

3. Воронов, В. Е. Проблемы автоматизации технологических процессов и производств / В. Е. Воронов // Международный журнал прикладных наук и технологий «Integral». – 2019, №1. – С. 143–147.

4. Цифровизация электроэнергетики: предлагаемые принципы реализации. – Режим доступа: https://fondsmena.ru/media/EGM_publicationfiles_Article/Цифровизация_электроэнергетики_-_предлагаемый_принципы_реализации._Опадчий_Ф.Ю.pdf. – Дата доступа – 12. 10.2024.

5. Энергоснабжение промышленного предприятия. – Режим доступа: <https://ruzkabel.ru/8-sposobov-kak-obespechit-besperebojnoe-energосnabzhenie-predpriyatiya>. – Дата доступа – 12.10.2024.

УДК 517.977

А.А. Якименко (БГТУ, г. Минск)

МОДАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОДНОЙ ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ СИСТЕМОЙ

Рассмотрим линейную стационарную систему с запаздывающим аргументом с одним входом и двумя соизмеримыми запаздываниями:

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t-h) + A_2x(t-2h) + bu(t), \quad (1)$$

где A_j , $j=0, 1, 2$ – постоянные (2×2) -матрицы; $h > 0$ – постоянное запаздывание; b – постоянный 2-вектор; u – скалярное управление. Не ограничивая общности, можно считать, что $b' = (0 \ 1)$ (штрих $(\cdot)'$ означает транспонирование).

Характеристическое уравнение разомкнутой (с нулевым управлением) системы (1) имеет вид

$$\det[\lambda I_2 - A_0 - A_1e^{-\lambda h} - A_2e^{-2\lambda h}] \equiv \lambda^2 + (\alpha_{10} + \alpha_{11}e^{-\lambda h} + \alpha_{12}e^{-2\lambda h})\lambda + \alpha_{00} + \alpha_{01}e^{-\lambda h} + \alpha_{02}e^{-2\lambda h} + \alpha_{03}e^{-3\lambda h} + \alpha_{04}e^{-4\lambda h} = 0, \quad (2)$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$, $e^{-j\lambda h}$ – оператор сдвига ($e^{-j\lambda h}x(t) \equiv x(t-jh)$).

Присоединим к системе (1) регулятор вида

$$u(t) = \sum_{j=0}^M q'_j x(t-jh) + \int_{-lh}^0 g'(s)x(t+s)ds, \quad (3)$$

где $l, M \in \mathbb{N}$, q_j , $j=0, 1, \dots, M$ – 2-векторы; $g(s)$, $s \in [-h, 0]$ – непрерывная 2-вектор-функция.

В частотной области регулятор (3) имеет вид

$$U(\lambda) = \sum_{j=0}^M q'_j e^{-j\lambda h} + G(\lambda), \quad (4)$$

где $G(\lambda)$ – целая функция, определяющая интегральную часть (3).

Определение. Система (1) модально управляема регулятором вида (3), если для наперед заданных чисел $\tilde{\alpha}_{ij}$, $i=0, j=0, 1, 2, 3, 4$; $i=1, j=0, 1, 2$ найдется такой регулятор, при котором характеристическое уравнение замкнутой системы (1), (3) будет иметь вид (ср. с формулой (2)):

$$\begin{aligned} \det[\lambda I_2 - A_0 - A_1 e^{-\lambda h} - A_2 e^{-2\lambda h} - bU(\lambda)] &\equiv \\ &\equiv \lambda^2 + (\tilde{\alpha}_{10} + \tilde{\alpha}_{11} e^{-\lambda h} + \tilde{\alpha}_{12} e^{-2\lambda h})\lambda + \\ &+ \tilde{\alpha}_{00} + \tilde{\alpha}_{01} e^{-\lambda h} + \tilde{\alpha}_{02} e^{-2\lambda h} + \tilde{\alpha}_{03} e^{-3\lambda h} + \tilde{\alpha}_{04} e^{-4\lambda h} = 0. \end{aligned}$$

