Учреждение образования
"БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ"

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Учебно-методическое пособие по дисциплине "Высшая математика" для студентов-заочников второго курса экономических специальностей

Минск 2004

УДК 519.2
ББК 22.171
Т 33

Рассмотрено и рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом университета

Составители:
доцент И.К. Асмыкович, доцент В.В. Игнатенко,
доцент В.И. Янович

Рецензенты:
кандидат физ.-мат. наук, доцент Белгосуниверситета В.И. Лобач;
кандидат техн. наук, заведующий кафедрой автоматизации производственных процессов и электротехники БГТУ
И.Ф. Кузьмицкий

Т 33 **Теория вероятностей, математическая статистика и математическое программирование**: Учеб.-метод. пособие по дисциплине "Высшая математика" для студентов-заочников второго курса экономических специальностей / Сост. И.К. Асмыкович и др. — Мн.: БГТУ, 2004

ISBN 985-434-277-8

Приведены программа, основные теоретические сведения и типовые задачи с решениями по теории вероятностей, математической статистике и линейному программированию. Даны варианты контрольных работ и рекомендации по их выполнению студентами-заочниками второго курса экономических специальностей.

УДК 519.2
ББК 22.171

ISBN 985-434-277-8

ВВЕДЕНИЕ

Подготовка высококвалифицированных экономистов, работников коммерческих служб, маркетинга, менеджмента и аудита, способных обеспечить все этапы планирования, производства и продвижения продукции от производителя к потребителю, невозможна без серьезного изучения классических и современных математических методов. В экономических процессах обычно участвует масса людей, на них воздействует огромное количество разнообразных факторов как природного, так и техногенного характера, поэтому корректно описать их в рамках детерминированных моделей невозможно. Элемент случайности постоянно присутствует в рыночных отношениях. Для специалистов в области экономики очень важным является умение использовать в своей деятельности современные методы математической статистики. Для этого в первую очередь необходимо хорошее знакомство с основами теории вероятностей и статистическими методами обработки результатов выборочных наблюдений над случайными величинами.

Большое число задач планового характера, задач оптимального производства продукции и экономических задач связано с распределением каких-либо, как правило, ограниченных ресурсов. Обычно распределить ресурсы, получить продукцию можно различными способами, по-разному выбирая технологию, сырье, применяемое оборудование, организацию производственного процесса. При этом каждый способ распределения ресурсов, оцениваемый с позиции некоторого критерия (прибыль, объем выпускаемой продукции, удовлетворение запросов потребителей и т. п.), характеризуется определенным значением показателя этого критерия, который обычно называют целевой функцией. Естественно стремление найти такой вариант распределения (программу, план), который гарантировал бы наибольший экономический эффект. Такую программу (план) называют оптимальной. Математические методы получения данных программ и составляют предмет математического программирования. Название предмета — "Математическое программирование" связано с тем, что целью решения задач является выбор оптимальной в том или ином смысле программы действий.

Точнее, математическое программирование (МП) – это область математики, в которой разрабатывают теорию и численные методы решения экстремальных задач от многих переменных с ограничениями на область изменения этих переменных. Чтобы использовать методы МП для нахождения оптимального плана, экономическую проблему необходимо записать с помощью математических выражений (уравнений, неравенств и т. п.), т. е. составить ее математическую модель. Математическая модель – это система математических выражений, описывающих характеристики объекта моделирования и взаимосвязи между ними. В состав модели входят соотношения, отражающие специфические условия, которым должно удовлетворять решение (план) данной задачи (так называемая система ограничений), а также функция (целевая), в математической форме выражающая поставленную цель с точки зрения выбранного критерия оптимальности. Если неизвестные входят в модель только в первой степени, то задача является задачей линейного программирования, в противном случае имеем задачу нелинейного программирования. Задачи, процесс решения которых имеет многоэтапный характер, называются задачами динамического программирования. Если необходимо выработать оптимальное поведение в условиях конфликтной ситуации, то эта задача теории игр. Если в задаче участвуют случайные величины, или случайные функции, то это задача стохастического программирования.

В данном пособии даны краткие теоретические сведения, образцы решения задач и контрольные работы по трем разделам высшей математики, а именно теории вероятностей, элементам математической статистики и линейному программированию.

Данное пособие позволит студентам заочной формы обучения изучить основы теоретического материала по перечисленным выше разделам, самостоятельно выполнить контрольные работы и успешно сдать экзамен. Основные определения и теоремы изложены достаточно подробно, рассмотрены методы решения задач, но ограниченный объем пособия не позволил привести доказательства результатов.

В приложениях даны таблицы наиболее часто используемых в математической статистике функций, что позволит студентам решать соответствующие задачи, не обращаясь к дополнительной литературе. Для более глубокого изучения соответствующих разделов в пособии приведен список учебной литературы.

ПРОГРАММА ПО ДИСЦИПЛИНЕ
"ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА"
спец. ЭиУП, МК, МД, БУ

1. Случайный эксперимент и случайное событие. Примеры.
2. Классическое определение вероятности.
3. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Формула полной вероятности.
4. Формула Бернулли. Интегральная теорема Муавра –Лапласа.
5. Дискретные случайные величины. Ряд и закон распределения.
6. Непрерывные случайные величины. Плотность вероятности.
7. Числовые характеристики случайных величин.
8. Законы распределения дискретных случайных величин.
9. Законы распределения непрерывных случайных величин.
10. Нормальный закон распределения.
11. Генеральная совокупность. Выборка.
12. Статистический ряд. Интервальный ряд.
13. Полигон и гистограмма.
14. Эмпирическая функция распределения выборки.
15. Точечные оценки и их свойства.
16. Выборочная средняя и ее свойства.
17. Выборочная дисперсия и исправленное среднее квадратическое отклонение.
18. Интервальные оценки и их свойства. Доверительный интервал.
19. Доверительный интервал для неизвестного математического ожидания нормально распределенной случайной величины при известной и неизвестной дисперсии.
20. Уравнение линейной регрессии.
21. Понятие о критериях согласия. Критерий согласия Пирсона.
22. Постановка задач математического программирования.
23. Необходимые условия экстремума для функции одной и нескольких переменных.
24. Условный экстремум. Функция Лагранжа.
25. Линейное программирование (ЛП). Модели и задачи ЛП.
26. Графический метод решения задач ЛП
27. Основная идея симплекс-метода. Базисные планы.
28. Критерий оптимальности. Итерация симплекс-метода.
29. Транспортная задача. Открытая и замкнутая модель. Построение первоначального базисного плана.
30. Метод потенциалов.

1. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Предметом теории вероятностей является изучение вероятностных закономерностей массовых однородных случайных явлений.

Первоначальными понятиями в теории вероятностей являются случайный эксперимент, события и вероятность.

1.1. Случайные события и соотношения между ними

Результат опыта или наблюдения в теории вероятностей называется ***событием***. События обозначаются латинскими буквами $A, B, C, \ldots$.

Событие, которое в результате данного опыта может появиться, но может и не появиться, называется ***случайным***. Например, выпадение герба при однократном подбрасывании монеты, число очков при подбрасывании игральной кости, количество дождливых дней в мае для данной местности и т. п.

Для некоторых опытов можно указать конечное множество взаимно исключающих друг друга равновозможных элементарных исходов, причем в результате одного опыта должен осуществиться какой-нибудь один из них. Такая совокупность называется ***пространством элементарных событий*** Ω, связанных с данным опытом, а входящие в нее события — ***элементарными событиями*** ω.

Под ***равновозможными*** понимают такие события, которые имеют одинаковые условия для появления и для которых нет оснований утверждать, что какое-либо из них в результате опыта имеет больше шансов появиться, чем другое.

Любое подмножество элементарных событий образует некоторое случайное событие A. Говорят, что событие A произошло, если в результате опыта имело место одно из элементарных событий, образующих событие A.

Заметим, что и каждое элементарное событие является случайным.

Все пространство Ω также является событием, которое обязательно осуществляется в результате опыта. Такое событие называется ***достоверным***. Например, выпадение не менее одного очка

при бросании шестигранной игральной кости. Достоверное событие будем обозначать через Ω.

Каждому событию A соответствует ***противоположное*** событие $\overline{A}$, появление которого равносильно непоявлению A.

Событие, противоположное достоверному событию Ω, называется ***невозможным***. Очевидно, невозможное событие никогда не может появиться в результате опыта. Например, выпадение более шести очков при бросании игральной кости. Невозможное событие будем обозначать через $\varnothing$.

Для возможности выполнения действия с событиями введем основные определения.

Два события называются ***равносильными (эквивалентными)***, если они состоят из одних и тех же элементарных событий. Эквивалентность событий обозначается знаком равенства:

$$A = B.$$

Событие B называется ***следствием*** события $A: A \subset B$, если из появления A следует появление B. Очевидно, если $A \subset B$ и $B \subset A$, то $A = B$, если $A \subset B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$.

Суммой, или ***объединением***, двух событий A и B называется такое событие C, которое состоит в осуществлении события A или события B, или событий A и B вместе. Условно записывают так:

$$C = A + B, \text{ или } C = A \cup B.$$

Сумма событий $A + B$ состоит из всех элементарных событий, принадлежащих хотя бы одному из них.

Произведением, или ***пересечением***, двух событий A и B называется событие C, которое состоит в осуществлении события A и события B одновременно. Условно записывают так:

$$C = AB, \text{ или } C = A \cap B.$$

Произведение событий AB состоит из элементарных событий, одновременно входящих в событие A и событие B.

События A и B называются ***совместными***, если они могут появиться одновременно в одном и том же испытании. Это значит, что существуют такие элементарные события, которые входят в состав и A, и B одновременно, другими словами, произведение событий AB не пустое множество.

События A и B называются ***несовместными***, если появление одного из них исключает появление другого, т. е. если $AB = \varnothing$. Иными словами, нет ни одного элементарного события, которое входило бы в состав и A, и B одновременно. В частности, противоположные события A и $\overline{A}$ всегда несовместны.

События $A_1, A_2, ..., A_n$ называются ***попарно несовместными***, если любые два из них несовместны.

События $A_1, A_2, ..., A_n$ образуют ***полную группу***, если в результате опыта наступит хотя бы одно из них.

Противоположные события A и $\overline{A}$ представляют собой простейший случай полной группы событий.

1.2. Классическое определение вероятности. Основные теоремы алгебры случайных событий

Вероятность случайного события A есть численная мера степени объективной возможности появления события A.

Рассмотрим пространство элементарных событий Ω, состоящее из n элементарных (равновозможных, несовместных, образующих полную группу) событий $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$.

Элементарное событие называется благоприятствующим событию A, если его появление влечет за собой появление события A.

Определение. (Классическое определение вероятности).

Вероятностью $P(A)$ случайного события A называется отношение числа m благоприятствующих ему элементарных событий к их общему числу n:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Основные свойства вероятности:

1. Вероятность случайного события A есть неотрицательное число, заключенное между нулем и единицей, т. е.
$$0 \le P(A) \le 1.$$
2. Вероятность достоверного события равна единице.
3. Вероятность невозможного события равна нулю.

Условной вероятностью события A по отношению к событию B называется вероятность наступления события A, вычисленная при условии наступления события B $(P(B) > 0)$, она обозначается $P(A/B)$ и равна $P(A/B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$.

Событие A называется ***зависимым (независимым)*** от события B, если вероятность события A зависит (не зависит) от того, произошло или не произошло событие B.

Теорема сложения вероятностей (для несовместных событий). *Вероятность суммы нескольких несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий, т. е.*

$$P(A + B + ... + L) = P(A) + P(B) + ... + P(L).$$

Следствие 1. Сумма вероятностей событий, образующих полную группу, равна единице.

Следствие 2. Вероятность события, противоположного данному, равна разности между единицей и вероятностью данного события, т.е.

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Несколько событий называются ***независимыми в совокупности***, если каждое из них и любая комбинация остальных есть события независимые.

Теорема сложения вероятностей (для совместных событий). *Вероятность суммы двух совместных событий A и B равна сумме вероятностей этих событий, минус вероятность их совместного появления:*

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Теорема умножения вероятностей. *Вероятность произведения событий равна произведению их вероятностей, вычисленных в предположении, что все события, предшествующие каждому из них, имели место, т. е.*

$$P(ABC...KL) = P(A)P(B/A)P(C/AB)...P(L/ABC...K).$$

Следствие 1. Для двух событий мы имеем

$$P(AB) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B).$$

Следствие 2. Вероятность произведения независимых событий равна произведению их вероятностей

$$P(ABC...KL) = P(A)P(B)P(C)...P(K)P(L).$$

Следствие 3. Вероятность появления ***хотя бы одного*** из событий $A, B, C, ..., D$, независимых в совокупности, равна

$$P = 1 - P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})...P(\overline{D}).$$

Формула полной вероятности. Если событие A может произойти или не произойти при появлении одного из событий $H_1, H_2, ..., H_n$, образующих полную группу несовместных событий, называемых гипотезами, то вероятность $P(A)$ появления события вычисляется по формуле полной вероятности:

$$P(A)=\sum_{k=1}^{n}P(H_k)P(A/H_k),$$

где $P(H_k)$ — вероятность гипотезы H_k; $P(A/H_k)$ — условная вероятность события A при условии выполнения этой гипотезы.

Так как гипотезы $H_1, H_2, ..., H_n$ образуют полную группу несовместных событий, то

$$\sum_{k=1}^{n}P(H_k)=1.$$

Повторение опытов. Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться с постоянной вероятностью p и не появиться с вероятностью $q=1-p$. Тогда вероятность $P_n(m)$ того, что в n опытах событие A наступит ровно m раз, вычисляется по формуле Бернулли

$$P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m},$$

где C_n^m — число сочетаний из n элементов по m.

Однако пользоваться формулой Бернулли при больших n трудно, так как приходится возводить числа в большие степени. В этих случаях пользуются локальной теоремой Лапласа или формулой Пуассона [1—3].

Вновь предположим, что проводится n испытаний, в каждом из которых событие A может появиться с постоянной вероятностью p и не появиться с вероятностью $q=1-p$. Тогда вероятность $P_n(m_1,m_2)$ того, что событие A появится не менее m_1 и не более m_2 раз, вычисляется с помощью интегральной теоремы Лапласа.

Интегральная теорема Лапласа. Если вероятность p появления события A постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(m_1,m_2)$ того, что событие A появится в n независимых испытаниях от m_1 до m_2 раз, приближенно равна

$$P_n(m_1,m_2)\approx\Phi(x_2)-\Phi(x_1),$$

где $x_1=\dfrac{m_1-np}{\sqrt{npq}}$, $x_2=\dfrac{m_2-np}{\sqrt{npq}}$, а $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ – функция Лапласа, для которой имеются специальные таблицы (приложение 1).

1.3. Дискретные случайные величины

Случайной величиной называют величину, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, наперед неизвестное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.

Случайная величина называется ***дискретной,*** если ее возможные значения можно пронумеровать. Основными формами задания дискретной случайной величины являются: 1) ряд распределения; 2) функция распределения (интегральная функция распределения).

