ВЕСЦІ НАЦЫЯНАЛЬНАЙ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСІ № 1 1999
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 517.444

Л. Д. ГУСАРЕВИЧ

ОБ ИНТЕГРАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ С ДВУМЯ ЯДРАМИ, РАЗРЕШИМОМ С ПОМОЩЬЮ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КОНТОРОВИЧА — ЛЕБЕДЕВА

В настоящей работе дается схема исследования нового класса интегральных уравнений второго рода с двумя ядрами типа свертки Конторовича — Лебедева с достаточными условиями разрешимости.

Рассмотрим уравнение

$$f(t) + (f * m_1)(t) + (f \hat{*} m_2)(t) = g(t), \quad 0 \leqslant t < \infty, \tag{1}$$

в классе функций $L_2(\mathbf{R}_+) \cap L_{\nu,2}(\mathbf{R}_+) \cap L_{\mu,2}(\mathbf{R}_+)$, $1/2 < \nu < 1$, $1 \leqslant \mu < 1 + \varepsilon_0$, $\varepsilon_0 > 0$, где

$$(f * m_1)(t) = \frac{1}{2t} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{ty}{2u} - \frac{yu}{2t} - \frac{ut}{2y}} f(u) m_1(y)\, du dy, \tag{2}$$

$$(f \hat{*} m_2)(t) = \frac{2}{\pi^2 t} \int_0^\infty \tau \operatorname{sh} \pi\tau K_{i\tau}(t) \hat{F}(\tau) K_{i\tau}[m_2]\, d\tau. \tag{3}$$

Функция $\hat{F}(\tau)$ определяется следующим образом:

$$\hat{F}(\tau) = \int_0^\infty \hat{K}(\tau, u) f(u)\, du, \tag{4}$$

где

$$\hat{K}(\tau, u) = \int_0^\infty e^{-u \operatorname{ch} x} \sin \tau x\, dx, \tag{5}$$

а $K_{i\tau}[m_2]$ — преобразование Конторовича — Лебедева функции m_2, которое определим по формуле

$$K_{i\tau}[f] = \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty K_{i\tau}(x) f(x)\, dx, & 0 < \nu < 1, \\ \displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_0^\infty K_{i\tau}(x) f(x) x^\varepsilon dx, & 1 \leqslant \nu < 1 + \varepsilon_0,\ 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0, \end{cases} \tag{6}$$

где $f(x) \in L_{\nu,2}(\mathbf{R}_+)$, $K_{i\tau}(x)$ — функция Макдональда [1].

Через $L_{\nu,2}(\mathbf{R}_+)$ обозначено пространство суммируемых с квадратом функций с весом $x^{2\nu-1}$, норма которого определяется формулой $\|f\|_{\nu,2} = \left(\int_0^\infty x^{2\nu-1} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$. Заметим, что в случае $\nu = 1/2$ пространство $L_{\nu,2}(\mathbf{R}_+)$ совпадает с пространством $L_2(\mathbf{R}_+)$.

Кроме того, предположим, что преобразование Конторовича — Лебедева (6) $M_2(x)$ функции $m_2(t)$ принадлежит классу $L_1(xe^{(\pi-\delta)x};\mathbf{R}_+)$, $0 \leqslant \delta < \pi/2$, и

$$1 + M_1(x) \pm iM_2(x) \neq 0. \tag{7}$$

Свертка (2) для преобразования Конторовича — Лебедева была установлена в работе [2]. Свойства этой свертки подробно исследованы в монографиях [3, 4]. В частности, показано [4], что свертка (2) функций $f(x), g(x) \in L_2(\mathbf{R}_+)$ существует и принадлежит $L_{\nu,2}(\mathbf{R}_+)$, где $\nu > 1/2$. Кроме того, когда $1/2 < \nu < 1$, справедливо факторизационное равенство

$$K_{i\tau}[(f * g)] = K_{i\tau}[f]K_{i\tau}[g] \tag{8}$$

и равенство

$$(f * g)(x) = \frac{2}{\pi^2 x}\int\limits_0^\infty \tau \operatorname{sh}\pi\tau K_{i\tau}(x)K_{i\tau}[f]K_{i\tau}[g]\,d\tau \tag{9}$$

для любого $x > 0$, где интеграл (9) абсолютно сходится.