Пусть

$$\mu_1 = \tilde{\alpha}_{10} + \tilde{\alpha}_{11} m + \tilde{\alpha}_{12} m^2; \quad (5)$$

$$\mu_2 = \tilde{\alpha}_{00} + \tilde{\alpha}_{01} m + \tilde{\alpha}_{02} m^2 + \tilde{\alpha}_{03} m^3 + \tilde{\alpha}_{04} m^4, \quad (6)$$

где $\tilde{\alpha}_{ij}$, $i=0, j=0, 1, 3, 4$; $i=1, j=0, 1, 2$ – произвольные числа. Тогда система (1), замкнутая регулятором, решающим задачу модального управления, имеет следующее характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + \mu_1 \lambda + \mu_2 = 0. \quad (7)$$

Обозначим $m = e^{-\lambda h}$ – оператор сдвига ($mx(t) = x(t-h)$), $A(m) = A_0 + A_1 m + A_2 m^2$. Не ограничивая общности, можно считать, что матрица $A(m)$ имеет вид

$$A(m) = \begin{bmatrix} a_0 + a_1 m & b_0 + b_1 m + m^2 \\ a_{21}(m) & a_{22}(m) \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} a_{21}(m) &= a_{210} + a_{211} m + a_{212} m^2; \\ a_{22}(m) &= a_{220} + a_{221} m + a_{222} m^2. \end{aligned} \quad (8)$$

В данном докладе рассмотрим случай

$$a_1 = 0. \quad (9)$$

Тогда матрица $A(m)$ примет вид

$$A(m) = \begin{bmatrix} a_0 & b_0 + b_1 m + m^2 \\ a_{21}(m) & a_{22}(m) \end{bmatrix}.$$

Регулятор, решающий задачу модального управления, будем искать в виде

$$U(\lambda, m) = \begin{bmatrix} u_1(\lambda, m) & u_2(\lambda, m) \end{bmatrix} =$$

$$= \left[\eta_{11}(m) - a_{21}(m) \quad \eta_2(\lambda, m) - a_{22}(m) \right], \quad (10)$$

где $\eta_{11}(m)$ – полином относительно m .

Компоненту $\eta_2(\lambda, m)$ регулятора (10) разделим на дифференциально-разностную (ей соответствует некоторый квазиполином) и интегральную части:

$$\eta_2(\lambda, m) = \eta_{21}(m) + \eta_{22}(\lambda, m), \quad (11)$$

где $\eta_{21}(m)$ – полином относительно m ; $\eta_{22}(\lambda, m)$ соответствует интегральной части. Будем искать эту функцию в следующем виде:

$$\eta_{22}(\lambda, m) = (c_1 + c_2 m) \frac{m - k}{\lambda - a_0},$$

где $k = e^{-a_0 h}$; c_1, c_2 – некоторые числа, подлежащие определению. Характеристическое уравнение замкнутой регулятором (10) системы (1) примет вид

$$\begin{vmatrix} a_0 - \lambda & b_0 + b_1 m + m^2 \\ \eta_{11} & \eta_{21} + (c_1 + c_2 m) \frac{m - k}{\lambda - a_0} - \lambda \end{vmatrix} \equiv \\ \equiv \lambda^2 + (-a_0 - \eta_{21})\lambda - b_1 \eta_{11} m + c_2 k m - c_2 m^2 - \\ - \eta_{11} m^2 + \eta_{21} a_0 - \eta_{11} b_0 + c_1 k - c_1 m = 0.$$

Чтобы получить для замкнутой системы характеристическое уравнение (7), выберем в качестве η_{21} следующий квазиполином:

$$\eta_{21} = -a_0 - \mu_1,$$

где μ_1 определен в формуле (5).