Рядом распределения дискретной случайной величины X называется таблица, в которой перечислены возможные значения случайной величины $x_1, x_2, ..., x_n$ и соответствующие им вероятности $p_1, p_2, ..., p_n$.

x_i	x_1	x_2	...	x_n
p_i	p_1	p_2	...	p_n

Здесь $p_i=P(X=x_i)$; $\sum_{i=1}^{n}p_i=1$.

Интегральной функцией распределения (функцией распределения) случайной величины X называется функция $F(x)=P(X<x)$, равная вероятности того, что случайная величина примет значение меньшее x.

Функция распределения $F(x)$ для дискретной случайной величины X вычисляется по формуле

$$F(x)=\sum_{x_i<x}P(X=x_i),$$

где суммирование ведется по значениям i, для которых $x_i<x$.

Вероятность попадания случайной величины X на участок (α,β) выражается формулой

$$P(\alpha\le X<\beta)=F(\beta)-F(\alpha).$$

Математическим ожиданием дискретной случайной величины X называется значение, вычисленное по формуле

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i .$$

Математическое ожидание обозначается также m_x. Оно приближенно равно среднему возможному значению случайной величины.

Дисперсией случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X)=M(X-m_x)^2.$$

Следовательно, для дискретной случайной величины X дисперсия вычисляется по формуле

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m_x)^2 p_i .$$

Дисперсия $D(X)$ обозначается также D_x. При вычислении дисперсии иногда удобна формула

$$D_x=M(X^2)-m_x^2.$$

Корень квадратный из дисперсии называется ***средним квадратическим отклонением*** случайной величины X и определяется формулой

$$\sigma_x=\sqrt{D_x}.$$

Дисперсия и среднее квадратическое отклонение характеризуют рассеивание значений случайной величины относительно ее математического ожидания.

1.4. Непрерывные случайные величины

Случайная величина называется ***непрерывной,*** если ее возможные значения сплошь заполняют некоторый интервал.

Основными формами задания непрерывной случайной величины являются:

1) интегральная функция распределения $F(x)$; 2) функция плотности вероятности $f(x)$.

Интегральная функция распределения для непрерывной случайной величины X определяется так же, как и для дискретной $F(x)=P(X<x)$.

Плотностью вероятности (дифференциальной функцией распределения) случайной величины X называется функция

$$f(x)=F'(x).$$

Для непрерывной случайной величины X функция распределения $F(x)$ непрерывна на всей оси Ox, а плотность вероятности $f(x)$ существует везде, за исключением, может быть, конечного числа точек.

Плотность вероятности непрерывной случайной величины неотрицательна: $f(x)\ge 0$ и удовлетворяет условию нормировки $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$.

График плотности $f(x)$ называется ***кривой распределения.*** Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет какое-нибудь значение из промежутка (α,β), вычисляется по формуле

$$P(\alpha<X<\beta)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=F(\beta)-F(\alpha).$$

Математическим ожиданием m_x ***непрерывной случайной величины*** X, для которой функция $f(x)$ является плотностью вероятности, называется величина несобственного интеграла

$$m_x=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx,$$

если он сходится.

Дисперсией непрерывной случайной величины называется значение несобственного интеграла

$$D_x=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)^2 f(x)dx,$$

если он сходится.

При вычислении дисперсии иногда удобна формула

$$D_x=M(X^2)-m_x^2=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx-m_x^2.$$

1.5. Некоторые законы распределения случайных величин

Биномиальный закон распределения. Если случайная величина X принимает значения $0,1,\ldots, n$, а их вероятности вычисляются по формуле Бернулли $P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$, то распределение называется ***биномиальным***.

Числовые характеристики биномиального распределения:

$$M(X)=np\ ;\ D(X)=npq;\ \sigma_x=\sqrt{npq}.$$

Нормальный закон распределения. Непрерывная случайная величина называется распределенной по нормальному закону, если ее плотность вероятности имеет вид

$$p(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где $M(X)=a$, $D(X)=\sigma^2$.

Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины X в заданный интервал $(\alpha;\beta)$ вычисляется по формуле

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

Вероятность отклонения такой случайной величины от математического ожидания на величину δ равна

$$P(|X-M(X)|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Здесь $\Phi(x)$ – функция Лапласа (функция нечетная $\Phi(-x)=-\Phi(x)$).

1.6. Образцы решения задач

Задача 1.

Завод получает комплектующие от трех компаний. Надежность поставки комплектующих в срок первой компанией оценивается экспертами на уровне 90%, второй – 85% и третьей – 91%. Чему равна вероятность того, что: а) только одна компания не поставит в срок комплектующие; б) только две компании не поставят в срок комплектующие; в) хотя бы одна компания не поставит в срок комплектующие?

Решение. Обозначим через A_1 событие, состоящее в том, что первая компания не поставит в срок комплектующие, A_2 – вторая компания не поставит в срок комплектующие, A_3 – третья компания не поставит в срок комплектующие. $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3$ – противоположные события, т. е. соответствующая компания комплектующие поставит в срок.

а) Обозначим A – событие, состоящее в том, что только одна компания не поставит в срок комплектующие. Распишем это событие через элементарные. Имеем

$$A=A_1\cdot\overline{A}_2\cdot\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3.$$

По условию $P(\overline{A}_1)=\frac{90\%}{100\%}=0.90$, $P(\overline{A}_2)=\frac{85\%}{100\%}=0.85$, $P(\overline{A}_3)=\frac{91\%}{100\%}=0.91$. Тогда вероятности противоположных событий будут равны:

$P(A_1)=1-P(\overline{A}_1)=1-0.90=0.1$; $P(A_2)=1-P(\overline{A}_2)=1-0.85=0.15$;

$P(A_3)=1-P(\overline{A}_3)=1-0.91=0.09$.

Значит, $P(A)=P(A_1\cdot\overline{A}_2\cdot\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)$. Так как A_1, A_2, A_3 – события независимые, а события $A_1\cdot\overline{A}_2\cdot\overline{A}_3$, $\overline{A}_1A_2\overline{A}_3$, $\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$ – несовместные, то, применяя теорему сложения для несовместных событий и теорему умножения для независимых событий, получим

$$P(A)=P(A_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot P(\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1)\cdot P(A_2)\cdot P(\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot P(A_3)=$$
$$=0.1\cdot0.85\cdot0.91+0.9\cdot0.15\cdot0.91+0.9\cdot0.85\cdot0.09=0.26905.$$

б) Событие B – только две компании не поставят в срок комплектующие. Это значит, что

$$B=A_1\cdot A_2\cdot\overline{A}_3+A_1\cdot\overline{A}_2\cdot A_3+\overline{A}_1\cdot A_2\cdot A_3;$$

$$P(B)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(\overline{A}_3)+P(A_1)\cdot P(\overline{A}_2)P(A_3)+P(\overline{A}_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)=$$
$$=0.1\cdot0.15\cdot0.91+0.1\cdot0.85\cdot0.09+0.9\cdot0.15\cdot0.09=0.03345.$$

в) Событие C – хотя бы одна компания не поставит комплектующие в срок. Вероятность этого события вычислим через противоположное событие $\overline{C}$. Противоположное событие $\overline{C}$ – все три компании поставят комплектующие в срок.

$$\overline{C}=\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot\overline{A}_3;$$

$P(C)=1-P(\overline{C})=1-P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3})=1-P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})\cdot P(\overline{A_3})=$
$=1-0.9\cdot 0.85\cdot 0.91=0.30385.$

Задача 2.

Завод выпустил три партии продукции. Вероятность того, что продукция в первой партии высшего качества – 0.75, во второй – 0.8, в третьей – 0.85. Найти вероятность того, что продукция из взятой наугад партии – высшего качества.

Решение. Для решения задачи воспользуемся формулой полной вероятности. Введем гипотезы: H_1 – событие, состоящее в том, что выбрали первую партию, H_2 – вторую, H_3 – третью. Событие A – продукция в партии – высшего качества. Тогда по формуле полной вероятности

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+P(H_3)P(A/H_3).$$

Поскольку партия выбиралась случайно, то

$$P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=1/3.$$

По условию задачи

$$P(A/H_1)=0.75;\ P(A/H_2)=0.8;\ P(A/H_3)=0.85.$$

Искомая вероятность будет

$$P(A)=\frac{1}{3}\cdot 0.75+\frac{1}{3}\cdot 0.8+\frac{1}{3}\cdot 0.85=0.8.$$

Задача 3.

В страховом обществе на год застраховано N автолюбителей. В случае аварии страховое общество выплачивает автолюбителю S рублей. Какую минимальную стоимость страхового взноса следует установить, чтобы вероятность того, что страховое общество к концу года окажется в убытке, была не больше P, если вероятность автолюбителя попасть в аварию равна p.

$N=1000$; $S=1500$; $P=0.0082$; $p=0.006$.

Решение. Страховое общество окажется в убытке, если придется выплатить потерпевшим аварию сумму большую той, которую она получит от взносов. Выплачиваемая сумма зависит от числа автолюбителей, попавших в аварию.

Пусть k – предельное большое число автолюбителей, попавших в аварию, при котором страховое общество не потерпит убытки. В этом случае должно выполняться условие: $S\cdot k=C\cdot N$, где – S сумма, выплачиваемая пострадавшему; C – страховой взнос; N – количество застрахованных автолюбителей.

По условию задачи необходимо найти C. $C=\dfrac{S\cdot k}{N}$. N и S даны по условию, следовательно, нужно найти k. Пусть X – число автолюбителей, попавших в аварию в течение года. В том случае, когда $k<X\le N$, страховое общество терпит убытки. В условии дано $P(k<X\le N)\le 0.0082$. Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа

$$P_n(k_1,k_2)=\Phi(x_2)-\Phi(x_1),$$

где $x_1=\dfrac{k_1-np}{\sqrt{npq}}$, $x_2=\dfrac{k_2-np}{\sqrt{npq}}$, а $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ – функция Лапласа. В нашем случае $n=1000$, $k_1=k, k_2=1000$, $p=0.006$, $q=1-p=0.994$, $n\cdot p=1000\cdot 0.006=6$, $\sqrt{npq}=\sqrt{6\cdot 0.996}=\sqrt{5.99}=2.46$, $x_1=\dfrac{k-6}{2.46}$, $x_2=\dfrac{1000-6}{2.46}>5$, следовательно (приложение 1), $\Phi(x_2)=0.5$, $0.5-\Phi\left(\dfrac{k-6}{2.46}\right)\le 0.0082;\Rightarrow \Phi\left(\dfrac{k-6}{2.46}\right)\ge 0.4928$. Используя таблицу значений функции $\Phi(x)$, решаем уравнение $\Phi\left(\dfrac{k-6}{2.46}\right)=0.4928$. Из приложения 1 имеем $\dfrac{k-6}{2.46}=2.44,\Rightarrow k=6+2.44\cdot 2.66=12.4904\approx 12,\Rightarrow$

$$\Rightarrow C=\frac{S\cdot k}{N}=\frac{1500\cdot 12}{1000}=18.$$

Значит, страховой взнос должен быть равен 18 у. е.

Задача 4.

Налоговая комиссия для проверки случайным образом отбирает 4 фирмы. При условии, что 8% фирм не имеет нарушений, составьте ряд распределения числа фирм, имеющих нарушения. Найдите численные характеристики этого распределения. Запишите функцию распределения и постройте ее график.

Решение. У нас имеет место повторение опытов. Вероятность того, что фирма имеет нарушения, $P=\dfrac{92\%}{100\%}=0.92$, не имеет нарушений $q=1-p=1-0.92=0.08$, $n=4$.

Так как вероятность того, что фирма имеет нарушения, постоянна и не зависит от выбора фирмы, то случайная величина X – количество фирм, имеющих нарушения, подчиняется биномиальному закону распределения. Возможные значения случайной величины X будут равны 1, 2, 3, 4, а их вероятности равны $P(X=k)=C_4^k p^k q^{4-k}$ (формула Бернулли).

Найдем эти вероятности:

$$P(X=0)=C_4^0\cdot 0.92^0\cdot 0.08^4=0.08^4=0.00004096.$$

$$P(X=1)=C_4^1\cdot 0.92^1\cdot 0.08^3=0.00186.$$

$$P(X=2)=C_4^2\cdot 0.92^2\cdot 0.08^2=0.0325.$$

$$P(X=3)=C_4^3\cdot 0.92^3\cdot 0.08^1=0.2492.$$

$$P(X=4)=C_4^4\cdot 0.92^4\cdot 0.08^0=0.7164.$$

Проверка:

$$0.0004+0.00186+0.0325+0.2492+0.7164=1.$$

Итак, ряд распределения случайной величины X имеет вид

X	0	1	2	3	4
P	0.00004	0.00186	0.0325	0.2492	0.7164

Функцией распределения случайной величины X называется вероятность того, что X примет значение меньшее, чем x.

Так как X не принимает отрицательных значений, то $P(X<0)=0$ и $F(x)=0$ при $x\le 0$. $F(x)$=0.00004 при $x\in(0;\ 1]$, так как при любом $x\in(0;\ 1]$ только одно значение $X=0$ будет меньше x и вероятность этого события равна 0.00004.

При любом $x\in(1;\ 2]$, уже два значения $X=0$ и $X=1$ удовлетворяют неравенству $X<x$ и вероятность этого события будет равна 0.00004+0.001 86=0.0019.

$P(X<x)=0.00004+0.00186+0.0325=0.0344$ при $x\in(2;\ 3]$.

$P(X<x)=0.00004+0.00186+0.0325+0.2492=0.2836$ при $x\in(2;\ 3]$.

$P(X<x)=0.00004+0.00186+0.0325+0.2492+0.7164=1$ при $x\in(2;\ 3]$.

Итак,

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\in(-\infty;0] \\ 0.00004 & \text{при } x\in(0;1] \\ 0.0019 & \text{при } x\in(1;2] \\ 0.0344 & \text{при } x\in(2;3] \\ 0.2836 & \text{при } x\in(3;4] \\ 1 & \text{при } x\in(4;\infty) \end{cases}$$

График этой функции имеет следующий вид.

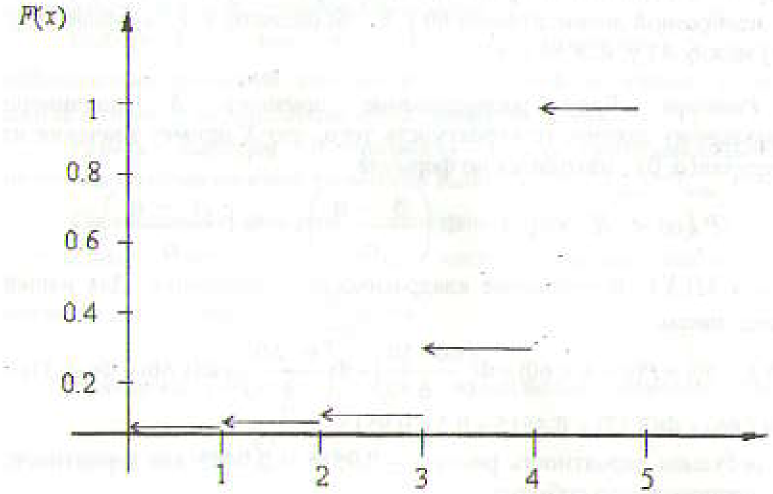


Рис. 1. График функции распределения

Математическое ожидание случайной величины X равно $M(X)=\sum_{i=1}^{4}x_iP_i=0\cdot 0.00004+1\cdot 0.00186+2\cdot 0.0325+3\cdot 0.2492+4\cdot 0.7164=3.68.$

Проверка: для биномиального закона распределения $M(X)=n\cdot p=4\cdot 0.92=3.68$.