Заметим, что равенство (9) позволяет определить свертку (2) как обратное преобразование Конторовича — Лебедева [4] функции $K_{i\tau}[f]K_{i\tau}[g]$. Аналогично определено второе ядро (3) как обратное преобразование Конторовича — Лебедева функции $\hat{F}(\tau)K_{i\tau}[g]$.

З а м е ч а н и е. Функцию $\hat{K}(\tau, u)$ можно выразить через известные специальные функции [1, 5] в следующем виде: $\hat{K}(\tau,u) = (e^{-u}/\tau)\,{}_2F_2(1/2, 1; 1-i\tau, 1+\tau; 2u) - \pi[I_{i\tau}(u) + I_{-i\tau}(u)]/(2\operatorname{sh}\pi\tau)$. Используя интегральное представление 2.16.7.9 [6], можем записать $\hat{K}(\tau,u) = \dfrac{e^{-u}\operatorname{th}\pi\tau}{\pi}\times \displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{e^y K_{i\tau}(y)}{y-u}\,du$.

Т е о р е м а 1. *Пусть $f(x) \in L_2(\mathbf{R}_+)$, $G(x)$ — преобразование Конторовича — Лебедева (6) функции $g(y)$ и $G(x) \in L_1(xe^{(\pi-\delta)x};\mathbf{R}_+)$, где $0 \leqslant \delta < \pi/2$. Тогда свертка (3) функций $f(x)$ и $g(x)$ существует и принадлежит $L_{\nu,2}(\mathbf{R}_+)$, где $\nu > 1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся следующей оценкой [4]:

$$|K_{i\tau}(x)| \leqslant e^{-\delta\tau}K_0(x\cos\delta), \quad 0 \leqslant \delta < \pi/2. \tag{10}$$

Предварительно оценив $|\hat{F}(\tau)|$ с помощью неравенства Гёльдера

$$|\hat{F}(\tau)| \leqslant \|f\|_2\left(\int\limits_0^\infty K_0^2(u)\,du\right)^{1/2}, \tag{11}$$

будем иметь $|(f\hat{*}g)(x)| \leqslant C\dfrac{K_0(x\cos\delta)}{x}\|f\|_2\|G\|_{L_1(xe^{(\pi-\delta)x};\mathbf{R}_+)}$, $C > 0$. Тогда при условиях теоремы получим

$$\|f\hat{*}g\|_{\nu,2} = \left(\int\limits_0^\infty x^{2\nu-1}|(f\hat{*}g)(x)|^2 dx\right)^{1/2} \leqslant C\|f\|_2\|G\|_{L_1(xe^{x(\pi-\delta)};\mathbf{R}_+)}\left(\int\limits_0^\infty x^{2\nu-3}K_0^2(x\cos\delta)\,dx\right)^{1/2}.$$

Учитывая асимптотические свойства функции Макдональда [4, 1]

$$K_\nu(x) = O\left(e^{-x}\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\right), \quad x \to +\infty, \tag{12}$$

$$K_\nu(x) = O(x^{-|\Re\nu|}), \quad \nu \neq 0, \qquad K_0(x) = O(\ln x), \quad x \to 0+, \tag{13}$$

можно заключить, что интеграл в правой части последнего неравенства сходится при $\nu > 1$. Теорема доказана.

Лемма 1. *Пусть $f(x) \in L_2(\mathbf{R}_+)$. Тогда преобразование (4) функции $f(x)$ существует и представимо в виде*

$$\hat{F}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} F_s\{\tau; L\{f(x); \operatorname{ch} u\}\}, \tag{14}$$

где F_s — оператор синус-преобразования Фурье, а L — оператор Лапласа от функции $f(x)$, вычисленный в точке $p = \operatorname{ch} u$, кроме того, $\hat{F}(x) \in L_2(\mathbf{R}_+)$.

