

ГРАНИЧНЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ПАРАМЕТРАМИ ДЛЯ ИТЕРАТИВНОГО КОДА С ДИАГОНАЛЬНЫМИ ПРОВЕРКАМИ

Д. М. РОМАНЕНКО

аспирант, 2 курс, кафедра ИиВТ, Белорусский государственный технологический университет, e-mail: rdm@tut.by.

The article are considered the results of the synthesis new type of iterative code: twodimensional line iterative codes. Main operation factors, boundary relations between parameters, error corrections up to 2 multiplicity is analyzed*

ВВЕДЕНИЕ

Проблема повышения надежности передачи информации обусловлена не соответствием между требованиями, предъявляемыми при передаче данных и качеством реальных каналов связи. В сетях передачи данных требуется обеспечить вероятность возникновения ошибки не выше $10^{-6} - 10^{-9}$, а при использовании реальных каналов связи указанная величина приблизительно равна $10^{-2} - 10^{-5}$. Решение проблемы – использование помехоустойчивого кодирования.

1. ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ ЗАЩИТЫ ИНФОРМАЦИИ В СЕТЯХ МЕТОДОМ ИЗБЫТОЧНОГО КОДИРОВАНИЯ

Пусть на какой-то линии посылаются 0 и 1. обычно при посылке 0 принимается также 0, но иногда 0 может быть принят как 1 и 1 принята как 0.

Будем считать, что для каждого символа имеется вероятность p того, что в канале произойдет ошибка. Описанная модель называется двоичным симметричным каналом (рис.1).

Сообщение записано последовательностью из 0 и 1. Мы хотим закодировать это сообщение, чтобы как-то защи-

тить их от ошибок в канале. Блок из k символов сообщения $u=u_1 u_2 u_3 \dots u_k$ ($u_i=0$ или 1) будет кодироваться в кодовое слово $x=x_1 x_2 x_3 \dots x_n$ ($x_i=0$ или 1), где $n \geq k$; эти кодовые слова образуют код (рис.2).

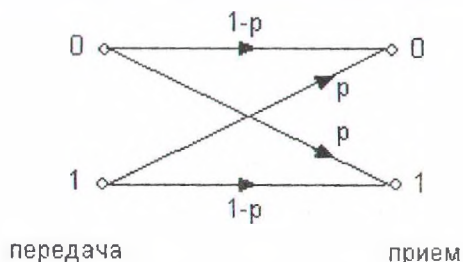


Рис.1. Двоичный симметричный канал с вероятностью ошибки p .

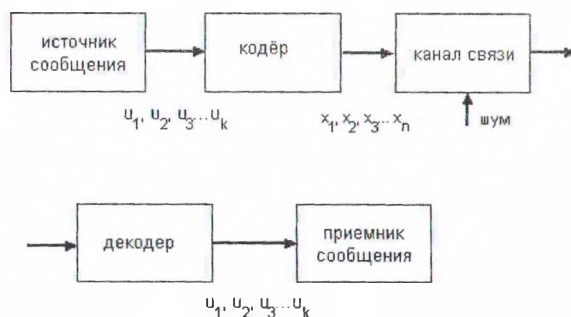


Рис. 2 Схема передачи информации

Первая часть кодового слова состоит из символов самого сообщения:

$$x_1=u_1, x_2=u_2, \dots, x_k=u_k,$$

за которыми следует $n-k$ проверочных символов

$$x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n.$$

* Руководитель: Урбанович П.П., профессор кафедры информатики и вычислительной техники Белорусского государственного технологического университета, ул. Свердлова, 13а

2. ИТЕРАТИВНЫЕ КОДЫ

Итеративный код является одним из простых (с точки зрения аппаратной реализации) избыточных кодов, позволяющих исправлять ошибки в информационных словах. Кодовые слова при его использовании записываются в виде таблицы. Одним из таких кодов является код, содержащий четное (нечетное) число единиц в строках, столбцах и диагоналях – итеративный код с диагональными проверками. Местоположение ошибки находится на пересечении строки, столбца и диагонали с нарушенной четностью (нечетностью). Например, при кодировании информационного слова 011101111 с помощью таблицы с четностью по строкам, столбцам и диагоналям, получим избыточные символы (001, 001, 00001, 1), как показано ниже.

00001				
0	1	1		0
1	0	1		0
1	1	1		1
0	0	1		1

Каждый из проверочных символов является сверткой по модулю два соответствующих строк, столбцов и диагоналей. Данный код относится к так называемым двумерным итеративным кодам, которые являются простейшим примером использования методов комбинирования известных кодов для построения новых и представляет собой прямое произведение прямое простой проверки на четность.