Дисперсию вычисляем по формуле

$$D(x)=\sum_{i=0}^{4}x_i^2P_i-M^2(x)=0\cdot 0.00004+1\cdot 0.00196+4\cdot 0.0325+9\cdot 0.2492+$$
$$+16\cdot 0.7164-13.5424=0.2944.$$

Проверка: для биномиального закона распределения $D(X) = n \cdot p \cdot q = 4 \cdot 0.92 \cdot 0.08 = 0.2944$.

Задача 5.

Предположим, что в течение года цена за 1 м^3 необрезной доски есть случайная величина, распределенная по нормальному закону с математическим ожиданием, равным 50 у. е. и средним квадратическим отклонением, равным 6. Определите вероятность того, что в случайно выбранный день обсуждаемого периода цена за 1м^3 необрезной доски: а) ниже 60 у. е.; б) более 60 у. е.; в) выше 40 у. е.; г) между 42 у. е. и 54 у. е.

Решение. Если распределение признака X подчинено нормальному закону, то вероятность того, что X примет значение из интервала (α,β), находится по формуле

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

где $a = M(X)$, σ – среднее квадратическое отклонение. Для нашей задачи имеем:

а) $P(X<60)=P(0<X<60)=\Phi\left(\frac{60-50}{6}\right)-\Phi\left(\frac{0-50}{6}\right)=\Phi(1.66)-\Phi(-8.33)=$

$=\Phi(1.66)+\Phi(8.33)=0.4515+0.5=0.9515$;

б) Требуемая вероятность равна $1 - 0.9515 = 0.0485$ как вероятность противоположного события;

в) $P(X>40)=\Phi(40<X<+\infty)=\Phi(+\infty)-\Phi(\frac{40-50}{6})=\Phi(+\infty)+\Phi(1.66)=$

$=0.5+0.4515=0.9515$;

г) $P(42<X<54)=\Phi\left(\frac{54-50}{6}\right)-\Phi\left(\frac{42-50}{6}\right)=\Phi(0.66)-\Phi(-1.33)=$

$=\Phi(0.66)+\Phi(1.33)=0.2454+0.4516=0.697$.

2. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

2.1. Статистический ряд и его описание

Математическая статистика занимается установлением закономерностей, которым подчинены массовые, однородные, случайные явления, на основе изучения статистических данных - результатов наблюдений.

Генеральной совокупностью называется множество всех возможных значений случайной величины X.

Выборкой объема n называется множество $x_1, x_2, \cdots, x_n$ наблюдаемых значений изучаемой случайной величины, которые соответствуют n независимым испытаниям (опытам).

Размах выборки W – разность между максимальным и минимальным значениями элементов выборки: $W = x_{\max} - x_{\min}$.

Статистический ряд – совокупность пар (x_i, n_i), $i = \overline{1,k}$, где x_i – разные элементы выборки, n_i – частота появления выборочного значения x_i. Очевидно, что $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$.

Величины $\omega_i = \frac{n_i}{n}$, $i = \overline{1,k}$ называются относительными частотами и для них $\sum_{i=1}^{k} \omega_i = 1$.

Обычно статистический ряд записывают в виде табл. 1.

Таблица 1

x_i	x_1	x_2	...	x_k
n_i	n_1	n_2	...	n_k
ω_i	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	...	$\frac{n_k}{n}$

При изучении непрерывной случайной величины или при большом объеме выборки ее элементы объединяются в группы и получают интервальный статистический ряд (табл. 2).

Таблица 2

Интервал	$[x_{\min}, x_2)$	$[x_2, x_3)$	...	$[x_k, x_{\max}]$
Середина интервала	x_1^*	x_2^*	...	x_k^*
Частота	n_1	n_2	...	n_k
Относительная частота	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	...	$\frac{n_k}{n}$

Если все интервалы имеют одинаковую длину h, то $h = \frac{W}{k}$. Количество интервалов выбирают от 5 до 20.

Полигоном частот статистического ряда называется ломаная линия с вершинами в точках (x_i, n_i), $i = \overline{1,k}$.

Полигоном относительных частот статистического ряда называется ломаная линия с вершинами в точках $\left(x_i, \frac{n_i}{n}\right)$, $i = \overline{1,k}$.

Гистограммой относительных частот статистического интервального ряда называется ступенчатая фигура, составленная из прямоугольников, построенных на интервалах группирования с высотой прямоугольников $\frac{n_i}{nh}$. Площадь каждого прямоугольника равна $\frac{n_i}{n}$, а сумма площадей всех прямоугольников равна 1.

Эмпирической функцией распределения $F^*(x)$ называется функция

$$F^*(x) = \sum_{x_i < x} \frac{n_i}{n}. \tag{1}$$

Эта функция непрерывна слева, обладает всеми свойствами функции распределения случайной величины $F(x) = P(X < x)$ и является приближенным представлением последней.

2.2. Статистическая оценка параметров распределения

Анализ полигона, гистограммы и эмпирической функции распределения дает возможность сделать предположение о законе

распределения изучаемой случайной величины. Данный закон может быть установлен и на основании теоретических предположений.

Затем возникает задача оценки параметров предполагаемого закона распределения по полученной выборке. Оценкой параметра называют функцию от выборки, значение которой является приближенным значением параметра. Оценки параметров подразделяются на точечные и интервальные. Точечные оценки задаются одним числом, интервальные —границами доверительного интервала. Точечные оценки должны удовлетворять определенным требованиям.

Несмещенной называется статистическая оценка $\widetilde{\Theta}$, математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру Θ при любом объеме выборки, т.е. $M(\widetilde{\Theta}) = \Theta$.

Эффективной называется статистическая оценка, которая (при данном объеме выборки) имеет минимально возможную дисперсию.

Состоятельной называется статистическая оценка, которая при $n \to \infty$ стремится по вероятности к оцениваемому параметру, т.е. $P\left(\left|\widetilde{\Theta} - \Theta\right| < \varepsilon\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$.

Точечной оценкой математического ожидания является ***выборочное среднее***

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i$$

Для интервального статистического ряда

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^* n_i \tag{2}$$

Точечной оценкой дисперсии является выборочная дисперсия $\overline{D}_в$, которая вычисляется по формуле

$$\overline{D}_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 n_i - \bar{x}^2.$$

Эта оценка является смещенной. ***Несмещенной оценкой дисперсии*** D_x ***является*** s^2. Для выборки объема n

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \frac{n}{n-1}\bar{x}^2.$$

Для интервального статистического ряда

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}\left(x_i^* - \bar{x}\right)^2 n_i = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}(x_i^*)^2 n_i - \frac{n}{n-1}\bar{x}^2. \quad (3)$$

Оценкой среднего квадратического отклонения служит корень из несмещенной оценки дисперсии, т.е. s.

Доверительным интервалом для параметра Θ называется интервал (α_1, α_2), который покрывает неизвестный параметр Θ с заданной надежностью $\gamma = 1-\alpha$, т.е. $P(\alpha_1 < \Theta < \alpha_2) = \gamma$. Число $\gamma = 1-\alpha$ называется доверительной вероятностью, а значение α – уровнем значимости. На практике обычно используют уровни значимости: 0.1, 0.05, 0.01.

Доверительный интервал для математического ожидания нормально распределенной случайной величины X при данном уровне значимости α и известной дисперсии $D_x = \sigma^2$ имеет вид

$$\left(\bar{x} - t_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right), \quad (4)$$

где t_γ определяется из условия $2\Phi(t_\gamma) = \gamma = 1-\alpha$, или $\Phi(t_\gamma) = \gamma/2$ и

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ – функция Лапласа (приложение 1).

При неизвестной дисперсии генеральной совокупности используется формула

$$\left(\bar{x} - t_{\alpha,\nu}\frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{\alpha,\nu}\frac{s}{\sqrt{n}}\right), \quad (5)$$

где $t_{\alpha,\nu}$ определяется с помощью таблицы значений распределения Стьюдента по данному числу степеней свободы $\nu = n-1$ и уровню значимости α. s – оценка среднего квадратического отклонения (приложение 3). Отметим, что при объеме выборки $n > 30$ вместо распределения Стьюдента можно пользоваться нормальным распределением.

2.3. Статистическая проверка гипотез. Критерий χ^2 (Пирсона)

Статистической гипотезой H называется допущение относительно параметров или вида распределения изучаемой случайной величины X.

Правило, по которому проверяемая гипотеза H принимается или отклоняется, называется статистическим критерием проверки гипотезы H.

Одним наиболее распространенным критерием проверки непараметрических гипотез о виде функции распределения изучаемой случайной величины X является критерий χ^2 (Пирсона). Данный критерий проверяет гипотезу о возможном законе распределения и применяется для разных распределений.

Схема применения критерия χ^2 для проверки гипотезы H о законе распределения изучаемой случайной величины X заключается в следующем:

1) рассматриваем гипотезу H_0 о законе распределения случайной величины X (дискретной или непрерывной);
2) по выборке находим оценки $\bar{x}$ и s^2 неизвестных параметров предполагаемого закона распределения;
3) определяем частоты n_i, $i = \overline{1,k}$, с которыми встречаются в выборке каждое значение дискретной случайной величины или элементы выборки непрерывной случайной величины принадлежащие каждому из заданных интервалов;
4) находим теоретические вероятности $p_i = P(X = x_i)$ – для дискретной, $p_i = F(x_{i+1}) - F(x_i)$ – для непрерывной случайной величины. Для нормального закона распределения имеем

$$p_i = \Phi\left(\frac{x_{i+1} - \bar{x}}{s}\right) - \Phi\left(\frac{x_i - \bar{x}}{s}\right); \quad (6)$$

5) вычисляем наблюдаемое значение критерия χ^2:

$$\chi^2_{набл} = \sum_{i=1}^{k}\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}; \quad (7)$$

6) контроль вычислений осуществляется равенством

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{n_i^2}{np_i} - n = \chi^2_{набл}, \qquad (8)$$

7) принимаем статистическое решение: гипотеза H_0 не противоречит выборке наблюдений на данном уровне значимости α, если $\chi^2_{набл} < \chi^2_{\alpha,\nu}$, где $\nu = k - l - 1$ – число степеней свободы, l – число параметров распределения, определяемых по выборке, k – число интервалов.

Если же $\chi^2_{набл} \geq \chi^2_{\alpha,\nu}$, то гипотеза H_0 отклоняется и может быть выдвинута другая гипотеза H_1, которая проверяется по той же схеме.

Пример 1. Даны результаты измерения диаметров бревен, которые поступают на распиловку деревообрабатывающего предприятия, записанные в виде интервального ряда (табл. 3).

Задание.

1. Построить гистограмму относительных частот.
2. Найти эмпирическую функцию распределения и построить ее график.
3. Вычислить выборочное среднее значение $\bar{x}$ и несмещенную оценку дисперсии s^2.
4. Определить гипотетическую плотность закона распределения.
5. Определить теоретические частоты и проверить согласование данных выборки с гипотетическим законом распределения с помощью критерия χ^2 (Пирсона) при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.
6. Найти доверительный интервал для математического ожидания диаметров бревен, которые поступают на распиловку деревообрабатывающего предприятия с доверительной вероятностью $\gamma = 0{,}95$.

Таблица 3

Интервал $[x_i\text{-}x_{i+1})$	Середина интервала x_i^*	Частота n_i	Относительная частота $\omega_i = \frac{n_i}{n}$	Высота $\frac{n_i}{hn}$
[17-23)	20	6	0.06	0.01
[23-29)	26	15	0.15	0.025
[29-35)	32	22	0.22	0.037
[35-41)	38	26	0.26	0.043
[41-47)	44	16	0.16	0.027
[47-53)	50	10	0.1	0.017
[53-59)	56	5	0.05	0.008

Строим гистограмму относительных частот.

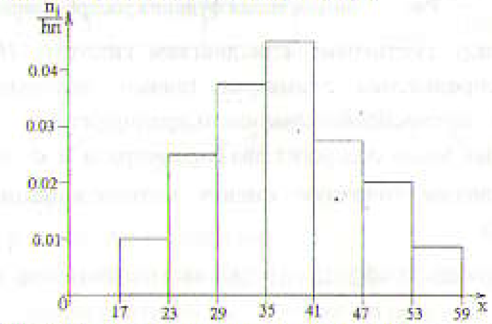


Рис. 2. Гистограмма относительных частот

Определим эмпирическую функцию распределения по формуле (1).

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 20, \\ 0.06, & 20 < x \leq 26, \\ 0.21, & 26 < x \leq 32, \\ 0.43, & 32 < x \leq 38, \\ 0.69, & 38 < x \leq 44, \\ 0.85, & 44 < x \leq 50, \\ 0.95, & 50 < x \leq 56, \\ 1, & x > 56. \end{cases}$$

Строим график функции распределения.

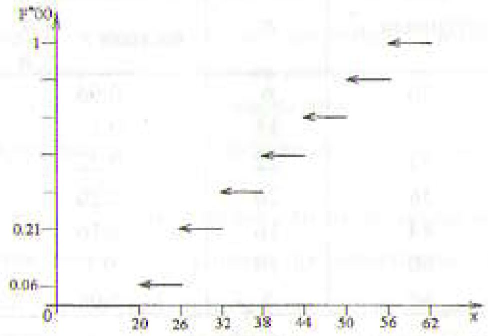


Рис. 3. Эмпирическая функция распределения

По виду гистограммы выдвигаем гипотезу H_0 о нормальном законе распределения диаметров бревен, которые поступают на распиловку деревообрабатывающего предприятия.

Данный закон содержит два параметра a и σ: $m_x = a$; $D_x = \sigma^2$.

Определим точечную оценку математического ожидания по формуле (2):

$$\bar{x} = \frac{1}{100}(20\cdot 6+26\cdot 15+32\cdot 22+38\cdot 26+44\cdot 16+50\cdot 10+56\cdot 5)=\frac{3686}{100}=36.86.$$

Несмещенную оценку дисперсии найдем по формуле (3):

$$s^2 = \frac{1}{99}\left(16.86^2\cdot 6+10.86^2\cdot 15+4.86^2\cdot 22+1.14^2\cdot 26+7.14^2\cdot 16+\right.$$

$$\left.+13.14^2\cdot 10+19.14^2\cdot 5\right)=\frac{8402{,}04}{99}=84.87.$$ Тогда $s=9.2$.