Доказательство. В силу оценки (11) на основании теоремы Фубини можем поменять порядок интегрирования и получим (14). Применяя обобщенное неравенство Минковского, покажем, что $[Lf](\operatorname{ch} u) \in L_2(\mathbf{R}_+)$. Действительно,

$$\|[Lf](\operatorname{ch} u)\|_2 = \left(\int\limits_0^\infty \left|\int\limits_0^\infty e^{-x \operatorname{ch} u} f(x)\, dx\right|^2 du\right)^{1/2} \leqslant \int\limits_0^\infty |f(x)|\, dx \left(\int\limits_0^\infty e^{-2x \operatorname{ch} u}\, du\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \|f\|_2 \left(\int\limits_0^\infty K_0(2x)\, dx\right)^{1/2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\|f\|_2.$$

Последнее равенство следует из формулы 2.16.2.1 [6]. Далее, исходя из равенства Парсеваля [7] для композиции (14), можем заключить, что $\hat{F}(\tau) \in L_2(\mathbf{R}_+)$. Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть $f(x), g(x) \in L_2(\mathbf{R}_+)$. Тогда преобразование Конторовича — Лебедева (6) свертки (3) существует и справедливо факторизационное равенство*

$$K_{i\tau}[(f \hat{*} g)] = \hat{F}(\tau) K_{i\tau}[g]. \tag{15}$$

Доказательство. Пусть $\exists \varepsilon_0 \colon 1 \leqslant \nu < 1 + \varepsilon_0$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$. Тогда

$$K_{i\tau}[(f \hat{*} g)] = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_0^\infty K_{i\tau}(x) \frac{2}{\pi^2} x^{\varepsilon - 1} \int\limits_0^\infty \mu \sinh \pi\mu K_{i\mu}(x) \hat{F}(\mu) K_{i\mu}[g] d\mu dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_0^\infty \mu \sinh \pi\mu \hat{F}(\mu) K_{i\mu}[g] d\mu \frac{2}{\pi^2} \int\limits_0^\infty K_{i\tau}(x) K_{i\mu}(x) x^{\varepsilon - 1} dx.$$

Изменение порядка интегрирования законно на основании теоремы Фубини в силу абсолютной сходимости последнего интеграла, которую покажем ниже. Вычисляя внутренний интеграл по формуле 2.16.33.2 из [6], после применения формулы дополнения для гамма-функции [5] и разложения полученной дроби на простые дроби, будем иметь

$$K_{i\tau}[(f \hat{*} g)] = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^\infty \operatorname{sgn}\mu \hat{F}(\mu) K_{i\mu}[g] \frac{2^{\varepsilon - 1} \varepsilon \operatorname{sh} \pi\mu}{\pi\tau\Gamma(\varepsilon + 1)(\varepsilon^2 + (\tau - \mu)^2)} \times$$

$$\times \left|\Gamma\left(\frac{\varepsilon + i(\tau + \mu)}{2} + 1, \frac{\varepsilon + i(\tau - \mu)}{2} + 1\right)\right|^2 d\mu - \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^\infty \operatorname{sgn}\mu \hat{F}(\mu) K_{i\mu}[g] \times$$

$$\times \frac{2^{\varepsilon - 1} \varepsilon \operatorname{sh} \pi\mu}{\pi\tau\Gamma(\varepsilon + 1)(\varepsilon^2 + (\tau + \mu)^2)} \left|\Gamma\left(\frac{\varepsilon + i(\tau + \mu)}{2} + 1, \frac{\varepsilon + i(\tau - \mu)}{2} + 1\right)\right|^2 d\mu.$$

Совершив замену переменной $\mu = \tau - \varepsilon t$ в первом интеграле и $\mu = \varepsilon t - \tau$ во втором, в результате несложных преобразований приходим к соотношению

$$K_{i\tau}[(f \hat{*} g)] = \lim_{\varepsilon \to o} \frac{2^\varepsilon}{\pi\Gamma(\varepsilon + 1)} \int\limits_{-\infty}^\infty \frac{\operatorname{sgn}(\tau - \varepsilon t) \hat{F}(\tau - \varepsilon t) K_{i(\tau - \varepsilon t)}[g]}{1 + t^2} \times$$

$$\times\frac{\sinh\pi(\tau-\varepsilon t)}{\pi\tau}\left|\Gamma\left(\frac{\varepsilon+i(2\tau-\varepsilon t)}{2}+1,\frac{\varepsilon+i\varepsilon t}{2}+1\right)\right|^2 dt. \tag{16}$$

