БЕЛОРУССКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ ПОЛИТЕХНИЧЕСКАЯ
АКАДЕМИЯ

УДК 539.3:517.962.1

ДОЛГОВА Татьяна Александровна

РАЗРАБОТКА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ВНЕШНИХ АППРОКСИМАЦИЙ ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

01.02.04 - Механика деформируемого твердого тела.

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Минск 1995

Работа выполнена в Белорусской государственной политехнической академии

Научный руководитель:	кандидат техн. наук, доцент В.П. Апанович,
	доктор техн. наук, профессор В.Д. Цветков
Официальные оппоненты:	доктор физ.-мат.наук, профессор В.Н. Абрашин
	доктор физ.-мат.наук, ст. науч. сотр. И.С. Куликов
Оппонирующая организация:	Институт математического моделирования АН России

Защита состоится "28" декабря 1995 года в 12-00 на заседании совета по защите диссертаций К 056.02.04 в Белорусской государственной политехнической академии 220027, г.Минск, пр.Ф.Скорины, 65, главный корпус, к.201.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Белорусской государственной политехнической академии.

Автореферат разослан 21 ноября 1995 года.

Ученый секретарь доцент Г.Л.Бахмат

2023

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Метод конечных элементов (МКЭ) является мощным и универсальным средством численного решения задач теории упругости.

Полностью автоматизированный подход к прочностным расчетам требует более высокой степени надежности и точности результатов при минимизации затрат на их получение. Поэтому представляется актуальной разработка более совершенных высокоточных и эффективных вариантов МКЭ.

При применении МКЭ для решения трехмерных задач приходится сталкиваться и со специфическими проблемами. К ним относятся :

- "проблема размерности" ,возникающая из-за необходимости введения большого числа степеней свободы;
- проблема постоения конечных элементов (КЭ), обладающих широкими возможностями представления сложной геометрии;
- "проблема точности", т.к. конструкции представляются весьма небольшим набором конечных элементов , что приводит к большим погрешностям вычислений.

Данная работа посвящена развитию нового подхода в МКЭ - методу внешних конечноэлементных аппроксимаций - применительно к решению трехмерных задач теории упругости.

Отличительной особенностью метода внешних конечноэлементных аппроксимаций (МВКА) является построение несогласованных конечных элементов на основе теории внешних аппроксимаций пространств Соболева и вариационных уравнений краевых задач механики. Метод позволяет строить конечные элементы произвольной формы, предоставляет большую свободу выбора аппроксимирующих функций и ведет к значительному сокращению вычислительных затрат.

Имеющееся в настоящее время строгое математическое обоснование сходимости МВКА и указанные возможности практического характера позволяют предположить высокую прикладную эффективность метода в решении трехмерных задач, на что и направлена данная диссертационная работа.

Цель и задачи работы. Цель работы состоит в разработке схемы метода внешних конечноэлементных аппроксимаций применительно к решению трехмерных задач теории упругости и исследование ее прикладной эффективности.

Для достижения поставленной цели потребовалось решить следующие задачи:

- вывести соотношения для построения полиномиальных базисных функций произвольного трехмерного КЭ с плоскими гранями; на основе дискретизированной вариационной задачи теории упругости получить формулы для построения матрицы жесткости и вектора нагрузки этого элемента с учетом граничных условий;
- разработать способ описания геометрии трехмерной модели и схему контроля корректности задаваемой геометрии; разработать эффективный единый алгоритм анализа сложной геометрии трехмерного КЭ с произвольно расположенными плоскими гранями;
- разработать алгоритм расчета по МВКА напряженно-деформируемого состояния трехмерного упругого тела; исследовать эффективность использования предлагаемого КЭ при решении различных трехмерных задач теории упругости и его практическую сходимость в зависимости от различных параметров аппроксимации и степени нерегулярности расчетной области.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту.

Аппроксимация трехкомпонентного вектора перемещений на базе полных пространств полиномов $P_\kappa(u,v,w)$ и $P_s(t_1,t_2)$ с использованием граничных и внутренних степеней свободы.

Теоретическое обоснование вида матрицы жесткости трехмерного несовместного конечного элемента с произвольно расположенными плоскими гранями.

Математические модели для расчета напряженно-деформированного состояния трехмерных упругих тел, основанные на методе внешних конечноэлементных аппроксимаций.