Гипотетическая функция плотности соответствующего нормального закона распределения имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{9.2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-36.86)^2}{2\cdot 9.2^2}}.$$

Определим вероятности p_i, с которыми случайная величина попадает в соответствующий интервал по формуле (6). Значения

интегральной функции Лапласа находим по таблице (приложение 1). Все вычисления заносим в табл. 4.

Таблица 4

Интервал	n_i	p_i	np_i	n_i-np_i	$(n_i-np_i)^2$	$\frac{(n_i-np_i)^2}{np_i}$	$\frac{n_i^2}{np_i}$
[-∞;23)	6	0.0668	6.68	-0.68	0.4624	0.0692	5.3892
[23;29)	15	0.1309	13.09	1.91	3.6481	0.2787	17.1871
[29;35)	22	0.2230	22.30	-0.30	0.09	0.0040	21.7040
[35;41)	26	0.2529	25.29	0.71	0.5041	0.0199	26.7299
[41;47)	16	0.1907	19.07	-3.07	9.4249	0.4942	13.4242
[47;53)	10	0.0956	9.56	0.44	0.1936	0.0203	10.4603
[53;+∞)	5	0.0401	4.01	0.99	0.9801	0.2444	6.2344
		$\sum p_i=1$				$\chi^2_{набл}=1.1308$	101.130

Например:

$$p_1 = P(-\infty < X < 23) = \Phi\left(\frac{23-36.86}{9.2}\right)-\Phi\left(\frac{-\infty-36.86}{9.2}\right)=\Phi(+\infty)-\Phi(1.5)=$$

$$=0.5-0.4332=0.0668.$$

Остальные p_i находим аналогично.

Вычисляем выборочное значение статистики критерия χ^2 по формуле (7). Выполняем контроль вычислений по равенству (8).

Так как $\chi^2_{набл}=101.130-100=1.130$, то вычисления сделаны правильно. Определим критическое значение критерия χ^2. Нормальный закон распределения содержит два определяемых параметра a и σ, поэтому $l=2$.

Количество интервалов статистического ряда $k=7$. Число степеней свободы $\nu=k-l-1=7-2-1=4$.

Для уровня значимости $\alpha=0.05$ по табл. (приложение 2) находим $\chi^2_{\alpha;\nu}=\chi^2_{0.05;4}=9.49$.

Таким образом, $\chi^2_{набл}<\chi^2_{\alpha;\nu}$, поэтому принимаем гипотезу о нормальном законе распределения случайной величины диаметров бревен с параметрами $a=36.86$, $\sigma=9.2$.

Определим доверительный интервал для математического ожидания при неизвестной дисперсии по формуле (5) с уровнем значимости $a = 0.05$. Число степеней свободы будет $\nu = n - 1 = 99$. По таблице (приложение 3) определим $t_{\alpha;\nu} = t_{0.05;99} = 1.98$. Тогда получим

$$\left(36.86 - 1.98\frac{9.2}{\sqrt{100}};\ 36.86 + 1.98\frac{9.2}{\sqrt{100}}\right) = (35.04;\ 38.68).$$

2.4. Элементы теории корреляции

Корреляционный анализ исследует взаимосвязь случайных величин. Предположим, что результаты эксперимента описываются двумя случайными величинами X и Y. Предварительное представление о характере зависимости между X и Y можно получить, если элементы выборки (x_i, y_i), $i = \overline{1,n}$ отметить в виде точек на плоскости в выбранной системе координат. Эта точечная диаграмма называется ***корреляционным полем.***

Распределение системы (X,Y) характеризуется числовыми параметрами: математическими ожиданиями компонент m_x, m_y; дисперсиями $D_x = \sigma_x^2$, $D_y = \sigma_y^2$, которые определяют меру рассеивания относительно центра; корреляционным моментом (ковариацией) $K_{xy} = M((X - m_x)(Y - m_y))$; ***коэффициентом корреляции*** $r = \dfrac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$, $|r| \le 1$.

Коэффициент корреляции отражает степень линейной зависимости между X и Y. Если $|r| = 1$, то элементы выборки (x_i, y_i), $i = \overline{1,n}$ лежат на прямой линии, а X и Y линейно зависимы. Если X и Y независимы, то $r = 0$.

Уравнения

$$\bar{y}_x - m_y = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - m_x) \text{ и } \bar{x}_y - m_x = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - m_y)$$

называют ***уравнениями линейной регрессии Y на X и X на Y*** соответственно.

Рассмотрим оценки параметров линейной регрессии, если задана выборка парных значений (x_i, y_i), $i = \overline{1,n}$:

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_n
y_i	y_1	y_2	y_3	...	y_n

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i; \qquad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i;$$

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{n}{n-1}\bar{x}^2;$$

$$s_y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{n}{n-1}\bar{y}^2;$$

$$K_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - \bar{x}\bar{y};$$

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{s_x s_y}.$$

Эмпирическая функция линейной регрессии Y на X и X на Y соответственно задается уравнениями

$$\bar{y}_x - \bar{y} = r_{xy}\frac{s_y}{s_x}(x - \bar{x});\ \bar{x}_y - \bar{x} = r_{xy}\frac{s_x}{s_y}(y - \bar{y}). \tag{9}$$

Замечание. Если вычисления выполнены верно, то графики линейных регрессий пересекаются в точке O с координатами $x = \bar{x}$ и $y = \bar{y}$.

Для проверки значимости коэффициента корреляции выдвигается гипотеза H_0 о равенстве коэффициента корреляции нулю. Вычисляется наблюдаемое значение статистики

$$t_{набл} = \frac{|r|\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}.$$

и сравнивается с табличным (приложение 3) при заданном уровне значимости α: $t_{табл} = t_{\alpha,n-2}$. Если $t_{набл} \ge t_{\alpha,n-2}$, то гипотеза об отсутствии корреляционной связи между случайными величинами отвергается. Если же $t_{набл} < t_{\alpha,n-2}$, то нет основания отвергать нулевую гипотезу о некоррелированности случайных величин X и Y.

Выборку большого объема задают в виде корреляционной таблицы. С этой целью значения X и Y разбивают на m и k интервалов длиной h_x и h_y соответственно, а в клетки (i, j) таблицы записывают частоты n_{ij} для каждой комбинации интервалов. В дальнейших вычислениях используются середины интервалов и соответствующие частоты.

Чтобы упростить вычисления, вводятся условные переменные

$$u = \frac{x - c_x}{h_x}; \; v = \frac{y - c_y}{h_y}.$$

За условные нули c_x и c_y принимаются середины интервалов с наибольшей частотой;

$$x = h_x u + c_x; \qquad y = h_y v + c_y;$$

$$M_x = h_x M_u + c_x; \qquad M_y = h_y M_v + c_y;$$

$$D_x = h_x^2 D_u; \qquad D_y = h_y^2 D_v;$$

$$\sigma_x = h_x \sigma_u; \quad \sigma_y = h_y \sigma_v; \quad r_{xy} = r_{uv}.$$

Связь между числовыми характеристиками будет

$$\bar{x} = \bar{u} h_x + c_x; \; \bar{y} = \bar{v} h_y + c_y; \; s_x = h_x s_u; \; s_y = h_y s_v; \; r_{xy} = r_{uv}.$$

Пример 2.

Даны результаты наблюдений двух случайных величин X и Y.

Таблица 5

x_i / y_j	15–25	25–35	35–45	45–55	55–65	n_j
41–44	1	5	2	-	-	8
44–46	1	9	4	-	-	14
46–48	-	4	40	8	-	52
48–50	-	-	1	12	2	15
50–52	-	-	1	3	7	11
n_i	2	18	48	23	9	n=100

Задание.

1. Построить корреляционное поле.
2. Определить выборочные средние значения $\bar{x}$, $\bar{y}$.
3. Определить несмещенные оценки дисперсий s_x^2, s_y^2.
4. Вычислить коэффициент корреляции r_{xy}.
5. Найти эмпирические линейные функции регрессии Y на X и X на Y; отобразить эти прямые графически.
6. Проверить соответствие линейной регрессии с результатами наблюдения при уровне значимости $\alpha = 0.05$.

Решение. Построим корреляционное поле.

Находим середины интервалов группировки статистических данных. Для того чтобы упростить вычисления, введем новые величины:

$$u_i = \frac{x_i - c_x}{h_x}, \qquad v_i = \frac{y_i - c_y}{h_y},$$

где $c_x = 40$, $c_y = 47$, $h_x = 10$, $h_y = 2$.

Таблица 6

	u_i	-2	-1	0	1	2	
v_j	x_i / y_j	20	30	40	50	60	n_j
-2	43	1	5	2	-	-	8
-1	45	1	9	4	-	-	14
0	47	-	4	40	8	-	52
1	49	-	-	1	12	2	15
2	51	-	-	1	3	7	11
	n_i	2	18	48	23	9	n=100

Вычислим средние значения:

$$\bar{u} = \frac{1}{n} \sum n_i u_i = 0.19;$$

$$\bar{v} = \frac{1}{n} \sum n_j v_j = 0.07.$$

Определим несмещенные оценки дисперсии:

$$s_u^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{m} n_i u_i^2 - \frac{n}{n-1}\overline{u}^2 = 0.8221;$$

$$s_u = 0.9067;$$

$$s_v^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{k} n_j v_j - \frac{n}{n-1}\overline{v}^2 = 1.0557;$$

$$s_v = 1.0275.$$

Определим корреляционный момент

$$K_{uv} = \frac{1}{n}\sum n_{ij} u_i v_j - \overline{uv} = 0.7441.$$

Коэффициент корреляции будет $r_{uv} = \frac{K_{uv}}{s_u s_v} = 0.8$.

Тогда

$$\overline{x} = c_x + \overline{u}h_x = 40 + 0.19 \cdot 10 = 41.9;$$

$$\overline{y} = c_y + \overline{v}h_y = 47 + 0.07 \cdot 2 = 47.14;$$

$$s_x = h_x \cdot s_u = 10 \cdot 0.9067 = 9.067;$$

$$s_y = h_y \cdot s_v = 2 \cdot 1.0275 = 2.055;$$

$$r_{xy} = r_{uv} = 0.8.$$

Запишем эмпирические линейные функции регрессии Y на X и X на Y.

$$\overline{y}_x - 47.14 = 0.8 \cdot \frac{2.055}{9.067}(x - 41.9); \quad \overline{y}_x = 0.181x + 39.55;$$

$$\overline{x}_y - 41.9 = 0.8 \cdot \frac{9.067}{2.055}(y - 47.14); \quad \overline{x}_y = 3.5245y - 124.$$

Отобразим эти прямые на рис. 4.

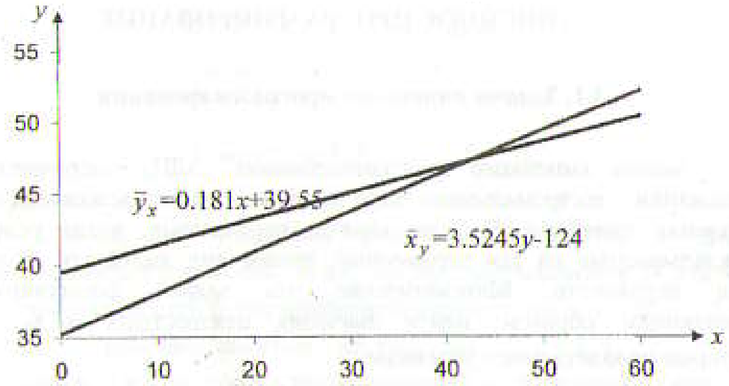


Рис. 4. Графики линейных функций регрессий

Точка пересечения графиков имеет координаты $x = \overline{x} = 41.9$, $y = \overline{y} = 47.14$, следовательно, вычисления выполнены правильно.

Проверим соответствие гипотезы о линейной регрессии с результатами наблюдения. Для этого найдем наблюдаемое значение критерия для нулевой гипотезы о равенстве коэффициента корреляции нулю.

$$t_{набл} = \frac{|r|\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{0.8\sqrt{98}}{\sqrt{1-0.64}} = 13.144.$$

Для уровня значимости $\alpha = 0.05$ при степени свободы $\nu = n - 2 = 98$ по таблице распределения Стьюдента (приложение 3) находим $t_{\alpha;\nu} = t_{0.05;98} = 1.98$.

Так как $t_{набл} > t_{табл}$, то нулевая гипотеза о равенстве коэффициента корреляции нулю отвергается и принимается гипотеза о линейной зависимости между случайными величинами.

3. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

3.1. Задачи линейного программирования

Задача линейного программирования (ЗЛП) заключается в отыскании экстремального (минимального или максимального) значения линейной функции многих переменных, когда условия, накладываемые на эти переменные, имеют вид линейных равенств или неравенств. Математически эта задача формулируется следующим образом: найти значения неизвестных $x_1, x_2, ..., x_n$, которые удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1,2,...,n$$

и обращают в минимум (или максимум) линейную функцию (форму)

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n.$$

Это требование обычно записывают в виде

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \min(\max).$$

В данной постановке ограничения, накладываемые на переменные $x_1, x_2, ..., x_n$, имеют вид линейных неравенств. Такая форма ЗЛП называется *нормальной*. Если эти ограничения записаны в виде линейных равенств, то говорят о *канонической* форме ЗЛП. Вводя дополнительные переменные или записывая равенство в виде двух неравенств можно переходить от нормальной формы к канонической и наоборот.

3.2. Геометрический метод решения ЗЛП

Геометрический (графический) метод применяется в основном для решения ЗЛП в нормальной форме, когда задача содержат две переменные. В случае большего числа переменных применение этого метода становится затруднительным.

Пусть требуется решить задачу

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 \to \min(\max) \quad (10)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \qquad x_1 \ge 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m \qquad x_2 \ge 0 \end{cases} \quad (11)$$

Рассмотрим плоскость переменных x_1 и x_2. Уравнение $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$ есть уравнение прямой в этой плоскости. Данная прямая разобьет плоскость $x_1 0 x_2$ на две полуплоскости. В одной из этих полуплоскостей будет выполнено неравенство $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1$, а в другой – противоположное неравенство $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \ge b_1$. Чтобы установить, в какой из двух полуплоскостей выполняется нужное нам неравенство, надо подставить в его левую часть координаты какой-нибудь точки, проще всего начала координат. Например, решением неравенства $x_1 + x_2 \le 5$ будет полуплоскость, содержащая начало координат, так как в точке (0; 0) это неравенство выполняется.

Итак, решением каждого из неравенств системы (11) является некоторая полуплоскость, а решением всей системы неравенств (11) будет область D – пересечение этих полуплоскостей. При этом возможны 4 типа областей: а) ограниченный выпуклый многоугольник; б) неограниченная многоугольная область; в) одна точка; г) пустое множество, когда система неравенств (11) несовместна.

Область D называют многоугольником допустимых решений системы (11), а вершины многоугольника – крайними точками.