Из асимптотической формулы для гамма-функции [5] $|\Gamma(x+iy)|=\sqrt{2\pi}|y|^{x-1/2}e^{-\pi|y|/2}(1+O(1/y))$, $|y|\to\infty$, следует, что при $t\to\infty$ произведение гамма-функций в (16) равно $O\left(|t|^{2+2\varepsilon}e^{-\pi|\tau-\varepsilon t/2|-\pi|\varepsilon t/2|}\right)$, $\tau>0$, $0\leqslant\varepsilon<\varepsilon_0$. Далее, используя формулы (10), (11), лемму 1, можем оценить абсолютную величину подынтегрального выражения в (16) следующим выражением:

$$\frac{C}{\pi\tau}\frac{|t|^{2+2\varepsilon}}{1+t^2}\exp\left(\pi|\tau-\varepsilon t|-\pi\left|\tau-\frac{\varepsilon t}{2}\right|-\pi\left|\varepsilon\frac{t}{2}\right|-\delta|\tau-\varepsilon t|\right),\quad C>0,\ 0\leqslant\delta<\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant\varepsilon<\varepsilon_0,\ \tau>0.$$

Выбираем такое $\delta\in[0,\pi/2)$, чтобы интеграл (16) абсолютно и равномерно по $\varepsilon\geqslant 0$, $\tau\in\mathbf{R}_+$ сходился. Тогда на основании мажорантной теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла [7] будем иметь $K_{i\tau}[(f\hat{*}g)]=\hat{F}(\tau)K_{i\tau}[g]\dfrac{\Gamma(1+i\tau)\Gamma(1-i\tau)}{\pi\tau}\operatorname{sh}\pi\tau\frac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{1+t^2}$. Применяя формулу дополнения для гамма-функции [5], получим (15). Теорема доказана.

Используя свойства сверток (2), (3), теорему 1, формулы (8), (15), применим преобразование Конторовича — Лебедева (6) к уравнению (1) и сведем его к виду

$$F(x)+M_1(x)F(x)+M_2(x)\hat{F}(x)=G(x),\quad -\infty<x<\infty, \tag{17}$$

в классе функций $KL(L_2(\mathbf{R}_+)\cap L_{\nu,2}(\mathbf{R}_+)\cap L_{\mu,2}(\mathbf{R}_+))$, $1/2<\nu<1$, $1\leqslant\mu<1+\varepsilon_0$, $\varepsilon_0>0$ (обозначим (KL)).

В книге [4] описывается область значения

$$KL(L_{\nu,p})=\{g\colon g(\tau)=K_{i\tau}[f],\ f\in L_{\nu,p}(\mathbf{R}_+)\},\quad \nu<1,\ p\geqslant 1, \tag{18}$$

преобразования Конторовича — Лебедева (6) функций пространства $L_{\nu,p}(\mathbf{R}_+)$, $\nu<1$, $p\geqslant 1$. Показано, для того чтобы $g(\tau)\in KL(L_{\nu,p})$, $0<\nu<1$, $1\leqslant p$, необходимо и достаточно, чтобы

$$g(\tau)\in L_r(\mathbf{R}_+),\quad 1\leqslant r\leqslant\infty,\qquad \operatorname*{l.i.m.}_{\varepsilon\to 0+}(I_\varepsilon g)\in L_{\nu,p}(\mathbf{R}_+). \tag{19}$$

Кроме того, формула обращения преобразования Конторовича — Лебедева устанавливается следующим образом:

$$f(x)=\operatorname*{l.i.m.}_{\varepsilon\to 0+}(I_\varepsilon g)(x),\quad x>0, \tag{20}$$

где $(I_\varepsilon g)(x)$ определяется по формуле $(I_\varepsilon g)(x)=\dfrac{2}{\pi^2x^{1-\varepsilon}}\displaystyle\int_0^\infty\tau\operatorname{sh}((\pi-\varepsilon)\tau)K_{i\tau}(x)g(\tau)\,d\tau$, $\varepsilon\in(0,\pi)$ и предел в (19), (20) понимается по норме пространства $L_{\nu,p}(\mathbf{R}_+)$.

