотрим сначала элементы одномерного куба, то есть отрезка прямой линии. Отрезок состоит из двух вершин и, конечно, самого себя. Теперь, переместив отрезок в перпендикулярном направлении и получив квадрат, мы имеем две начальные вершины и две конечные, следовательно, число вершин при перемещении удвоилось. Таким образом, квадрат имеет 4 вершины, куб – 8, а гиперкуб – 16. Таким же образом вывести значения и для других элементов кубов.

Рассчитаем гиперобъёма гиперсферы. Для этого делаем следующую замену переменных $x = r\cos\varphi_1$, $y = r\sin\varphi_1\cos\varphi_2$, $z = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3$, $t = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\sin\varphi_3$. Вычислим Якобиан перехода:

$$J = \begin{vmatrix} \cos\varphi_1 & -r\sin\varphi_1 & 0 & 0 \\ \sin\varphi_1\cos\varphi_2 & r\cos\varphi_1\cos\varphi_2 & -r\sin\varphi_1\sin\varphi_2 & 0 \\ \sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3 & r\cos\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3 & r\sin\varphi_1\cos\varphi_2\cos\varphi_3 & -r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\sin\varphi_3 \\ \sin\varphi_1\sin\varphi_2\sin\varphi_3 & r\cos\varphi_1\sin\varphi_2\sin\varphi_3 & r\sin\varphi_1\cos\varphi_2\sin\varphi_3 & r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3 \end{vmatrix} =$$

$$= r^3\sin^2\varphi_1\sin\varphi_2.$$

$$W = \iiint\limits_D\int dxdydzdt = \iiint\limits_\Omega\int |J| dr d\varphi_1 d\varphi_2 d\varphi_3 = \int\iiint\limits_\Omega r^3\sin^2\varphi_1 |\sin\varphi_2| dr d\varphi_1 d\varphi_2 d\varphi_3 =$$

$$= \int_0^\pi d\varphi_3 \int_0^\pi \sin\varphi_2 d\varphi_2 \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi_1 d\varphi_1 \int_0^R dr = \frac{\pi^2 R^4}{2}.$$