Уравнение $c_1x_1 + c_2x_2 = C$, где C – const, определяет в плоскости $x_1 0 x_2$ прямую (б), являющуюся линией уровня функции Z (во всех точках этой прямой значение Z постоянно и равно C). Если C менять от $(-\infty)$ до $(+\infty)$, непрерывно увеличивая, то линия уровня, непрерывно смещаясь параллельно самой себе, "зачертит" всю плоскость.

Очевидно, что форма Z примет наименьшее значение в области D в первой точке встречи линии уровня (б) с областью D, когда (б) смещается от меньших значений C к большим. Аналогично форма Z примет наибольшее значение в области D в первой точке встречи (б) с D, когда (б) смещается от больших значений C к меньшим.

Направление роста C для линии уровня Z дает вектор $\vec{N} = grad\, Z = \{c_1; c_2\}$.

Рассмотрим возможные случаи.

1. Линия уровня (б) пройдет через вершину многоугольника так, что весь многоугольник D будет расположен по одну сторону от прямой (б). Задача (10), (11) в этом случае разрешима и имеет единственное решение.
2. Линия уровня (б) совпадает с одной из сторон многоугольника. В этом случае задача (10), (11) разрешима и имеет бесконечное множество решений: форма Z достигает экстремального значения в области D во всех точках многоугольника D, совпадающей с линией уровня (б).
3. Как бы мы не уменьшали (увеличивали) значение C, линия уровня $Z = C$ имеет общие точки с областью D. В этом случае форма Z в области D минимального (максимального) значения не достигает, задача (10), (11) неразрешима.

Введем новое понятие. Прямую, которая имеет с областью D хотя бы одну общую точку, и такую, что вся область D лежит по одну сторону от прямой, будем называть опорной по отношению к области D.

Пусть D – многоугольник решений системы (11). Тогда задачу (10), (11) можно сформулировать в следующей форме: среди линий уровня функции Z найти опорную по отношению к D, притом такую, что бы вся область D лежала со стороны больших значений Z, если Z минимизируется, и со стороны меньших значений Z, если Z максимизируется.

Итак, геометрический метод решения задачи (10) с ограничениями (11) состоит из следующих этапов.

1. Находим многоугольник D допустимых решений ЗЛП, т. е. решение системы неравенств (11).
2. Выбрав произвольным образом C, строим прямую α $c_1x_1 + c_2x_2 = C$ и вектор $\vec{N} = grad\, Z = \{c_1; c_2\}$.
3. Перемещая α параллельно самой себе, убеждаемся в том, что среди прямых уровня Z есть опорная по отношению к области D, причем для задачи $Z \to \min$ область D должна лежать со стороны больших значений Z, а для задачи $Z \to \max$ – со стороны меньших значений Z. Любая точка, общая для

найденной опорной прямой и области D, дает решение задачи (10), (11).

Пример 1.

Для сохранения здоровья и работоспособности человек должен в сутки потреблять не менее 45 усл. ед. белков, не менее 138 усл. ед. жиров и не менее 135 усл. ед. углеводов. Для простоты допустим, что имеется всего два вида продуктов $П_1$ и $П_2$; стоимость единицы каждого из них равна соответственно 13 и 10 ден. ед. Содержание названных питательных веществ в различных продуктах питания неодинаково. Предположим, что в единице продукта $П_1$ содержится 9 усл. ед. белков, 6 усл. ед. жиров и 9 усл. ед. углеводов; а в единице продукта $П_2$ содержится соответственно 2, 23, 12 усл. ед. тех же питательных веществ.

Требуется:

1) составить экономико-математическую модель задачи, позволяющую сформировать из продуктов $П_1$, $П_2$ суточную диету, которая, с одной стороны, содержала бы белков, жиров и углеводов не менее минимальных научно обоснованных норм и вместе с тем требовала бы минимальных затрат;
2) решить задачу графическим способом.

Решение: Обозначим через x_1 – план закупки продукта $П_1$, а через x_2 – план закупки продукта $П_2$. Тогда стоимость диеты запишется в виде целевой функции $f = 13x_1 + 10x_2$, которую надо минимизировать. При этом должны быть выполнены ограничения по белкам, жирам и углеводам, которые записываются как линейные неравенства:

$$\begin{cases} 9x_1 + 2x_2 \ge 45; \\ 6x_1 + 23x_2 \ge 138; \\ 9x_1 + 12x_2 \ge 135. \end{cases}$$

Ясно, что переменные x_1 и x_2 должны быть неотрицательными.

Значит, экономико-математическая модель задачи сводится к задаче линейного программирования в нормальной форме, а именно минимизации целевой функции $f = 13x_1 + 10x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} 9x_1 + 2x_2 \geq 45; \\ 6x_1 + 23x_2 \geq 138; \\ 9x_1 + 12x_2 \geq 135; \quad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Решим эту задачу графическим методом.

Областью допустимых решений задачи является неограниченный многоугольник, в котором значения переменных удовлетворяют системе неравенств. Для этого строим ограничивающие прямые по двум точкам и указываем полуплоскость, которая описывается соответствующим неравенством.

Это делается следующим образом.

$L_1: 9x_1 + 2x_2 = 45$; $L_2: 6x_1 + 23x_2 = 138$; $L_3: 9x_1 + 12x_2 = 135$;

$x_1 = 0$; $x_2 = 22.5$; $x_1 = 0$; $x_2 = 6$; $x_1 = 0$; $x_2 = 11.25$;

$x_2 = 0$; $x_1 = 5$; $x_2 = 0$; $x_1 = 23$; $x_2 = 0$; $x_1 = 15$.

$L_4 = x_1 = 0$; $L_5 = x_2 = 0$.

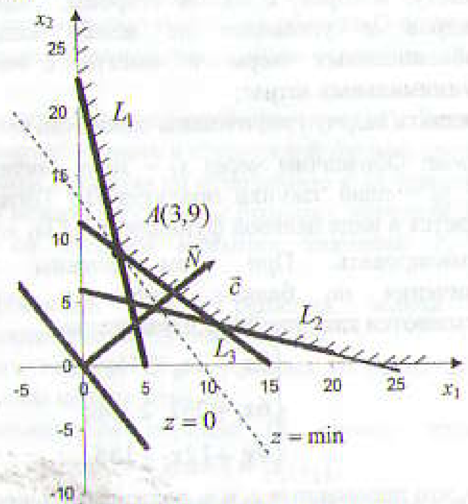


Рис. 5. Графическое решение задачи

Далее строим линию уровня $z = 0$ и вектор градиента функции, т. е. направление, в котором функция возрастает наискорейшим образом. В данной задаче это направление вектора $\overline{N}(13;\ 10)$.

Двигаясь в направлении вектора $\overline{N}$, мы впервые соприкоснемся с областью допустимых значений в точке A, в которой функция будет иметь min. Точка A является точкой пересечения прямых L_1, L_3, координаты которой найдем из системы уравнений

$$\begin{cases} 9x_1 + 2x_2 = 45, \\ 9x_1 + 12x_2 = 135. \end{cases}$$

Это точка с координатами $A(3; 9)$. В ней минимальное значение целевой функции $f(A) = f(3{,}9) = 13 \cdot 3 + 10 \cdot 9 = 129$.

3.3. Симплекс-метод. Принцип оптимальности. Правила составления симплексной таблицы

Геометрическая интерпретация ЗЛП позволяет установить, что оптимальное решение этой задачи достигается в крайних точках многоугольника (многогранника при $n \geq 3$) решений системы ограничений. Поэтому это решение можно найти методом перебора, т. е. найти все крайние точки многогранника допустимых решений и, вычислив в них значения линейной формы, найти минимальное. Но с увеличением числа переменных n и числа ограничений m число крайних точек стремительно растет, поэтому отмеченный метод приводит к огромным вычислениям.

Выход из создавшегося положения был найден с помощью простого рассуждения. Пусть найдена некоторая крайняя точка A. Предположим, что по условиям задачи можно узнать, уменьшается или увеличивается линейная форма Z при движении от A к некоторым другим крайним точкам B и E. Если в одном из направлений линейная форма уменьшается, то нет смысла находить точку в этом направлении, ибо в ней Z имеет меньшее значение, чем в исходной. Двигаясь дальше по направлениям, вдоль которых Z увеличивается, можно существенно сократить количество вычислений. Приведенное рассуждение и есть описательное обоснование симплекс-метода.

Рассмотрим ЗЛП в нормальной форме

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_i x_i \to \max. \qquad (12)$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases} \qquad (13)$$

$x_j \ge 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$

Теория и алгоритм симплекс-метода строятся для канонической формы ЗЛП, поэтому сведем эту ЗЛП к канонической форме, для чего введем неотрицательные дополнительные переменные $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}$ и получим задачу в канонической форме

$$Z = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n + 0 \cdot x_{n+1} + \ldots + 0 \cdot x_{n+m} \to \max$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \end{cases} \qquad (14)$$

$x_j \ge 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n$

Запишем систему ограничений (14) в виде

$$x_1A_1 + x_2A_2 + \ldots + x_nA_n + x_{n+1}A_{n+1} + \ldots + x_{n+m}A_{n+m} = b,$$

где A_i – вектор-столбец, координатами которого являются коэффициенты при неизвестном x_i; b – вектор-столбец свободных членов системы ограничений.

Будем называть решением (планом) задачи линейного программирования вектор $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m})$, удовлетворяющий системе ограничений (14) и условию $x_j \ge 0, \quad j = 1,2,\ldots n+m$. План задачи, для которого линейная форма достигает максимума, называется оптимальным.

Рассмотрим вектор $X_1 = (0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ b_1,\ b_2, \ldots,\ b_m)$. Он удовлетворяет системе ограничений (14), т. е. является планом, если $b_i \ge 0$. Если все $b_i > 0$, то план называется невырожденным. В этом

случае точка $X_1 = (0, 0, \ldots, 0, b_1, b_2, \ldots, b_m)$ является крайней точкой множества допустимых решений.

Векторы $A_{n+1}, \ldots, A_{n+m}$, координаты которых образуют единичную матрицу порядка m, назовем базисными векторами или базисом; неизвестные при них $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}$ – базисными неизвестными, а остальные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – свободными неизвестными. Подставляя решение X_1 в формулу (12), видим, что $Z(X_1) = 0$.

Решение ЗЛП симплекс-методом распадается на ряд шагов, каждый из которых состоит в следующем: мы от данного плана (данной крайней точки) переходим к новому плану (новой крайней точке) с таким расчетом, чтобы значение линейной формы Z увеличилось. Для этого исходный базис $Б_0$ заменяется новым $Б_1$. Новый базис получается из исходного путем удаления одного из базисных векторов $A_{n+1}, \ldots, A_{n+m}$ и заменой его одним из векторов $A_1, A_2, \ldots, A_n$. После некоторого числа таких шагов мы либо приходим к базису $Б_k$, для которого $Z(X_k)$ есть искомый максимум, либо выясняем, что задача решения не имеет.

При решении ЗЛП симплекс-методом удобно пользоваться симплексными таблицами, которые составляются для каждого плана. Для исходного плана $X_1 = (0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_m)$ задачи (12) с ограничениями (14) симплексная таблица строится следующим образом. Последовательно в столбцах записывают: в первом – обозначения базисных векторов $A_{n+1}, \ldots, A_{n+m}$, во втором – коэффициенты линейной формы Z, т. е. в данном случае нули. В последующих столбцах записывается вся система ограничений: координаты векторов $b, A_1, A_2, \ldots, A_n$. В $(m+1)$-й строке записываются значения Z_0 и Δ_j, которые вычисляются по формулам:

$$Z_0 = \sum_{i=1}^{m} c_{n+i}b_i, \quad Z_j = \sum_{i=1}^{m} c_{n+i}a_{ij}, \quad \Delta_j = Z_j - c_j.$$

Критерием оптимальности рассматриваемого решения (плана) является выполнение условия

$\Delta_j \ge 0,\ j = \overline{1, n+m}$.

Если это условие не выполняется и для некоторого номера j разность $\Delta_j < 0$, тогда следует искать новый план, при котором значение Z было бы больше. Для этого переходим к новому базису. Чтобы определить, какой вектор следует ввести в базис, просматривают последнюю строку. Вектор, соответствующий минимальному отрицательному значению Δ_j, вводится в базис. Пусть

$$\min_{\Delta_j<0} \Delta_j = \Delta_k,$$

тогда вектор A_k нужно ввести в базис. Столбец, содержащий число Δ_k, называется ***разрешающим столбцом*** симплексной таблицы.

Для того чтобы определить, какой вектор нужно вывести из базиса, вычисляют минимальное отношение координат b_i вектора b^* к положительным элементам a_{ik} разрешающего столбца, т. е.

$$\theta_0 = \min_i \frac{b_i}{a_{ik}}, \; a_{ik} > 0.$$

Для этого вычисляют симплексные отношения $\frac{b_i}{a_{ik}}$ для $a_{ik} > 0$ и помещают их в столбец и , затем среди них выбирают наименьшее – θ_0. Пусть $\theta_0 = \frac{b_l}{a_{ik}}$, тогда вектор A_{n+l} нужно исключить из базиса. В симплексной таблице строка, содержащая число b_i, называется ***разрешающей***, а элемент a_{lk}, стоящий на пересечении разрешающих столбца и строки, – ***разрешающим (ключевым) элементом***.

Разрешающие строка и столбец в симплексной таблице выделяются двойными линиями и отмечаются стрелками.

После того как определены разрешающие строка и столбец, строится новая симплексная таблица. В первом столбце записывается новый базис. Он отличается от старого одним вектором: вектор A_{n+l} заменяется вектором A_k. Соответственно заменяется коэффициент c_{n+1} коэффициентом c_k в столбце C.

Новые координаты векторов $A_1, A_2, ..., A_n$ находим по формулам:

$$(b_i)_{нов} = b_i - \frac{b_l}{a_{lk}} a_{ik} \quad (i \neq l); \; (b_l)_{нов} = \frac{b_l}{a_{kl}};$$

$$(a_{ij})_{нов} = a_{ij} - \frac{a_{lj}}{a_{lk}} a_{ik} \; (i \neq l); \; (a_{lj})_{нов} = \frac{a_{lj}}{a_{lk}}.$$

Наиболее просто вычисляются элементы строки l и столбца k, являющихся разрешающими в старой таблице. В столбце k новой таблицы все $a_{ik} = 0$, кроме $a_{lk} = 1$. Элементы строки l получаются из соответствующих элементов старой таблицы делением на a_{lk}. Остальные элементы a_{ij} и b_i вычисляются по "правилу прямоугольника" или путем элементарных преобразований с помощью разрешающей строки. В старой таблице строим прямоугольник с вершинами $a_{ij}, a_{lj}, a_{lk}, a_{ik}$. Перемножаем элементы $a_{lj} \cdot a_{ik}$, не лежащие на одной диагонали с a_{ij}, делим результат на a_{lk} и полученное число вычитаем из a_{ij}. В результате получаем новое значение a_{ij}. Аналогично вычисляются и значения $(b_i)_{нов}$. Затем находим z_0, z_j, Δ_j.