Также показано [4], что преобразование Конторовича — Лебедева (6) функций пространства $L_{\nu,p}(\mathbf{R}_+)$, $\nu<1$, $p\geqslant 1$, является бесконечно дифференцируемой функцией и, следовательно, удовлетворяет условию Гёльдера [8] с любым показателем $\lambda\leqslant 1$.

Уравнения (1) и (17) равносильны, так как оператор Конторовича — Лебедева, действующий из пространства $L_2(\mathbf{R}_+)\cap L_{\nu,2}(\mathbf{R}_+)\cap L_{\mu,2}(\mathbf{R}_+)$, $1/2<\nu<1$, $1\leqslant\mu<1+\varepsilon_0$, $\varepsilon_0>0$, в пространство (KL), можно рассматривать как сужение прежнего оператора $K_{i\tau}[f]\colon L_{\nu,2}(\mathbf{R}_+)\to KL(L_{\nu,2}(\mathbf{R}_+))$, $0<\nu<1$, и обратный оператор может быть определен по формуле (20) со сходимостью по норме пространства $L_2(\mathbf{R}_+)$.

Рассмотрим функцию

$$K_{iz}[f]=\int_0^\infty K_{iz}(x)f(x)\,dx. \tag{21}$$

Лемма 2. *Пусть $f(x)\in L_{\nu,2}(\mathbf{R}_+)$, $0<\nu<1$. Тогда $K_{iz}[f]$ — аналитическая функция в полосе $|\operatorname{Im}z|<1-\nu$.*

Доказательство. Покажем, что функция $K_{iz}[f]$ является непрерывно дифференцируемой в полосе $|\mathrm{Im}\, z| < 1-\nu$, а следовательно, и аналитической в этой полосе, т. е. подынтегральная функция в (21) имеет непрерывную производную по параметру и интеграл от нее равномерно сходится.

Используем формулу [4]

$$K_{iz}(x) = \frac{1}{2}\int\limits_{i\delta-\infty}^{i\delta+\infty} e^{-x\cosh\beta + iz\beta}\, d\beta, \quad \delta \in [0, \pi/2). \tag{22}$$

Очевидно, подынтегральная функция в (22) имеет непрерывную производную по z и интеграл от нее равномерно сходится, так как, сделав замену переменной $\beta = u + i\delta$, будем иметь

$$\left|\frac{1}{2}\int\limits_{i\delta-\infty}^{i\delta+\infty} e^{-x\,\mathrm{ch}\,\beta+iz\beta}(i\beta)\, d\beta\right| = \left|\frac{1}{2}\int\limits_{i\delta-\infty}^{i\delta+\infty} e^{-x\,\mathrm{ch}(u+i\delta)+i(\mathrm{Re}\, z+i\mathrm{Im}\, z)(u+i\delta)}(iu-\delta)\, du\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{e^{-\delta\mathrm{Re}\, z}}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x\cos\delta\,\mathrm{ch}\, u - u\mathrm{Im}\, z}\sqrt{u^2+\delta^2}\, du,$$

т. е. $K_{iz}(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция, и справедлива оценка

$$\left|\frac{\partial}{\partial z}K_{iz}(x)\right| \leqslant \frac{1}{2}e^{-\delta|\mathrm{Re}\, z|}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x\cos\delta\,\mathrm{ch}\, u - u\mathrm{Im}\, z}\sqrt{u^2+\delta^2}\, du \tag{23}$$

(можем записать $|\mathrm{Re}\, z|$ в силу четности функции Макдональда [1]).