Экспериментальное подтверждение прикладной эффективности разработанного КЭ при решении различных типов задач теории упругости в трехмерной постановке. Исследование влияния порядков аппроксимации и геометрических характеристик конечного элемента на точность вычислений.

Связь работы с крупными научными программами,темами. Диссертационная работа выполнена в рамках тем Т13-133 ФФИ РБ, ГБ 92-54 МО РБ.

Личный вклад соискателя. Все основные результаты выносимой на защиту работы получены соискателем лично.

Научная новизна работы состоит в том, что метод внешних конечноэлементных аппроксимаций впервые применен к решению трехмерных задач механики деформируемого твердого тела.

Для аппроксимации сложной трехмерной геометрии построен и использован новый конечный элемент с произвольно расположенными плоскими гранями. Исследовано влияние различных параметров этого элемента на точность расчета как существенно трехмерных тел, так и областей, близких к двумерным и одномерным.

Практическая и научная значимость работы заключается в дальнейшей разработке схемы метода внешних конечноэлементных аппроксимаций применительно к решению трехмерных задач.

Результаты работы могут быть использованы в организациях, которые занимаются разработкой и использованием систем автоматизированного проектирования массивных и составных конструкций.

Разработана методика построения трехмерного конечного элемента для внешних аппроксимаций вариационных задач теории упругости. Проведено исследование влияния на результаты расчетов порядков внутренней и граничной аппроксимации и степени нерегулярности расчетной области.

Выведенные соотношения и разработанные алгоритмы служат основой для составления программ конечноэлементного расчета. А тщательно проведенное практическое исследование эффективности предлагаемого подхода демонстрирует перспективные возможности таких программ и области их применения.

Экономическая значимость полученных результатов. Применение рассматриваемого КЭ в значительной степени снижает потребность в вычислительных ресурсах, т.к. позволяет проводить расчет комбинированных конструкций на базе единого элемента, аппроксимировать сложную геометрию меньшим числом элементов, проводить простое уточнение результатов и повысить точность расчетов. При этом возможно использование имеющегося программного обеспечения МКЭ (за исключением процедур построения КЭ). Последнее снижает затраты на внедрение разработок диссертации.

Достоверность научных положений и полученных результатов обеспечивается корректным использованием вариационной постановки трехмерной задачи теории упругости в перемещениях; имеющимся строгим математическим доказательством сходимости МВКА и теоретическими оценками точности, а также тщательными исследованиями точности и сходимости полученных численных решений путем сравнения их с точными аналитическими решениями и численными решениями других авторов.

Апробация работы. Основные положения диссертации докладывались и обсуждались на Международной конференции "Колебания и волны в экологии, технологических процессах и диагностике" (Минск,I993); Межреспубликанской научно-практической конференции творческой молодежи "Актуальные проблемы информатики: математическое, программное и информационное обеспечение" (Минск, I992); 47-й научно-технической конференции, посвященной 70-летию Белорусского политехнического иститута (Минск,I992); научно-технических конференциях Белоруской государственной политехнической академии (Минск, I993,I994,I995); молодежной научно-технической конференции "XIX Гагаринские чтения" (Москва,I993); на семинаре кафедры численных методов и программирования Белорусского государственного университета (Минск,I994).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 9 печатных работ.

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы (I33 наименования). Работа изложена на I06 страницах, содержит 3I рисунок, I9 таблиц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована важность и актуальность вопросов, решению которых посвящена диссертация, сформулированы цель и задачи работы, приведены аргументы, подтверждающие научную и практическую значимость полученных результатов, сформулированы основные положения выносимые на защиту .

Первая глава содержит обзор работ, посвященных применению метода конечных элементов для решения трехмерных задач теории упругости. Рассмотрены трудности, возникающие при этом и существующие пути их устранения.

Перспективным направлением МКЭ является построение несовместных элементов, для которых не требуется межэлементная непрерывность аппроксимирующих функций.

Одним из новых подходов в этой области является метод внешних конечноэлементных аппроксимаций (МВКА), строгое математическое обоснование которого дано В.Н.Апановичем.

Рассмотренные в литературе плоские и осесимметричные задачи

и задачи изгиба пластин позволяют охарактеризовать МВКА как метод, который, наряду с сохранением лучших черт класического МКЭ,обладает новыми перспективными возможностями.