После заполнения новой таблицы определяем план X_2 и устанавливаем, является ли он оптимальным. Все отличные от нуля координаты вектора X_2 находятся в столбце вектора b, номер (индекс) координаты совпадает с номером базисного вектора, стоящего в той же строке, что и сама координата.

Если в новой таблице все $\Delta_j \geq 0$, план X_2 является оптимальным; если хотя бы одна из разностей $\Delta_j < 0$, то нужно строить новую симплексную таблицу по тем же правилам. Процесс продолжается до тех пор, пока не будет получен оптимальный план, т. е. пока не станут все разности $\Delta_j \geq 0$.

Может встретиться случай, когда одна или несколько разностей $\Delta_j < 0$, а столбцы, соответствующие этим разностям, не содержат положительных элементов a_{ij}. Тогда линейная форма Z не ограничена.

При решении задачи на min используют свойство $\min(z) = -\max(-z)$.

Если в канонической форме ЗЛП нет m единичных векторов, то задача сводится к расширенной M-задаче. К каждому ограничению исходной задачи, в котором нет базисной переменной, добавляют искусственную переменную таким образом, чтобы в новой задаче было m единичных векторов. Симплекс-таблица преобразуется по единому правилу. Строка оценок Δ_j состоит их двух $(m+1)$ и

$(m+2)$ строк: в $(m+1)$ строке записываем α_j, в $(m+2)$ – β_j, где $\Delta_j = \alpha_j + \beta_j M$. Целевая функция M-задачи имеет вид: $\tilde{z} = z - M \cdot \left(\sum_i x_{n+i} \right) \to \max$. Если $\tilde{x}_{m} = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, 0, 0, \ldots, 0)$ оптимальное решение расширенной задачи, то $x_{m} = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ оптимальное решение исходной задачи. Более подробно смотри [11–14].

Пример 2.

Найти min функции

$$z = 0.4x_1 + 1.1x_2 + 1.4x_3 + 0x_4 + 0.3x_5 + 0.6x_6 . \qquad (15)$$

При ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 800 \\ x_2 + 2x_4 + x_5 = 900 \\ x_3 + x_4 + 2x_5 + 3x_6 = 6000 \end{cases} ,x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6}. \qquad (16)$$

Поскольку $\min z = -\max(-z(x))$, то вместо задачи минимизации функции (15) будем решать задачу максимизации функции

$$\tilde{z} = -(0.4x_1 + 1.1x_2 + 1.4x_3 + 0x_4 + 0.3x_5 + 0.6x_6) \qquad (17)$$

при ограничениях (16).

Решать эту задачу будем симплекс-методом. Для нахождения начального плана необходимо выделить единичный базис из матрицы условий

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Матрица не содержит единичных векторов. Однако когда мы первое уравнение ограничений (16) разделим на 2, а третье на 3, то получим эквивалентную систему ограничений:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 400 \\ x_2 + 2x_4 + x_5 = 900 \\ \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 + \frac{2}{3}x_5 + x_6 = 2000 \end{cases} ,x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6} \qquad (18)$$

Матрица условий этой системы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 2/3 & 1 \end{pmatrix}$$

и содержит два единичных вектора $A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $A_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. До единичного базиса нам не хватает одного единичного вектора. Во второе уравнение добавим фиктивную переменную x_7. В результате чего получим M-задачу с одной фиктивной переменной и единичным базисом.

$$\tilde{z} = -0.4x_1 - 1.1x_2 - 1.4x_3 - 0.3x_5 - 0.6x_6 - Mx_7 \to \max . \qquad (19)$$

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 400 \\ x_2 + 2x_4 + x_5 + x_7 = 900 \\ \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 + \frac{2}{3}x_5 + x_6 = 2000 \end{cases} ,\ j = \overline{1,7}. \qquad (20)$$

В качестве единичного базиса возьмем векторы A_1, A_7, A_6. Первоначальный базисный план расширенной задачи будет $\overline{X}^0 = (400,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 2000,\ 900)$.

Запишем первоначальную симплекс-таблицу для полученной M-задачи.

Таблица 7

i	Базис	$C_б$	b	-0.4	-1.1	-1.4	0	-0.3	-0.6	$-M$	Θ
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	
1	A_1	-0.4	400	1	1/2	1/2	0	0	0	0	
2	A_7	$-M$	900	0	1	0	2	1	0	1	450
3	A_6	-0.6	2000	0	0	1/3	1/3	1/3	1	0	6000
4	$\Delta_j = z_j - c_j$		-1360	0	0.9	1	-0.2	0.1	0	0	
5		M	900	0	-1	0	-2	-1	0	0	

В столбцах A_j стоят коэффициенты при x_j из ограничений (20).

Для проверки плана на оптимальность используем критерий оптимальности, который состоит в неотрицательности элементов последних двух строк. Проверяем план $\bar{X}^0$ на оптимальность. Для этого вычисляем оценки Δ_j. Оценки Δ_j находятся следующим методом: перемножаются элементы столбца $C_б$ на соответствующие элементы столбца A_j и их результаты складываются после чего от полученной суммы отнимается величина C_j.

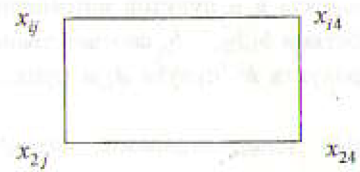
Например, $\Delta_2 = (-0.4)\cdot\frac{1}{2} + (-M)\cdot 1 + (-0.6)\cdot 0 - (-1.1) = 0.9 - M$.

В четвертой строке столбца A_2 записываем 0.9, а в пятой – 1 – коэффициент при M. Вначале проверяем элементы последней строки, т. е. коэффициенты при M. Так как среди оценок Δ_j имеются отрицательные, а именно Δ_2, Δ_4, Δ_5, то план $\bar{X}^0$ неоптимален, и мы должны перейти к новому базисному плану. Среди отрицательных оценок находим наименьшую. Она соответствует столбцу A_4. Этот столбец назовем разрешающим и вектор A_4 введем в новый базис, а далее найдем вектор, который необходимо вывести из базиса.

Для этого вычислим симплексные отношения Θ_i. Элементы столбца b делим на соответствующие положительные элементы столбца A_4 и среди полученных Θ_i находим наименьшее $\Theta_2 = 450$. Вектор A_7, соответствующий Θ_2, выводим из базиса. Строка, соответствующая вектору A_7, называется разрешающей строкой. Элемент, который стоит на пересечении разрешающего столбца и разрешающей строки, называется разрешающим элементом. Разрешающая строка и столбец выделяются толстыми линиями. Напротив их ставятся стрелки, которые показывают, какой вектор надо ввести в базис, а какой вывести.

Построим новую симплекс-таблицу. При построении новой симплекс-таблицы пользуемся следующими правилами: 1) элементы разрешающей строки, начиная со столбца b, делим на разрешающий элемент; 2) вместо элементов разрешающего столбца, кроме разрешающего элемента, пишем нули, а на месте разрешающего элемента – единицу; 3) все остальные элементы x''_{ij}, начиная со столбца b, находим по правилу "прямоугольника". В первоначальной

таблице строим прямоугольник с вершинами в разрешающем элементе, на разрешающей строке и на разрешающем столбце, т. е. x_{ij}, x_{i4}, x_{2j}, x_{24}. Перемножаем элементы x_{2j}, x_{i4}, которые лежат на одной диагонали, результат делим на x_{24} и полученное число отнимем от x_{ij}.



$$x''_{ij} = x_{ij} - \frac{x_{2j}x_{i4}}{x_{24}}.$$

В результате получим новую симплекс-таблицу.

Таблица 8

i	Базис	$C_б$	b	-0.4	-1.1	-1.4	0	-0.3	-0.6	-M
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
1	A_1	-0.4	400	1	1/2	1/2	0	0	0	0
2	A_4	0	450	0	1/2	0	1	1/2	0	1/2
3	A_6	-0.6	1850	0	0	1/3	0	1/3	1	-1/6
4	Δ_j=z_j-c_j		-1270	0	1	1	0	0.2	0	0.1
5	M		0	0	0	0	0	0	0	+1

Элементы симплекс-таблицы вычислялись по вышеуказанным правилам. Например, элемент, который стоит на пересечении третьей строки и столбца b, вычисляется следующим образом:

$$1850 = 2000 - \frac{900\cdot 1/3}{2}.$$

Так как все оценки $\Delta_j \geq 0$, то полученный план $\bar{X}_1 = (400;\ 0,\ 0,\ 450,\ 0,\ 1850,\ 0)$ является оптимальным. Оптимальным планом для исходной задачи является план $X_{опт} = (400;\ 0,\ 0,\ 450,\ 0,\ 1850,\ 0)$.

$$z_{min} = 0.4\cdot 400 + 0\cdot 450 + 0{,}6\cdot 1850 = 1270.$$

3.4. Транспортная задача. Метод потенциалов

Одной из широко распространенных задач линейного программирования является транспортная задача. В общем виде она формулируется следующим образом.

Имеется m предприятий $A_1, A_2, ..., A_m$, на которых производится $a_1, a_2, ..., a_m$ единиц однородного продукта и n пунктов потребления $B_1, B_2, ..., B_n$ этого продукта с потребностями $b_1, b_2, ..., b_n$ соответственно. Стоимость перевозки единицы продукта из пункта A_i в пункт B_j равна C_{ij}.

Требуется найти оптимальный план перевозок, который обеспечивает минимальную стоимость перевозок, позволяет вывезти все грузы из пунктов A_i, $i=\overline{1,m}$ и обеспечивает все потребности пунктов B_j, $j=\overline{1,n}$.

Обозначим через x_{ij} количество груза, которое требуется перевезти из пункта A_i в пункт B_j, тогда суммарная стоимость перевозок запишется в виде линейной функции

$$z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}C_{ij}x_{ij}\,, \tag{21}$$

ограничения по вывозу продукта

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i, \quad i=\overline{1,m}, \tag{22}$$

ограничения по доставке продукта

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j,\ j=\overline{1,n}. \tag{23}$$

Таким образом, математическая модель задачи сводится к минимизации линейной формы (21) при ограничениях (22), (23), естественно полагая, что $x_{ij}\ge 0$.

Известно, что поставленная задача всегда имеет решение, если выполняется условие баланса

$$\sum_{i=1}^{m}a_i=\sum_{j=1}^{n}b_j\,. \tag{24}$$

В этом случае говорят о замкнутой модели транспортной задачи. Если условие баланса (24) не выполняется, то задача называется открытой. Тогда вводят фиктивного поставщика или фиктивного потребителя с нулевыми стоимостями.

Обычно стоимости перевозок C_{ij} записывают в виде матрицы тарифов

$$C=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & & & \\ C_{m1} & C_{m2} & \cdots & C_{mn} \end{pmatrix}, \tag{25}$$

а объемы перевозок x_{ij} – в виде матрицы перевозок

$$X=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & & \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Обычно матрицы тарифов и перевозок объединяют и записывают в виде таблицы планирования.

Решение транспортной задачи состоит из трех основных этапов: 1) нахождение первоначального базисного плана перевозок; 2) проверки плана на оптимальность; 3) процедуры перехода к новому плану в случае неоптимальности. Все решение выполняется в рамках таблицы транспортной задачи.

1 этап. Нахождение первоначального базисного плана перевозок.

Обычно начальный план строится по методу "северо-западного угла" или по методу "минимального элемента".

Метод "северо-западного угла". Сначала заполняют клетки первой строки слева направо, до тех пор пока не будут исчерпаны все запасы a_1, при этом по возможности полностью удовлетворяют потребности b_1, b_2, и т. д.; затем последовательно заполняют клетки второй строки, начиная с того потребителя, которому не хватило запасов a_1, до полного расхода запасов a_2 и т. д.

Метод "минимального элемента". Заполнение таблицы начинается с клетки, стоимость в которой минимальна, и продолжается по возрастанию стоимости, пока все запасы не будут использованы, а потребности удовлетворены.

Клетки, в которых стоят отличные от нуля перевозки x_{ij}, называют загруженными, остальные – свободными.

План, который содержит $m+n$-1 загруженную клетку, называется *невырожденным*.

Базисность плана состоит в его ацикличности, т.е. в матрице планирования нельзя построить цикл, все вершины которого расположены в занятых клетках.

Циклом называется набор клеток матрицы планирования, в котором две соседние клетки расположены в одном столбце или в одной строке, причем последняя клетка находится в той же строке или столбце что и первая.

Если в начальном плане число загруженных клеток меньше, чем $m+n$-1, то полученный план является вырожденным. Тогда, чтобы получить невырожденный план, в свободную клетку (обычно ту, которой соответствует наименьшая стоимость) записывают фиктивные перевозки, равные нулю, и клетка считается загруженной. Причем клетку выбирают так, чтобы полученный невырожденный план был базисным.

2 этап. Проверка на оптимальность.

Проверка плана на оптимальность проводится по методу потенциалов, который применим для невырожденного базисного плана.

Сущность метода потенциалов состоит в следующем. После того как найден начальный невырожденный базисный план перевозок, каждому поставщику A_i ставится в соответствие число U_i, $i=\overline{1,m}$, называемое потенциалом поставщика, а каждому потребителю B_i – число V_j, $j=\overline{1,n}$, называемое потенциалом потребителя.

Числа U_i, V_j определяются из условия, что их сумма для любой загруженной клетки равна стоимости этой клетки:

$$U_i+V_j=C_{ij}, \qquad i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}.$$

Так как чисел U_i, V_j будет $m+n$, а загруженных клеток $m+n$-1, то для нахождения потенциалов мы получаем систему из $m+n$-1 уравнений с $m+n$ неизвестными. В этой системе уравнений на одно меньше, чем неизвестных, поэтому один потенциал можно взять произвольно, например, U_1=0, тогда остальные потенциалы определятся однозначно.

Критерий оптимальности. Если для всех свободных клеток выполняется неравенство

$$\Delta_{ij}=C_{ij}-\left(U_i+V_j\right)\geq 0, \qquad (27)$$

то план оптимален.

Если хотя бы для одной клетки $\Delta_{ij}<0$, то план неоптимален и необходимо перейти к новому плану.

3 этап. Построение нового плана.

Клетки, для которых $\Delta_{ij}<0$, называются перспективными. Среди этих клеток выбираем ту, для которой Δ_{ij} наименьшее. Если таких клеток несколько, то выбираем любую из них и ее загружаем.

Для выбранной перспективной клетки мы должны построить цикл, по которому будем перераспределять груз. Цикл представляет собой замкнутую линию, которая состоит из горизонтальных и вертикальных отрезков, что соединяют середины клеток, из которых первая свободная (перспективная), а все остальные загруженные. Для каждой свободной клетки такой цикл существует, и он единственен. Пункт, в котором изменяется направление контура (с горизонтального на вертикальное и обратно), называется вершиной цикла.

В одной строке или столбце могут находиться две и только две вершины цикла. Пункты самопересечения контура вершинами цикла не являются.