Оценим следующий интеграл, применяя неравенство Гёльдера, обобщенное неравенство Минковского и оценку (23), когда $f(x) \in L_{\nu,2}(\mathbf{R}_+)$, $0 < \nu < 1$. Получим

$$\left|\int\limits_0^\infty \frac{\partial}{\partial z}K_{iz}(x) f(x)\, dx\right| \leqslant \left(\int\limits_0^\infty \left|\frac{\partial}{\partial z}K_{iz}(x)\right|^2 x^{1-2\nu}\, dx\right)^{1/2} \|f\|_{\nu,2} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_0^\infty x^{1-2\nu}\left|\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x\cos\delta\,\mathrm{ch}\, u - \delta|\mathrm{Re}\, z| - u\mathrm{Im}\, z}\sqrt{u^2+\delta^2}\, du\right|^2 dx\right)^{1/2} \|f\|_{\nu,2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}e^{-\delta|\mathrm{Re}\, z|}\|f\|_{\nu,2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-u\mathrm{Im}\, z}\sqrt{u^2+\delta^2}\, du \left(\int\limits_0^\infty e^{-2x\cos\delta\,\mathrm{ch}\, u} x^{1-2\nu}\, dx\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}e^{-\delta|\mathrm{Re}\, z|}(2\cos\delta)^{\nu-1}\Gamma^{1/2}(2-2\nu)\|f\|_{\nu,2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-u\mathrm{Im}\, z}\,\mathrm{ch}^{\nu-1} u\sqrt{u^2+\delta^2}\, du.$$

Интеграл в последнем равенстве сходится, когда $|\mathrm{Im}\, z| < 1-\nu$. Лемма доказана.

Установим связь интеграла (21) с интегралом типа Коши [8] по действительной оси с плотностью $F(\tau)$, $\tau \in \mathbf{R}$ (мы можем рассматривать интеграл (21) для $\tau \in \mathbf{R}$ в силу четности функции Макдональда). Пусть $f(x) \in L_2(\mathbf{R}_+)$. Тогда будем иметь $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{F(\tau)}{\tau - z}\, d\tau =$ $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\tau}{\tau - z}\int\limits_0^\infty K_{i\tau}(t) f(t)\, dt.$

Воспользовавшись следующим представлением для функции Макдональда [1]: $K_{i\tau}(t) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau u - t\operatorname{ch} u}\,du,\ t > 0$, поменяв порядок интегрирования в полученном повторном интеграле в силу абсолютной сходимости, можем представить интеграл типа Коши в следующем виде:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{F(\tau)}{\tau - z}d\tau = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty} f(t)dt\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-t\operatorname{ch} u}du\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\tau u}}{\tau - z}d\tau + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty} f(t)dt\int\limits_{0}^{\infty} e^{-t\operatorname{ch} u}du\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\tau u}}{\tau - z}d\tau.$$

В зависимости от того, в какой полуплоскости лежит z, будем иметь:

а) пусть $\operatorname{Im} z > 0$. Тогда $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{F(\tau)}{\tau - z}d\tau = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty} f(t)\int\limits_{0}^{\infty} e^{-t\operatorname{ch} u + iuz}dudt$,

б) пусть $\operatorname{Im} z < 0$. Тогда $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{F(\tau)}{\tau - z}d\tau = -\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty} f(t)\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-t\operatorname{ch} u + iuz}dudt$.

Так как интеграл типа Коши представляет собой аналитическую функцию в плоскости с разрезом по действительной оси, тогда функции, определенные по формулам

$$F^{+}(z) = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty} f(t)\int\limits_{0}^{\infty} e^{-t\operatorname{ch} u + iuz}dudt, \tag{24}$$

$$F^{-}(z) = -\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty} f(t)\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-t\operatorname{ch} u + iuz}dudt, \tag{25}$$

будут аналитическими соответственно в верхней и нижней полуплоскостях. Кроме того, можем записать формулы Сохоцкого:

$$F^{+}(x) - F^{-}(x) = F(x), \qquad F^{+}(x) + F^{-}(x) = i\hat{F}(x). \tag{26}$$

Введем следующие классы:

$$(KL)^{+} = \left\{F^{+}(x) = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty} f(t)\int\limits_{0}^{\infty} e^{-t\operatorname{ch} u + iuz}dudt\right\}, \quad (KL)^{-} = \left\{F^{-}(x) = -\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty} f(t)\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-t\operatorname{ch} u + iux}dudt\right\},$$

где $f(t) \in L_2(\mathbf{R}_+) \cap L_{\nu,2}(\mathbf{R}_+) \cap L_{\mu,2}(\mathbf{R}_+),\ 1/2 < \nu < 1,\ 1 \leqslant \mu < 1 + \varepsilon_0,\ \varepsilon_0 > 0$.