В общем случае определим линейный итеративный код с диагональными проверками (по основанию два) как блочный $(n_1, k_1; n_2, k_2; n_3, k_3)$ - код, формирующий кодовые последовательности длиной k ($k=k_1 \cdot k_2$) и $k_1+k_2+k_3+1$ проверочных разрядов (в приведенном примере $k_1=k_2=3$ и $k_3=5$). Для определенного набора k двоичных символов кодовое слово можно представить в виде $k_1 n_2$ – разрядных кодовых слов строк, $k_2 n_1$ – разрядных кодовых слов столбцов и k_1+k_2-1 кодовых слов диагоналей, разрядность которых изменяется от 2 до

k_1+1 (если $k_1 < k_2$) и k_2+1 (если $k_2 < k_1$) разрядов.

Рассмотрим основные параметры линейного итеративного кода с проверочными символами по диагонали [1].

Принято считать, что кодовое слово $x=x_1, x_2, \dots, x_n$ имеет длину n . Здесь имеется в виду не длина вектора в обычном математическом смысле, а число символов в этом векторе, т.е. его размерность. Если число информационных символов равно k , то число проверочных символов r равно [2]

$$r = 2 \cdot (k_1 + k_2), \quad (1)$$

где, $k=k_1 \cdot k_2$.

Тогда общее число символов будет равно

$$n = 2 \cdot (k_1 + k_2) + k_1 \cdot k_2. \quad (2)$$

Если, $k_1=k_2=k_m$, то

$$n = 4 \cdot k_m + k_m^2. \quad (3)$$

Число k называется размерностью кода [1,2]. Данный вид кода использует n символов для передачи k символов сообщения, поэтому принято считать [1], что код имеет скорость R , равную

$$R = \frac{k}{n} = \frac{k_m}{4 + k_m}. \quad (4)$$

Следующий параметр линейного кода – линейность. Если x и y – кодовые слова данного кода, то $x+y$ – также кодовое слово, так как $H(x+y)^T = Hx^T + Hy^T = 0$. Если c – любой элемент поля, то cx – также кодовое слово, так как $H(cx)^T = cHx^T = 0$. Поэтому эти коды и называются линейными кодами.

Третьим важным параметром кода, кроме длины и размерности, является минимальное расстояние Хемминга между его кодовыми словами [1].

Минимальное кодовое расстояние или просто расстояние кода (d) показывает, что два кодовых слова различаются, по крайней мере, в d позициях, и оно равно:

$$d = \min\{\text{dist}(u, v)\} = \min\{\text{wt}(u-v)\} \quad (5)$$

где, v – некоторый фиксированный вектор ошибки, u – передаваемое сообщение.

Если, u и v принадлежат линейному коду, то $u-v=w$ также является кодовым словом. Следовательно,

$$d = \min\{wt(w)\}, \text{ где } w \neq 0 \quad (6)$$

Теорема 1 [1]. Код с минимальным расстоянием d может исправлять $\lfloor (d-1)/2 \rfloor$ ошибок. Если d четное, то код может одновременно исправлять $(d-2)/2$ и обнаруживать $d/2$ ошибок.

В соответствии с приведенными утверждениями минимальное кодовое расстояние линейного итеративного кода с проверочными символами по диагонали равно 5. Значит, данный код исправляет все двойные и часть тройных ошибок, а также обнаруживает все тройные ошибки. Алгоритмы коррекции ошибок описаны в [2].

Оптимальные размеры матрицы будут достигаться при минимуме величины избыточности r . Для определения оптимального k_1 продифференцируем зависимость $r = f(k_1)$ по k_1 , приравняем полученное выражение к нулю. Решая данное уравнение, получим, что минимум величины избыточности достигается при $k_1 = k/2$. Следовательно, квадратная матрица является оптимальной с точки зрения избыточности для линейного итеративного кода с проверочными символами по диагонали [3].

Таким образом, обычно итеративные коды не отличались высокими корректирующими возможностями. Их достоинством были простота кодирования и декодирования. Однако данный вид итеративного кода интересен именно своими корректирующими возможностями.

3. ГРАНИЧНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ ДЛЯ ИТЕРАТИВНОГО КОДА С ДИАГОНАЛЬНЫМИ ПРОВЕРКАМИ

Одной из важнейших задач построения помехоустойчивых кодов с за-

данными характеристиками является установление соотношения между его способностью обнаруживать или исправлять ошибки и избыточностью. Существуют граничные зависимости, связывающие d , n , k и t (t – кратность корректируемых ошибок).

Граница Хэмминга близка к оптимальной для высоко скоростных кодов.