Далее в вершинах цикла поочередно ставятся знаки "+" или "–". В перспективной клетке ставим знак "+", затем, двигаясь по вершинам цикла, ставим поочередно знаки "–" и "+", пока не придем до исходной перспективной клетки.

В клетках, которые помечены знаком "–" находим наименьший груз, который и перемещаем по вершинам цикла, добавляя к объему перевозок x_{ij} в клетках со знаком "+" (включая перспективную) и отнимая в клетках со знаком "–".

Таким образом, мы получим новый план, который будем проверять на оптимальность.

Процесс продолжается до того времени, пока не получится оптимальный план.

Пример 3.

Четыре леспромхоза заготавливают пиломатериалы в объемах: 1 леспромхоз – 300 тыс. м^3; 2 – 400 тыс. м^3; 3 – 300 тыс. м^3; 4 – 400 тыс. м^3, всего 1400 тыс. м^3. Эти пиломатериалы используют четыре лесопильных завода в объемах: 1 завод – 200 тыс. м^3; 2 – 350 тыс. м^3; 3 – 400 тыс. м^3; 4 – 450 тыс. м^3; всего 1400 тыс. м^3. Матрица стоимости перевозок имеет следующий вид:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Составить оптимальный план перевозок, чтобы все пиломатериалы были вывезены, все потребности были удовлетворены и чтобы транспортные затраты были минимальными.

Все исходные данные запишем в виде таблицы транспортной задачи.

В правом верхнем углу клетки (i,j) дается цена перевозки единицы груза C_{ij}, которую назовем стоимостью клетки. Первоначальный план строим методом "минимальной стоимости". В матрице транспортной задачи выбираем наименьший элемент. Он равен единице. Ему соответствуют клетки (4, 1) и (2, 3). Выбираем любую, например (4, 1), и записываем в ней число $\min(200, 400) = 200$; исключаем из рассмотрения первый столбец. В клетку (2, 3) записываем $\min(400, 400) = 400$ и исключаем из рассмотрения второй столбец и вторую строку. Минимальная цена для незаполненных клеток равна 2. Таких клеток будет две: (1, 4) и (4, 2). Записываем в клетку (1, 4) $\min(300, 450) = 300$, а в клетку (4, 2) – $\min(300, 200) = 200$. Остались незаполненными два столбца: второй и

четвертый. Записываем оставшиеся нераспределенные объемы в клетку (3, 2) – 150 тыс. м^3 и в клетку (3, 4) – 150 тыс. м^3.

Так как количество загруженных клеток $6 < 4 + 4 - 1 = 7$, то план вырожденный. Дополним его до невырожденного фиктивной клеткой (1, 3). Понятно, что эта клетка не составляет с другими занятыми клетками цикл. Таким образом, мы получили начальный невырожденный план.

Таблица 9

Леспромхозы A_i	Лесопильные заводы				Запасы a_i	Потен-циалы U_i
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	2	3	0 - 5	300 + 2	300	$U_1 = 0$
A_2	4	2	400 1	3	400	$U_2 = -4$
A_3	3	150 4	+ 3	150 - 5	300	$U_3 = 3$
A_4	200 1	200 2	2	4	400	$U_4 = 1$
Потребности b_j	200	350	400	450	1400	
Потенциалы V_j	$V_1=0$	$V_2=1$	$V_3=5$	$V_4=2$		

Теперь найдем потенциалы. По загруженным клеткам записываем систему уравнений

$U_1 + V_3 = 5;$ $\quad U_3 + V_4 = 5;$

$U_3 + V_2 = 4;$ $\quad U_2 + V_3 = 1;$

$U_4 + V_2 = 2;$ $\quad U_4 + V_1 = 1.$

$U_1 + V_4 = 2;$

Решая эту систему, при условии $U_1=0$ находим потенциалы U_i, V_j и записываем их в соответствующие столбец и строку табл. 9.

Проверим на оптимальность полученный план:

$\Delta_{11} = C_{12} - (U_1 + V_1) = 2 - (0 + 0) = 2 > 0;$

$\Delta_{12} = C_{12} - (U_1 + V_2) = 3 - (0 + 1) = 2 > 0;$

$\Delta_{21} = C_{21} - (U_2 + V_1) = 4 - (-4 + 0) = 8 > 0;$

$\Delta_{22} = C_{22} - (U_2 + V_2) = 2 - (-4 + 1) = 5 > 0;$

$\Delta_{24} = C_{24} - (U_2 + V_4) = 3 - (-4 + 2) + 2 = 5 > 0;$

$\Delta_{31} = C_{31} - (U_3 + V_1) = 3 - (3 + 0) = 0 \geq 0;$

$\Delta_{33} = C_{33} - (U_3 + V_3) = 3 - (3 + 5) = -5 < 0;$

$\Delta_{43} = C_{43} - (U_4 + V_3) = 3 - (1 + 5) = -3 < 0;$

$\Delta_{44} = C_{44} - (U_4 + V_4) = 4 - (1 + 2) = 1 > 0$.

План не является оптимальным, потому что $\Delta_{33} < 0$ и $\Delta_{43} < 0$. $\min(\Delta_{33}; \Delta_{34}) = \min(-5; -3) = -5$ достигается в клетке (3, 3). Для клетки (3, 3) строим цикл с вершинами в клетках (3, 3), (1, 3), (1, 4), (3, 4). Расставим знаки "+" в клетках (3, 3) и (1, 4) и "–" в клетках (1, 3), и (3, 4).

Найдем минимальную перевозку Θ среди клеток с отрицательными знакам и $\Theta = \min(x_{13}, x_{34}) = \min(0, 150) = 0$. Значение Θ запишем в перспективную клетку (3, 3), прибавим к перевозкам в клетку (1, 4) и отнимаем от перевозок клеток (1, 3) и (3, 4). Таким образом, мы получили новую таблицу планирования (табл. 10).

Отметим, что поскольку в цикл с отрицательными вершинами вошла клетка с фиктивными перевозками, то новая матрица планирования практически не изменилась, за исключением того, что клеткой с фиктивными перевозками стала клетка (3, 3) вместо клетки (1, 3).

Новый план проверяем на оптимальность. Находим потенциалы из системы уравнений:

$U_1 + V_4 = 2$; $U_3 + V_4 = 5$;
$U_2 + V_3 = 1$; $U_4 + V_1 = 1$;
$U_3 + V_2 = 4$; $U_4 + V_2 = 2$;
$U_3 + V_3 = 3$; $U_1 = 0$

и записываем в табл. 10.

Таблица 10

Леспромхозы A_i	Лесопильные заводы				Запасы a_i	Потенциалы U_i
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	2	3	5	300 2	300	$U_1=0$
A_2	4	2	400 1	3	400	$U_2=1$
A_3	3	150 4	0 3	150 5	300	$U_3=3$
A_4	200 1	200 2	2	4	400	$U_4=1$
Потребности b_j	200	350	400	450	1400	
Потенциалы V_j	$V_1=0$	$V_2=1$	$V_3=0$	$V_4=2$		

Вычисляем Δ_{ij} для незагруженных клеток.

$\Delta_{12} = 3 - (1 + 0) = 2 > 0$; $\Delta_{31} = 3 - (3 + 0) = 0 \geq 0$;
$\Delta_{13} = 5 - (0 + 0) = 5 > 0$; $\Delta_{43} = 3 - (1 + 0) = 2 > 0$;
$\Delta_{21} = 4 - (1 + 0) = 3 > 0$; $\Delta_{44} = 4 - (1 + 2) = 1 > 0$.
$\Delta_{24} = 3 - (1 + 2) = 0 \geq 0$;

Поскольку все $\Delta_{ij} \geq 0$, то план оптимален.

Матрица оптимальных перевозок имеет вид

$$X_{опт} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 300 \\ 0 & 0 & 400 & 0 \\ 0 & 150 & 0 & 150 \\ 200 & 200 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Транспортные затраты составляют

Z=200·1+150·4+200·2+400·1+ +300·2+150·5 =2950 ден. ед.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 5

Задачи 1.0 – 1.9

Туристическое предприятие может приобрести акции трех компаний: K_1, K_2, K_3. Надежность в течение года для первой компании оценивается экспертами на уровне P_1%, второй – P_2% и третьей – P_3%. Чему равна вероятность того, что: а) только первая компания в течение года станет банкротом; б) любые две компании обанкротятся; в) наступит хотя бы одно банкротство.

Данные приведены в следующей таблице.

№ задач	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9
P_1	90	95	93	97	95	90	92	96	94	92
P_2	85	90	85	83	90	80	82	92	92	80
P_3	80	80	90	92	95	85	87	86	96	90

Задачи 2.0 – 2.9

Строительное предприятие при строительстве жилого дома использует проекты трех типов: П-1, П-2, П-3. Вероятности того, что будет построена квартира повышенной комфортности, для каждого из проектов соответственно равны p_1, p_2, p_3. Вероятности строительства квартиры по каждому из проектов равны. Найти вероятность того, что наудачу выбранная квартира не будет повышенной комфортности.

Данные приведены в следующей таблице.

№ зад.	2.0	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9
p_1	0.95	0.92	0.93	0.97	0.95	0.90	0.96	0.98	0.94	0.92
p_2	0.88	0.86	0.87	0.83	0.91	0.88	0.89	0.97	0.92	0.80
p_3	0.8	0.7	0.9	0.4	0.5	0.8	0.7	0.6	0.7	0.7

Задачи 3.0 – 3.9

У страховой компании имеется N клиентов-автолюбителей. В случае аварии страховая компания выплачивает автолюбителю S денежных единиц. Какую минимальную стоимость страхового взноса следует установить, чтобы вероятность того, что страховая компания к концу года не окажется в убытке, была больше P, если вероятность автолюбителя попасть в аварию в течение года равна p.

Данные приведены в следующей таблице.

№ з.	3.0	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9
N	5000	6000	7000	8000	7000	6000	5000	6000	7000	8000
P	0.95	0.92	0.93	0.91	0.95	0.90	0.92	0.94	0.96	0.92
p	0.008	0.006	0.004	0.003	0.001	0.002	0.004	0.006	0.004	0.002
S	500	700	900	800	600	500	700	600	500	800

Задачи 4.0 – 4.9

В ходе проверки предприятия независимый эксперт случайным образом отбирает K отчетов. При условии, что c % отчетов не содержат ошибок, составьте ряд распределения числа неправильных отчетов, обнаруженных экспертом. Найдите числовые характеристики этого распределения. Запишите функцию распределения и постройте ее график.

Данные приведены в следующей таблице.

№ зад.	4.0	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6	4.7	4.8	4.9
K	5	6	5	7	5	4	6	6	4	5
c	80	85	82	80	90	90	85	90	80	85

Задачи 5.0 – 5.9

Предположим, что в течение года цена на акции некоторой компании есть случайная величина, распределенная по нормальному закону с математическим ожиданием, равным M у. е., и стандартным отклонением, равным 6. Определите вероятность того, что в случайно выбранный день обсуждаемого периода цена за акцию была: а) более S у. е.; б) ниже S у.е. за акцию; в) между d и r у. е. за акцию.

Данные приведены в следующей таблице.

№ зад.	3.0	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9
M	50	60	70	60	70	60	50	60	70	50
d	50	20	30	70	50	90	30	80	40	20
r	80	60	70	80	60	100	40	90	50	80
S	50	70	90	40	50	80	70	60	70	70

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 6

Задача 1

1. Построить гистограмму относительных частот.
2. Найти эмпирическую функцию распределения и построить ее график.
3. Найти числовые характеристики выборки: выборочное среднее, выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение.
4. Найти точечные оценки параметров изучаемого распределения (предполагается, что исследуемая величина имеет нормальное распределение), записать плотность вероятности и функцию распределения.
5. Проверить согласие эмпирической функции распределения с модельной нормальной функцией распределения при помощи критерия χ^2 (Пирсона) (уровень значимости $\alpha = 0,05$).
6. Найти доверительный интервал для математического ожидания (доверительную вероятность принять равной 0,95).

Вар. 0. В результате выборочного наблюдения получены следующие данные о часовой выработке рабочих:

x_i, ч	21–25	25–29	29–33	33–37	37–41
n_i	7	19	42	24	8

Вар. 1. Получены данные о расходе воды (м^3) предприятием на технические нужды на протяжении 100 дней:

x_i, м^3	8–10	10–12	12–14	14–16	16–18
n_i	8	24	36	22	10

Вар. 2. Даны результаты измерения длины бревен (м) хвойных пород, которые поступают на предприятие:

x_i, м	11–12.4	12.4–13.8	13.8–15.2	15.2–16.6	16.6–18.0	18.0–19.4
n_i	4	16	28	32	15	5

Вар. 3. Дано распределение заработной платы (д. ед.) бригады ремонтников за смену:

Зарплата, x_i	16–18	18–20	20–22	22–24	24–26
Число рабочих, n_i	2	4	10	16	8

Вар. 4. Даны результаты измерения величины объема (м^3) первосортной зоны бревен, которые поступают на д/о предприятие:

x_i, м^3	1–2	2–3	3–4	4–5	5–6
n_i	6	23	38	25	8

Вар. 5. Даны результаты наблюдений логарифма заработной платы группы рабочих:

x_i	5.1–5.2	5.2–5.3	5.3–5.4	5.4–5.5	5.5–5.6	5.6–5.7
n_i	4	5	15	17	13	6

Вар. 6. Даны результаты продажи обуви за день в зависимости от размеров:

Размер обуви, x_i	35–36	37–38	39–40	41–42	43–44
n_i	2	4	9	7	3

Вар. 7. На предприятии сделан выборочный опрос работающих о их средней зарплате за предыдущий год. Данные представлены в таблице:

x_i, зарпл.	990–994	994–998	998–1012	1012–1016	1016–1020
n_i	11	19	29	21	20

Вар. 8. Даны зависимости исследования износа основных производственных фондов (опф., %) по 50 предприятиям:

Износ, x_i, %	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80
n_i	10	16	8	10	6

Вар. 9. В таблице приведены статистические данные о трудоемкости операции (в минутах):

x_i, мин	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
n_i	16	48	70	47	19

Задача 2

Даны результаты наблюдений над некоторой двумерной случайной величиной (X,Y).

1. Построить корреляционное поле.
2. Определить средние выборочные значения $\bar{x}$, $\bar{y}$.
3. Определить несмещенную оценку для дисперсий s_x^2, s_y^2.
4. Определить коэффициент корреляции r_{xy}.
5. Найти эмпирическую функцию линейной регрессии X на Y и Y на X; изобразить эти прямые на корреляционном поле.
6. Проверить гипотезу $H_0: r=0$ (принять уровень значимости $\alpha=0.05$).