Вторая глава посвящена разработке схемы метода внешних конечноэлементных аппроксимаций применительно к решению трехмерных задач теории упругости.

В первом параграфе изложены теоретические основы построения конечного элемента по МВКА, приведены основные определения.

Пространство векторных функций V аппроксимируется некоторым конечномерным пространством X_h,называемым пространством конечных элементов.Классические схемы МКЭ основаны на использовании таких пространств аппроксимирующих функций, для которых X_h является конечномерным подпространством пространства Соболева $X_h \subset V$. Такие аппроксимации называются внутренними.

При внешних аппроксимациях подпространство аппроксимирующих функций строится так, что это включение не выполняется. На межэлементной границе имеет место разрыв аппроксимирующих функций. Функции из X_h должны удовлетворять определенным требованиям, чтобы в пределе при $h \to 0$ (сгущение сетки КЭ или увеличение размерности пространства аппроксимирующих функций) требуемое качество гладкости восстанавливалось т.е. выполнялось $\lim X_h \subset V$,тогда имеет место внешняя аппроксимация.

Решения вариационных уравнений, соответствующих краевым задачам $2m$-ного порядка, ищутся в пространствах Соболева $H^m(\Omega)$.Порядок пространственных задач теории упругости $2m=2$. При этом ($m=I$) имеет место следующая теорема.

Теорема I. Пусть P^K- аппроксимирующее пространство конечного элемента, φ_i ($I \leqslant i \leqslant M$)- линейно независимые на этом пространстве функционалы, определенные соотношением

$$\varphi_i(p) = \int_{\delta K_{r\ell}} g \, p|_K \, d\gamma \, , \qquad (I)$$

где $\delta K_{r\ell}$- гладкий участок грани; g - функции, определенные на границе КЭ; $p|_K$ - сужение функции p на $\delta K_{r\ell}$. Тогда пространство P^K представимо в виде прямой суммы двух подпространств P^Σ и P^z, таких что

$$P_z = \{p \in P^K \mid \varphi_i(p)=0 \, , \; I \leqslant i \leqslant M \} \, ,$$

где P_Σ - некоторое дополнение P_z. В пространстве P_Σ существует базис $\{ p_i^\Sigma \}$, удовлетворяющий условию:

$$\varphi_i(p_k^{\Sigma}) = \begin{cases} I, & i=k \\ 0, & i \neq k \end{cases}.$$

И любой элемент $p \in P^K$ однозначно представим в виде

$$p = \sum_{i=I}^{M} \varphi_i(p)\, p_i^{\Sigma} + \sum_{k=I}^{N-M} b_k(p)\, p_k^{z}, \qquad (2)$$

где $b_k (I \leqslant k \leqslant N-M)$ -коэффициенты называемые внутренними степенями свободы, $\varphi_i\ (I \leqslant i \leqslant M)$ - граничными степенями свободы.

Таким образом, конечный элемент определен, если заданы следующие множества: K - замкнутая непустая область в R^n; P^K - конечномерное пространство определенных на области K функций, отвечающее требованиям линейной независимости набора функционалов $\varphi_i(p)$; G^K - конечномерное пространство граничных аппроксимирующих функций области K ;P_{Σ}-подпространство пространства P^K.

Связный участок δK_r границы элемента $K \subset R^3$,который состоит из гладкого числа участков граней $\delta K_{r\ell}$ (подобластей той же размерности) можно взаимно однозначно и непрерывно отобразить на область K_r евклидова пространства R^2. Область K_r называется поверхностным элементом. На каждом поверхностном элементе необходимо определить пространства $P^K_{r\ell}$ аппроксимирующих функций.

Второй параграф посвящен построению трехмерного конечного элемента теории упругости с произвольно расположенными плоскими гранями. Приводятся доводы в пользу такой геометрии КЭ, обсуждаются вопросы параметризации границ. Однако начальное описание геометрии является недостаточным для дальнейшего вычисления необходимых интегралов. Топологическая информация должна быть дополнена сведениями о том, какая из сторон участка грани является внешней по отношению к определенному КЭ. Автором разработаны подробные алгоритмы построения внешних нормалей к участкам граней произвольного (выпукло-вогнутого) многогранника.