Теорема 3. *Для того чтобы заданная на действительной оси функция $F(x)$ из (KL) принадлежала классу $(KL)^{+}$ $((KL)^{-})$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int\limits_{0}^{\infty} f(t)\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-t\operatorname{ch} u + iux}dudt = 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}, \qquad \left(\int\limits_{0}^{\infty} f(t)\int\limits_{0}^{\infty} e^{-t\operatorname{ch} u + iux}dudt = 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}\right). \tag{27}$$

Доказательство. Рассмотрим случай $(KL)^{+}$.

Необходимость. Пусть $F(x)$ принадлежит классу $(KL)^{+}$. Тогда $F(x) = F^{+}(x) = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty} f(t)\times \int\limits_{0}^{\infty} e^{-t\operatorname{ch} u + iux}dudt = \frac{1}{2}F(x) + \frac{i}{2}\hat{F}(x)$. Отсюда имеем: $F(x) = i\hat{F}(x)$, и из второй формулы Сохоцкого (26) следует, что $F^{-}(x) = 0$, т. е. выполняется условие (27).

Достаточность. Если выполняется условие (27), тогда из первой формулы Сохоцкого (26) следует, что $F^+(x) = F(x)$ принадлежит классу $(KL)^+$. Теорема доказана.

Введем кусочно аналитическую функцию, заданную интегралом типа Коши, плотностью которого служит искомое решение уравнения (17):

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\tau)}{\tau - z} d\tau. \tag{28}$$

Согласно формулам (24), (25), предельные значения функции $F(z)$ принадлежат классам $(KL)^+$ и $(KL)^-$. Внося значения $F(x)$ и $\hat{F}(x)$ из (26) в уравнение (17) и решая его относительно $F^+(x)$, получим, что кусочно аналитическая функция $F(z)$ должна являться решением краевой задачи Римана:

$$F^+(x) = D(x)F^-(x) + H(x), \quad -\infty < x < \infty, \tag{29}$$

где

$$D(x) = \frac{1 + M_1(x) + iM_2(x)}{1 + M_1(x) - iM_2(x)}, \quad H(x) = \frac{G(x)}{1 + M_1(x) - iM_2(x)}. \tag{30}$$

Заметим, что функция, представимая интегралом Конторовича — Лебедева, исчезает на бесконечности [4].

Уравнение (17) и задача (29) равносильны в следующим смысле: если $F(z)$, представимая в виде (24), (25), есть общее решение краевой задачи (29), то функция $F(x)$ из (26) есть решение уравнения (17); обратно, если $F(x)$ — общее решение уравнения (17), то интеграл типа Коши (28) есть решение задачи Римана (29), представимое в виде (24), (25).

Краевая задача Римана подробно изучена в [8]. Сформулируем результаты для полуплоскости в классе исчезающих на бесконечности функций.

Если индекс задачи $\varkappa > 0$, то однородная и неоднородная задачи Римана (29) безусловно разрешимы и их решения

$$F(z) = X(z)\left[\Psi(z) + \frac{P_{\varkappa-1}(z)}{(z+i)^{\varkappa}}\right], \tag{31}$$

где $P_{\varkappa-1}(z)$ — произвольный многочлен степени $\varkappa - 1$, зависят от $\varkappa$ произвольных комплексных постоянных. Если $\varkappa \leqslant 0$, то однородная задача имеет лишь нулевое решение, а неоднородная задача при соблюдении $|\varkappa|$ условий