Вар. 0. В таблице указаны курс акций E и эффективность рынка F на протяжении ряда кварталов:

E \ F	18–20	20–22	22–24	24–26	26–28
20–22	1	–	–	–	–
22–24	3	2	–	1	–
24–26	–	2	2	3	2
26–28	–	–	1	2	1

Вар. 1. В результате исследования зависимости среднегодового перевыполнения нормы y_i(%) от стажа работы x (годы) составлена корреляционная таблица:

y \ x	2	3	4	5	6	7
5	1	1	1	–	–	–
6	2	4	1	–	–	–
7	–	3	10	3	–	–
8	–	–	3	9	2	–
9	–	–	–	2	5	1
10	–	–	–	–	1	1

Вар. 2. Зависимость между суточной выработкой продукции y (т) и величиной основных производственных фондов x (ден. ед.) для совокупности 50 однотипных предприятий приведена в таблице:

y \ x	20–25	25–30	30–35	35–40	40–45
7–11	2	1	–	–	–
11–15	3	6	4	–	–
15–19	–	3	11	7	–
19–23	–	–	2	6	2
23–27	–	–	–	1	2

Вар. 3. Результаты исследования зависимости объема производства x (тыс. м^3) и себестоимости y (ден. ед.) 1 м^3 древесностружечных плит приведены в таблице:

y \ x	20–40	40–60	60–80	80–100	100–120
40–60	2	–	1	–	6
60–80	–	2	2	2	1
80–100	–	1	1	2	–
100–120	–	2	–	–	–
120–140	2	1	–	–	–

Вар. 4. Даны результаты измерения времени непрерывной работы 50 станков y (ч) в зависимости от количества обработанных деталей x:

y \ x	15–25	25–35	35–45	45–55	55–65	65–75
9–15	1	3	–	–	–	–
15–21	1	6	2	1	–	–
21–27	–	2	6	8	4	–
27–33	–	–	1	3	4	2
33–39	–	–	–	–	2	4

Вар. 5. Дано распределение 100 фирм по производственным средствам x (млн. руб.) и по выработке y:

y \ x	10–14	14–18	18–22	22–26	26–30	30–34
15–25	3	4	–	–	–	–
25–35	–	2	6	–	–	–
35–45	–	–	3	50	4	–
45–55	–	–	2	8	6	–
55–65	–	–	–	3	7	2

Вар. 6. Распределение 50 гастрономических магазинов города по уровню издержек обращения x (%) и годовому объему товарооборота y (ден. ед.) представлено в таблице:

y \ x	4–6	6–8	8–10	10–12	12–14
0,5–2,0	–	–	2	3	1
2,0–3,5	–	4	5	1	–
3,5–5,0	–	8	5	5	–
5,0–6,5	3	8	2	–	–
6,5–8,0	2	1	–	–	–

Вар. 7. Даны результаты измерений зависимости между высотой дерева x (см) и его диаметром y (см):

y \ x	50–80	80–110	110–140	140–170	170–200
5–15	5	–	–	–	–
15–25	4	12	–	–	–
25–35	–	8	15	4	–
35–45	–	1	5	7	2
45–55	–	–	–	–	2

Вар. 8. Распределение 60 предприятий химической промышленности по вооруженности труда y (кВт·ч) и фондовооруженности x (ден. ед.) дано в таблице:

y \ x	0–4,5	4,5–9,0	9,0–13,5	13,5–18,0	18,0–22,5
0–1,4	4	1	–	–	–
1,4–2,8	4	2	–	–	–
2,8–4,2	2	8	1	–	–
4,2–5,6	–	1	20	4	–
5,6–7,0	–	–	3	3	3
7,0–8,4	–	–	–	1	3

Вар. 9. Результаты измерений возраста (x) и дневной выработки (y) молодых рабочих приведены в таблице:

y \ x	14–18	18–22	22–26	26–30	30–34
16,5–18,5	2	2	–	–	–
18,5–20,5	3	4	–	–	–
20,5–22,5	–	13	6	3	–
22,5–24,5	–	9	21	13	2
24,5–26,5	–	–	19	29	9
26,5–28,5	–	–	–	8	17

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 7

√ Задача 1

Для сохранения здоровья и работоспособности человек должен в сутки потреблять не менее P_1 усл. ед. белков, не менее P_2 усл. ед. жиров и не менее P_3 усл. ед. углеводов и P_4 минеральных веществ. Для простоты допустим, что имеется всего два вида продуктов $П_1$ и $П_2$; стоимость единицы каждого из них равна соответственно C_1 и C_2 ден. ед. Содержание названных питательных веществ в различных продуктах питания неодинаково. Предположим, что в единице продукта $П_1$ содержится 10 усл. ед. белков, 10 усл. ед. жиров 1 усл. ед. углеводов и 5 P_1 усл. ед. минеральных веществ; а в единице продукта $П_2$ содержится соответственно 3,12,4,8 усл. ед. тех же питательных веществ.

Требуется:

1) составить экономико-математическую модель задачи, позволяющую сформировать из продуктов $П_1, П_2$ суточную диету, которая, с одной стороны, содержала бы белков, жиров, минеральных веществ и углеводов не менее минимальных норм и вместе с тем требовала бы минимальных затрат;
2) решить задачу графическим способом.

Таблица 1

	Номер варианта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P_1	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130
P_2	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70
P_3	48	51	54	57	60	63	66	69	72	75
P_4	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56
C_1	12	14	16	15	16	13	18	19	11	10
C_2	10	11	12	13	14	10	11	12	8	9

Задача 2

На изготовление изделий типа A_1, A_2 и A_3 израсходуются три вида материалов – B_1, B_2, B_3. Количество материала каждого вида, необходимое для изготовления одного изделия любого типа, а также

имеющиеся на складе ресурсы материалов, цена одного изделия каждого типа заданы в таблице. Требуется спланировать выпуск изделий таким образом, чтобы доход от реализации продукции был максимальным.

Таблица 2

№ варианта	Вид материала	Затраты материала на 1 изделие			Ресурсы	Цена 1 изделия (ден. ед.)		
		A_1	A_2	A_3		A_1	A_2	A_3
0	B_1	3	1	1	60	15	30	20
	B_2	–	1	2	50			
	B_3	2	1	4	80			
1	B_1	2	1	1	100	15	25	20
	B_2	1	–	1	40			
	B_3	1	1	2	80			
2	B_1	4	5	4	160	25	10	20
	B_2	2	1	3	60			
	B_3	–	1	3	90			
3	B_1	1	3	2	180	40	60	50
	B_2	2	1	3	180			
	B_3	1	1	2	100			
4	B_1	1	1	2	80	70	80	60
	B_2	3	10	4	600			
	B_3	3	1	7	210			
5	B_1	1	2	1	120	30	20	40
	B_2	3	1	3	150			
	B_3	2	3	4	180			
6	B_1	2	3	3	90	20	40	30
	B_2	1	2	2	100			
	B_3	3	1	3	120			
7	B_1	4	2	5	200	50	30	40
	B_2	–	2	4	160			
	B_3	2	1	3	180			
8	B_1	2	3	3	180	40	50	30
	B_2	4	2	4	200			
	B_3	1	2	3	120			
9	B_1	2	8	4	160	30	50	40
	B_2	1	4	3	120			
	B_3	5	1	3	150			

Задача 3

Коммерческие банки A_1, A_2, A_3, A_4 на различные сроки возврата выделяют кредиты предприятиям B_1, B_2, B_3, B_4 под процент C_{ij} с целью получения для себя максимальной прибыли от процентов. Каждый банк может выделить кредиты в объеме P_i, а каждое предприятие нуждается в кредитах в объеме C_j.

Таблица 3

	Номер варианта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P_1	400	500	600	700	800	800	1000	1100	1000	1300
P_2	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700
P_3	480	510	540	500	600	500	660	690	520	750
P_4	200	240	280	300	360	400	440	480	520	560
C_1	400	400	600	500	600	700	800	900	900	900
C_2	310	100	200	300	400	410	510	800	800	790
C_3	500	500	500	500	500	500	500	500	500	500
C_4	250	700	600	600	800	700	900	900	600	1300
C_{11}	13	10	5	7	10	14	16	10	8	16
C_{12}	10	14	20	15	13	18	8	20	6	14
C_{13}	16	12	10	10	14	10	12	18	24	20
C_{14}	12	14	16	8	8	8	16	13	18	22
C_{21}	16	10	11	12	18	16	15	14	20	22
C_{22}	16	8	6	4	8	12	14	13	11	15
C_{23}	10	12	13	19	16	10	15	10	12	14
C_{24}	12	13	14	15	8	6	10	18	20	21
C_{31}	5	7	14	10	9	6	8	23	22	21
C_{32}	22	24	18	14	12	16	18	12	14	14
C_{33}	16	10	9	8	14	12	10	14	16	20
C_{34}	14	11	12	13	6	7	8	9	16	22
C_{41}	19	17	13	14	12	7	9	9	8	21
C_{42}	12	14	12	13	16	12	18	8	12	5
C_{43}	13	14	15	16	17	13	10	10	12	21
C_{44}	5	6	7	8	9	10	20	18	16	14

Требуется:

1) построить экономико-математическую модель задачи по распределению кредитов банками с целью получения максимальной прибыли от процентов;
2) методом потенциалов найти оптимальное распределение кредитов, максимизирующее общую прибыль, получаемую банками от предприятий;
3) указать предприятия, которые недополучат кредит, и в какой сумме.

Указания к выполнению контрольной работы №7

Так как мы имеем открытую транспортную задачу (сумма выделяемых кредитов банками меньше суммарного объема кредитов для нуждающихся предприятий), то следует ввести фиктивный банк A_5 с объемом кредита, равным разности между суммой кредитов для нуждающихся предприятий и суммой кредитов, выделяемых банками A_1, A_2, A_3, A_4.

Процент прибыли C_{ij} для фиктивного банка принять равным нулю и решать обычную транспортную задачу (см. образец решения транспортной задачи на с. 50–57 настоящего пособия).

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Функция Лапласа $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.00	0.0000	0.70	0.2580	1.40	0.4192	2.20	0.4861
0.05	0.0199	0.75	0.2734	1.45	0.4265	2.30	0.4893
0.10	0.0398	0.80	0.2881	1.50	0.4332	2.40	0.4918
0.15	0.0596	0.85	0.3023	1.55	0.4394	2.50	0.4938
0.20	0.0793	0.90	0.3169	1.60	0.4452	2.60	0.4953
0.25	0.0987	0.95	0.3289	1.65	0.4505	2.70	0.4965
0.30	0.1179	1.00	0.3413	1.70	0.4554	2.80	0.4974
0.35	0.1368	1.05	0.3531	1.75	0.4599	2.90	0.4981
0.40	0.1554	1.10	0.3643	1.80	0.4641	3.00	0.49865
0.45	0.1736	1.15	0.3479	1.85	0.4678	3.20	0.49931
0.50	0.1915	1.20	0.3849	1.90	0.4713	3.40	0.49966
0.55	0.2088	1.25	0.3944	1.95	0.4744	3.60	0.49984
0.60	0.2257	1.30	0.4032	2.00	0.4772	3.80	0.49992
0.65	0.2422	1.35	0.4115	2.10	0.4821	4.00	0.49996

2. Распределение χ^2

Число степеней свободы, ν	Уровень значимости, α			Число степеней свободы, ν	Уровень значимости, α		
	0.01	0.025	0.05		0.01	0.025	0.05
1	2	3	4	5	6	7	8
1	6.6	5.0	3.8	16	32.0	28.8	26.3
2	9.2	7.4	6.0	17	33.4	30.2	27.2
3	11.3	9.4	7.8	18	34.8	31.5	28.9
4	15.1	11.1	9.5	19	36.2	32.9	30.1
5	15.1	12.8	11.1	20	37.6	34.2	31.4
6	16.8	14.4	12.6	21	38.9	35.5	32.7
7	18.5	16.0	14.1	22	40.3	36.8	33.9
8	20.1	17.5	15.5	23	41.6	38.1	35.2
9	217	19.0	16.9	24	43.0	39.4	36.4
10	23.2	20.5	18.3	25	44.3	40.6	37.7
15	30.6	27.5	25.0	30	50.9	47.0	43.8

3. t-распределение Стьюдента

Число степеней свободы, ν	Уровень значимости (двухсторонняя критическая область), α		Число степеней свободы ν	Уровень значимости (двухсторонняя критическая область), α	
	0.10	0.05		0.10	0.05
1	2	3	4	5	6
1	6.31	12.7	17	1.74	2.11
2	2.92	4.30	18	1.73	2.10
3	2.35	3.18	19	1.73	2.09
4	2.13	2.78	20	1.73	2.09
5	2.01	2.57	21	1.72	2.06
6	1.94	2.45	22	1.72	2.07
7	1.89	2.36	23	1.71	2.07
8	1.86	2.31	24	1.71	2.06
9	1.83	2.26	25	1.71	2.06
10	1.81	2.23	26	1.71	2.06
11	1.80	2.20	27	1.71	2.05
12	1.78	2.18	28	1.70	2.05
13	1.77	2.16	29	1.70	2.05
14	1.76	2.14	30	1.70	2.04
15	1.75	2.13	40	1.68	2.02
16	1.75	2.12	60	1.67	2.00
			120	1.66	1.98
ν	0.05	0.025	ν	0.05	0.025
	Уровень значимости (односторонняя критическая область), α			Уровень значимости (односторонняя критическая область), α	

ЛИТЕРАТУРА

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 2001.
2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высш. шк., 1999.
3. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001.
4. Мацкевич И.П., Свирид Г.П. Высшая математика. Теория вероятностей и математическая статистика. – Мн.: Выш. шк., 1993.
5. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Методы оптимизации. – Мн.: БГУ, 1975. – 278 с.
6. Кузнецов А.В., Холод Н.И., Костевич Л.С. Руководство к решению задач по математическому программированию. – Мн.: Выш. шк., 1978. – 256 с.
7. Кузнецов А.В., Сакович В.А., Холод Н.И. Высшая математика. Математическое программирование. – Мн.: Выш. шк., 1994. – 286 с.
8. Сборник задач и упражнений по высшей математике: Математическое программирование / Под общ. ред. А.В. Кузнецова. – Мн.: Выш. шк., 1995. – 382 с.
9. Альсевич В.В., Габасов Р., Глушенков В.С. Оптимизация линейных экономических моделей. Статические задачи. – Мн.: БГУ, 2000. – 210 с.
10. Асмыкович И.К. Математическое программирование и элементы теории игр. – Мн.: БГТУ, 1998. – 40 с.
11. Методическое пособие по разделу "Математическое программирование курса прикладная математика" / В.М. Марченко, В.И. Янович – Мн.: БТИ, 1987. – 62 с.
12. Математические модели и методы в расчетах на ЭВМ / Асмыкович И.К., Горбатович Ж.Н., Игнатенко В.В., Семенкова А.С., Янович В.И. – Мн.: БТИ, 1993. – 41 с.
13. Семянкова А.С. Гарбатовіч Ж.М, Элементы матэматычнай статыстыкі. – Мн.: БТІ, 1992.–60 с.
14. Высшая математика: Учебно-методическое пособие для студентов-заочников химико-технологических и экономических специальностей / Волк А.М., Игнатенко В.В., Яценко А.В. – Мн.: БГТУ, 2003.

СОДЕРЖАНИЕ