Далее рассматриваются полиномиальные базисы аппроксимации. Базисные функции поверхностных элементов являются полными полиномами δ-ой степени: $\{t_1^{\beta 1} t_2^{\beta 2}\}$, $0 \leqslant \beta I + \beta 2 \leqslant \delta$.

Эти функции порождают граничные степени свободы (I), которые в данном случае примут вид:

$$\varphi_j(u_i) = \int_{\delta K_{r\ell}} t_1^{\beta 1} t_2^{\beta 2} u_i \, d\gamma, \quad i=\overline{I,3}, \quad j = \overline{I,N}, \qquad (3)$$

где N - число элементов базиса. Таким образом,для одного участка грани строится $3N$ граничных степеней свободы.

Пусть пространство аппроксимирующих функций P^K - полное пространство полиномов K-ой степени.Тогда каждая компонента вектора перемещений $u=(u_1,u_2,u_3)$ может быть представлена в виде:

$$u_i = \sum_{|\alpha|=0}^{K} b^i_{\alpha}\, x^{\alpha 1} y^{\alpha 2} z^{\alpha 3}, \qquad i=\overline{I,3} \qquad (4)$$

где $|\alpha| = |\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3|$, b_α - некоторый коэффициент.

Порядки полиномов K и δ называются порядками внутренней и граничной аппроксимации соответственно.

Базис исходного пространстсва P^K алгебраически преобразуется для получения системы базисных функций элемента K. В пространстве конечных элементов X^h создаются базисные функции двух видов: W^{Σ} с областью определения из двух смежных КЭ и W^z, областью определения которой является отдельный КЭ. Тогда при аппроксимации H^1 пространством X^h любой функции $v \in H^1$ ставится в соответствие аппроксимант $v_h \in X_h$, который с учетом (2) имеет вид

$$v_h = \sum_{i=I}^{M} \varphi_i(v)\, W_i^{\Sigma} + \sum_{k=I}^{N-M} a_k(v)\, W_k^{z} \qquad (5)$$

Далее подробно рассмотрен переход от дискретизированной вариационной задачи теории упругости к системе линейных алгебраических уравнений метода конечных элементов. Краевой задаче трехмерной теории упругости эквивалентна вариационная задача отыскания функции u из W, такой что:

$$a(u,v) = f(v) \qquad (6)$$

$\forall v \in W$,где $W = \{ v \in (H^1(\Omega))^3, v|_{\Gamma 1} = 0 \}$,

где ГI - подмножество граничного множества элемента.

Соотношение (6) в развернутой форме имеет вид:

$$\int_{\Omega} \sum_{ij=I}^{3} \sigma_{ij}(u)\, \varepsilon_{ij}(v)\, dx = \int_{\Omega} \sum_{i=I}^{3} f_i v_i \, dx + \int_{\Gamma 2} \sum_{i=I}^{3} g_i v_i \, d\gamma \qquad (7)$$

При решении дискретизированной вариационной задачи рассматривается линейная форма a^h, состоящая из вкладов по всем элементам. Дискретизированное вариационное уравнение должно удовлетворятся для любой базисной функции W_i^{Σ}, W_i^z из X_h, т.е. :

$$\begin{cases} a^h(u_h, W_i^{\Sigma}) = f(W_i^{\Sigma}) \\ a^h(u_h, W_i^{z}) = f(W_i^{z}) \end{cases} \qquad i = \overline{I, \dim X_h} \qquad (8)$$

Система (8) линейных алгебраических уравнений N_h N_h , позволяет найти значения коэффициентов φ_i и b_i разложения (2). Для одного КЭ , в (8) надо подставить выражение (5) для u_h.

Тогда структуру матрицы жесткости элемента определит следующая теорема.

Теорема 2. Пусть базис аппроксимирующего пространства X^h состоит из функций двух видов W^{Σ} и W^{z}, описанных ранее,тогда система линейных алгебраических уравнений для одного КЭ имеет вид:

$$\begin{bmatrix} \Phi_1 & B_1 \\ B_1^T & \Phi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} ,$$

где Φ_1- подматрица с элементами $a_k^h(p_i^z, p_j^z)$, Φ_2- с элементами $a_k^h(p_i^{\Sigma}, p_j^{\Sigma})$, B_1 - с элементами $a_k^h(p_i^z, p_j^{\Sigma})$, φ и b - подвектора граничных и внутренних степеней свободы. Вектор правой части F вычисляется как сумма интегралов в соответствии с (7).