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{H(t)}{X^+(t)} \frac{dt}{(t+i)^m} = 0, \quad m = 1, \dots, |\varkappa|, \tag{32}$$

имеет единственное решение

$$F(z) = X(z)\Psi(z). \tag{33}$$

Учитывая, что выполнено условие нормальности (7), выпишем все необходимые формулы:

$$X^+(z) = e^{\Gamma^+(z)}, \quad X^-(z) = \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{-\varkappa} e^{\Gamma^-(z)}, \tag{34}$$

$$\Gamma^+(z) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty} \gamma(t) \int\limits_0^{\infty} e^{iuz - t\operatorname{ch} u} du dt, \quad \Gamma^-(z) = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty} \gamma(t) \int\limits_{-\infty}^{0} e^{iuz - t\operatorname{ch} u} du dt, \tag{35}$$

$$\gamma(x) = \frac{2}{\pi^2 x}\int\limits_0^{\infty} \tau \operatorname{sh} \pi\tau K_{i\tau}(x) \ln\left[\left(\frac{\tau - i}{\tau + i}\right)^{-\varkappa} D(\tau)\right] d\tau, \tag{36}$$

$$\Psi^+(z) = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \varphi(t) \int\limits_0^\infty e^{iuz - t\,\mathrm{ch}\,u} du dt, \quad \Psi^-(z) = -\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \varphi(t) \int\limits_{-\infty}^0 e^{iuz - t\,\mathrm{ch}\,u} du dt, \tag{37}$$

$$\varphi(x) = \frac{2}{\pi^2 x}\int\limits_0^\infty \tau\,\mathrm{sh}\,\pi\tau K_{i\tau}(x)\frac{H(\tau)}{X^+(\tau)}\,d\tau. \tag{38}$$

Исходя из сказанного выше, можем сформулировать следующий результат исследования.

Теорема 4. *Если индекс* $\kappa = \mathrm{Ind}\,\dfrac{1 + M_1(x) + iM_2(x)}{1 + M_1(x) - iM_2(x)}$ *положителен, то однородное уравнение (1) ($g = 0$) имеет ровно κ линейно независимых решений, а неоднородное уравнение безусловно разрешимо и его решение зависит от κ произвольных комплексных постоянных.*

В случае $\kappa \leqslant 0$ однородное уравнение не имеет отличных от нуля решений. Неоднородное уравнение при $\kappa = 0$ безусловно разрешимо, причем решение единственно. Когда индекс отрицателен, условия (32) необходимы и достаточны для разрешимости неоднородного уравнения.

Во всех случаях, когда решение уравнения (1) существует, его можно найти по формуле

$$f(t) = \frac{2}{\pi^2 t}\int\limits_0^\infty \tau\,\mathrm{sh}\,\pi\tau K_{i\tau}(t)\big(F^+(\tau) - F^-(\tau)\big)\,d\tau, \quad 0 < t < \infty, \tag{39}$$

где $F^+(x), F^-(x)$ — предельные значения построенного по формулам (31), (33) — (38) решения задачи Римана (29) и интеграл в правой части (39) сходится в среднем квадратичном.

Автор выражает признательность научному руководителю С. Б. Якубовичу за постановку задачи и ряд ценных советов и замечаний.

Summary

An integral equation with two convolutions is investigated. It can be reduced to the Riemann boundary value problem by means of the Kontorovich-Lebedev transform. One of the convolution is the Kontorovich-Lebedev. Necessary properties of them are established. The connection between Cauchy's type integral and the Kontorovich-Lebedev integral is obtained.

Литература

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М., 1974.
2. Какичев В. А. // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1967. № 2. С. 48 – 57.
3. Yakubovich S. B., Luchko Yu. F. The Hypergeometric Approach to Integral Transforms and Convolutions (Math. and its Appl. 287). Dordrecht, 1994.
4. Yakubovich S. B. Index Transforms. Singapore, New Yersy, London, Hong Kong, 1996.
5. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М., 1973.
6. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Специальные функции. М., 1983.
7. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1976.
8. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., 1963.

Белорусский государственный университет

Поступила в редакцию 15.05.97