Тогда характеристическое уравнение замкнутой системы примет вид

$$\lambda^2 + \mu_1 \lambda - b_1 \eta_{11} m + c_2 k m - c_2 m^2 - \eta_{11} m^2 - a_0^2 - \mu_1 a_0 - b_0 \eta_{11} + c_1 k - c_1 m = 0.$$

Чтобы последнее уравнение имело вид (7), нужно выполнение равенства

$$-b_1 \eta_{11} m + c_2 k m - c_2 m^2 - \eta_{11} m^2 - a_0^2 - \mu_1 a_0 - b_0 \eta_{11} + c_1 k - c_1 m = \mu_2.$$

Выразив отсюда η_{11} , получим

$$\eta_{11} = \frac{-\mu_2 + c_2 k m - c_2 m^2 - a_0^2 - \mu_1 a_0 + c_1 k - c_1 m}{b_0 + b_1 m + m^2}. \quad (12)$$

Последняя дробь, в общем случае, не является полиномом относительно m . Подберем c_1 и c_2 так, чтобы правая часть формулы (12) стала полиномом. Для этого вначале выделим целую часть в (12).

$$\eta_{11} = -c_2 + \frac{b_1 c_2 m + c_2 k m - a_0^2 - \mu_1 a_0 + b_0 c_2 + c_1 k - c_1 m - \mu_2}{b_0 + b_1 m + m^2}.$$

Потребуем, чтобы числитель последней дроби был бы равен нулю. Имеем:

$$\begin{aligned} b_1 c_2 m + c_2 k m - a_0^2 - \mu_1 a_0 + b_0 c_2 + c_1 k - c_1 m - \mu_2 &\equiv \\ \equiv (b_1 c_2 + c_2 k - c_1) m - a_0^2 - \mu_1 a_0 + b_0 c_2 + c_1 k - \mu_2 &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что в качестве c_1 можно взять

$$c_1 = b_1 c_2 + c_2 k. \quad (13)$$

Тогда с учетом соотношения (13)

$$\begin{aligned} b_1 c_2 m + c_2 k m - a_0^2 - \mu_1 a_0 + b_0 c_2 + c_1 k - c_1 m - \mu_2 &\equiv \\ \equiv (b_0 + b_1 k + k^2) c_2 - a_0^2 - a_0 \mu_1 - \mu_2 &= 0. \end{aligned}$$

$$\text{Отсюда} \quad c_2 = \frac{a_0^2 + a_0 \mu_1 + \mu_2}{b_0 + b_1 k + k^2}. \quad (14)$$

Нетрудно увидеть, что для того, чтобы c_2 из формулы (14) было бы полиномом относительно m , необходимо и достаточно выполнения условия

$$b_0 + b_1 k + k^2 \neq 0. \quad (15)$$

$$\text{С учетом того, что } \eta_{22}(\lambda, m) = (c_1 + c_2 m) \frac{m - k}{\lambda - a_0},$$

и принимая во внимание (13), (14), после несложных преобразований получим

$$\eta_{22}(\lambda, m) = \frac{(a_0^2 + \mu_1 a_0 + \mu_2)(m + b_1 + k)}{b_0 + b_1 k + k^2} \frac{m - k}{\lambda - a_0}.$$

Таким образом, с учетом (10) регуляторы в частотной области

$$u_1(\lambda, m) = -\frac{a_0^2 + a_0 \mu_1 + \mu_2}{b_0 + b_1 k + k^2} - a_{21}(m); \quad (16)$$

$$\begin{aligned} u_2(\lambda, m) &= -a_0 - \mu_1 - a_{22}(m) + \\ &+ \frac{(a_0^2 + \mu_1 a_0 + \mu_2)(m + b_1 + k)}{b_0 + b_1 k + k^2} \frac{m - k}{\lambda - a_0} \end{aligned} \quad (17)$$

решают задачу модального управления для системы (1) при выполнении условия (15).

Отсюда видна справедливость следующей теоремы

Теорема. Для того чтобы система (1) была модально управляема регулятором вида (3) в случае (9), необходимо и достаточно выполнения условия (15). При этом регуляторы, решающие задачу модального управления, в частотной области имеют вид (16), (17).