Отметим, что вектор b конденсируется путем стандартной процедуры. Далее, в соответствии с обычной технологией МКЭ, на основе матриц жесткости и векторов правых частей всех элементов разбиения формируется общая разрешающая система уравнений.При ее решении вычисляются значения граничных степеней свободы, а затем находятся значения внутренних степеней свободы. Полученные описанным способом коэффициенты используются для построения аппроксиманта (5) вектора перемещений. Значения напряжений находятся по известным формулам с использованием частных производных базисных функций. Последние, в случае полиномиального базиса, вычисляются по аналитическим формулам.

Автором, на основании (5) и (6) выведены формулы вычисления граничных степеней свободы для формирования базиса элемента. Подробно рассмотрены выражения для них при порядках граничной аппроксимации δ=0,I,2.

Для вычисления граничных степеней свободы и элементов матрицы жесткости необходимы интегралы по поверхности и объему КЭ. В рассматриваемом случае (полиномиальный базис, плоские участки граней) все интегралы вычисляются по точным аналитическим формулам, что исключает значительный источник погрешностей.

Т р е т ь я г л а в а посвящена исследованию практической эффективности метода внешних конечноэлементных аппроксимаций при решении различных задач теории упругости в трехмерной постановке.В качестве модельных (тестовых) рассмотрены хорошо изученные с помощью других подходов задачи, для которых имеются многочисленные результаты. Исследование сходимости метода при решении данных задач проводилось для различных сочетаний порядков внутренней и граничной аппроксимации, при различных разбиениях расчетной области и разной форме КЭ. Проведена оценка эффективности использования трехмерных элементов с плоскими гранями для расчета как масссивных тел, так пластин и стержней, как объектов с прямолинейными границами, так и криволинейных областей.

В задаче об одноосном растяжении параллелепипеда I/4 расчетной области разбивалась на четыре шестигранных элемента. Расчеты проводились для различных значений соотношения толщины и длины стороны параллелепипеда (от 4/5 до I/IO) и порядках аппроксимации K= 2,3,4 и δ=0,I. Полученная погрешность возникающих в пластине напряжений (σ_y=q) не превысила I% от q.

Рассматривались также различные нерегулярные разбиения (рис.I), результаты которых практически совпали с регулярным разбиением. Отметим только, что максимальные межэлементные разрывы, полученые на ребре AA', не превысили 3.5% от значения соответствующей расчетной величины.

Затем рассмотрено НДС консольного параллелепипеда при изгибе. Расчеты по МВКА проводились для пяти вариантов разбиения (рис. 2), при δ=I и K = 2,3,4. Результаты сравнивались с теоретическими, полученными с учетом влияния сдвига. При K = 3 погрешность определения перемещений равна I.25%, для нормальных напряжений она не превосходит I%, для касательных - 5.6% по всем разбиениям (в частности - для модели 5 ,где элементы с невыпуклой областью составляют 2/3 от общего числа КЭ).

Разрешающая система алгебраических уравнений для разбиения I на рис.2 включает всего девять уравнений, когда МКЭ с использованием стандартного 20-узлового шестигранного КЭ достигает той же точности по перемещениям при использовании I64 уравнений.

На этом же примере продемонстрирована высокая устойчивость решения по отношению к искажению, когда отношение длины КЭ к величине его поперечного сечения изменяется от 4 до 40.