Ее можно сформулировать как границу избыточности, необходимой при заданных значениях k и t [4]:

$$n - k \geq \log_2 \left[\sum_{i=0}^t C_n^i \right]. \quad (7)$$

Граница Плоткина, которую целесообразно использовать для низкоскоростных кодов имеет следующий вид [4]:

$$d \leq \frac{n \cdot 2^{k-1}}{2^k - 1}. \quad (8)$$

Неравенство (2) удобно для получения максимально возможного d при заданных n и k , но не очень удобны для получения максимального значения k при заданных d и n . Другая форма границы Плоткина записывается в виде [5]

$$k \leq n - 2 \cdot d + 2 + \log_2 d. \quad (9)$$

Согласно границе Варшамова-Гилберта при

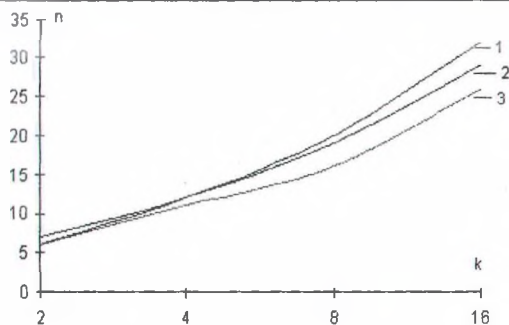
$$2^{n-k} > \sum_{i=0}^{d-2} C_{n-1}^i \quad (10)$$

существует (n, k) – код с кодовым расстоянием, не меньшим d , и с числом проверок на четность, не превышающим $n - k$.

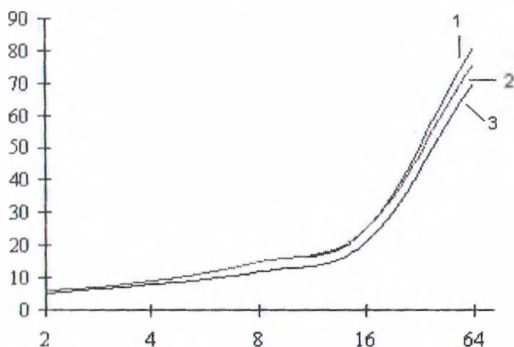
Результаты расчета приведены в табл. 1 (граничные соотношения изучались с параметрами $d=5$ и $t=2$; $n_{\min}$ – граница Хэмминга; $n_{\min}$ – граница Варшамова-Гилберта).

Таблица 1 Граничные значения параметра n

k	$n_{\min}$	n	$n_{\max}$
2	6	6	7
4	11	12	12
8	16	20	19
16	26	32	29
32	43	56	47
64	77	96	82
256	272	320	279

Рис.3. Граничные значения длин кода n для итеративного кода с диагональными проверками

Для сравнения приведем граничные кривые для стандартного итеративного кода (рис.4).

Рис.4. Граничные значения длины кода n для итеративного кода

Таким образом, оба итеративных кода являются совершенными (кривая n кода расположена между кривыми $n_{\min}$ и $n_{\max}$) лишь на определенном интервале k : итеративный

код – при $k < 32$; итеративный код с диагональными проверками – при $k < 16$. Хотя при остальных значениях k с точки зрения избыточности итеративные коды не являются совершенными, но у них всегда было и остается иное достоинство – простота кодирования и декодирования.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе описан разработанный и исследованный новый линейный итеративный код с проверочными символами по диагонали, проанализированы граничные зависимости и приведено достоинство данного кода над обычным линейным итеративным кодом, которое заключается в лучшей корректирующей способности кода, правда, как свидетельствуют рис.1-2, за счет некоторого увеличения избыточности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мак-Вильямс Ф., Слоэн Н. Теория кодов, исправляющих ошибки. Пер. с англ. под ред. Л.А. Басалыго. М: Связь; 1979, – 746с.
2. Урбанович П.П., Романенко Д.М. Свойства и алгоритмы аппаратной реализации нового вида итеративных кодов для систем памяти. Новые информационные технологии: третья международная конференция NITE'2000, т. 2. Мн.: БГЭУ; 2000. – с. 159–164.
3. Урбанович П.П., Алексеев В.Ф., Верниковский Е.А. Избыточность в полупроводниковых интегральных микросхемах памяти. Мн.: Навука і тэхніка; 1995. – 262 с.
4. Кларк Дж., Кейн Дж. Кодирование с исправлением ошибок в системах цифровой связи. М.: Радио и связь; 1987, – 391с.
5. Fujita T., Heegard C., Goodman R. Linear sum codes for random access memories. IEEE Transaction on computers, vol.37, NO.9; September 1988. – p.1030–1041