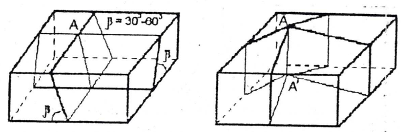


Рис. I Варианты нерегулярного разбиения параллелепипеда

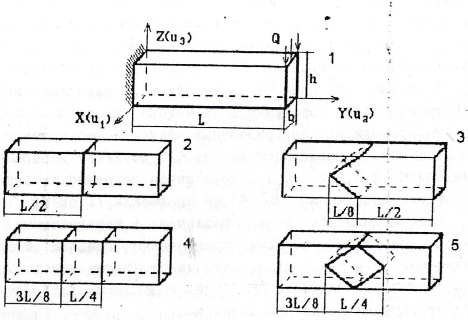


Рис. 2 Варианты разбиения консольного параллелепипеда

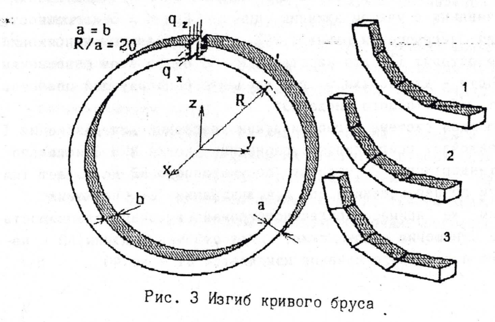


Рис. 3 Изгиб кривого бруса

Для исследования универсальности использования трехмерного КЭ при расчете тонкостенных объектов, проведен расчет изгиба параллелепипеда, у которого один размер существенно меньше других, т.е. рассмотрены задачи изгиба пластин в трехмерной постановке. С одинаковой точностью получены результаты для толстых ($h/a = 5$) и тонких ($h/a = 0.00I$) пластин: погрешность определения перемещений и напряжений не выше 5% при введении 36 степеней свободы. Отметим, что для тонких пластин аналогичные результаты дает использование гибридных элементов изгибаемых пластин, считающихся наилучшими при расчете таких областей .

Для изучения возможности использования элементов с плоскими гранями при моделировании криволинейных областей, были рассмотрены задачи изгиба кругового консольного бруса и толстой кривой пластины (трехмерный аналог задачи Головина).

На рис. 3 представлены различные варианты разбиения четверти бруса на I, 2 и 4 КЭ. Полученные значения перемещений сравнивались с теорией круговых стержней сопротивления материалов. Для четырехэлементного разбиения погрешность составила около 40%, снизившись до 4% при I6 КЭ. Эти результаты приближаются по точности к современным криволинейным цилиндрическим элементам моментальной схемы метода конечных элементов и превосходят другие прямолинейные элементы.

На рис.4 изображены два варианта разбиения половины толстой кривой пластины на шесть КЭ с различной степенью аппроксимации геометрии.При грубой аппроксимации геометрии ошибка определения нормальных напряжений в поперечном сечении составила почти 8% и снизилась до 2.I% при втором варианте разбиения.

В заключение главы рассмотрены задачи о концентрации напряжений при растяжении тонкой и толстой пластины с отверстием (рис. 5). Ширина слоя элементов, прилегающих к отверстию, равнялась его радиусу (в МКЭ обычно не более I/I0 радиуса). Общее количество степеней свободы - 97,ширина ленты матрицы разрешающей системы уравнений - 5I. Ошибка определения коэффициента концентрации напряжения невелика как для тонких, так и для толстых пластин (0.5% - 2.4%).

Полученное значение напряжения σ_z в средних по высоте точках полости с увеличением толщины пластины достигает существенных величин (при $h/z=4.0$ $\sigma_z=0.22$). Это подтверждает необ-

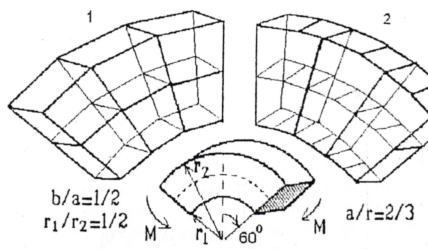


Рис. 4 Изгиб толстой криволинейной пластины

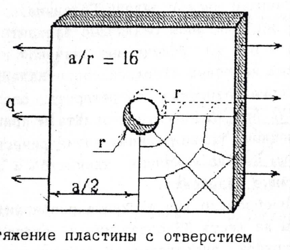
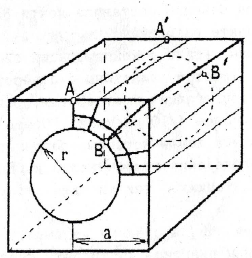


Рис. 5 Растяжение пластины с отверстием



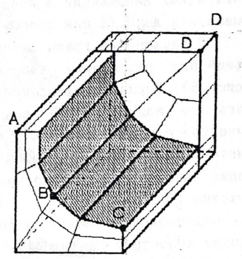


Рис. 6 Элемент трубопровода

Рис. 7 Разбиение I/4 элемента трубопровода с перемычкой

ходимость использования методов, содержащих все компоненты тензора напряжений при оценке прочностных характеристик толстых пластин.

Сравнение результатов с расчетами на основе различных формулировок МКЭ и метода граничных элементов вновь показывет превосходство предлагаемого метода.

Четвертая глава посвящена расчетам элемента трубопровода, имеющего нестандартное поперечное сечение (рис.6) под внутренним давлением.

Первоначально решена задача для стандартного поперечного сечения т.е. был рассмотрен толстостенный цилиндр (задача Ламе). Эта задача имеет аналитическое решение, что позволило оценить погрешность метода при расчете такого класса объектов. Четверть цилиндра разбивалась на 4 КЭ с общим числом степеней свободы равным 36. Исследована точность определения максимальных напряжений, возникающих на внешнем контуре. Ошибка составила I% и 4% для σ_t и σ_r соответственно.

Элемент трубопровода с нестандартным поперечным сечением разбивался при расчетах на 8 КЭ (90 степеней свободы), см.рис.6. Максимальные напряжения возникают на внутренней или на внешней поверхности, в зависимости от ширины перемычки. На рис.8 представлен график изменения напряжений в точках ребра AA' и BB' при изменении внутреннего радиуса по отношению к полудлине стороны поперечного сечения r/a. Для тонких перемычек ($r/a>0.7$) максимальные напряжения возникают на середине стороны внешнего контура; для толстых премычек ($r/a<0.65$) - на контуре отверстия (по линии проведенной через углы). Эти результаты хорошо согласуются с известными экспериментальными данными.

Две следующие модификации расчетной области представляют собой исследованный выше объект с одной перегородкой и с периодической решеткой перегородок при соотношении $r/a=0.8$. Аналогичное для обоих случаев разбиение на I4 КЭ (360 степеней свободы) представлено на рис.7. Расчеты проводились для различных значений длины L элемента трубопровода. Картина изменения напряжений σ в точках A и B в зависимости от длины элемента трубопровода практически одинаковая для обоих случаев. График зависимости отношения $\sigma/\sigma_{ном}$ ($\sigma_{ном}$ - напряжение в элементе трубопровода без перегородок) от нормированной длины элемента трубопровода L/r

представлен на рис.9 Как и следовало ожидать, при достаточно большой величине L (L ≥ 6r) перегородка практически не оказывает влияние на напряжения в противоположном крайнем поперечном сечении,особенно для точек внешнего контура. В случае одной перегородки, напряжения в точках D и D′ (см.рис.7) противоположны по знаку и превосходят напряжения в точке A почти в три раза, напряжения в центре периодических решеток не превысили 5% от значений в точке A.

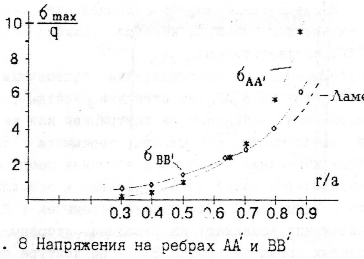


Рис. 8 Напряжения на ребрах AA′ и BB′

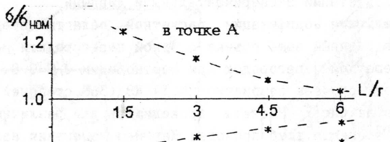


Рис. 9 Напряжения в точках, удаленных от перегородки

В заключении сформулированы основные научные результаты и выводы диссертационной работы:

Метод внешних конечноэлементных аппроксимаций применен к решению трехмерных задач теории упругости.

Разработанная методика позволяет строить произвольный (выпукло-вогнутый) трехмерный конечный элемент для внешних аппроксимаций вариационных задач. На ее основе составлены алгоритм и научно-исследовательская программа для ПЭВМ на языке программирования ФОРТРАН, реализующая расчет напряженно-деформированного состояния трехмерного упругого тела по методу внешних конечноэлементных аппроксимаций.

Полученная оценка эффективности использования предлагаемого конечного элемента свидетельствует о перспективности его применения. В частности:

- в случаях, где успешно используются классические методики построения КЭ, новый подход демонстрирует высокую точность расчета как перемещений так и напряжений при значительно меньших вычислительных затратах;
- возможно использование элемента сложной нестандартной формы и элементов, у которых один или два размера сильно отличаются от остальных, что иллюстрирует широкие возможности метода при расчете комбинированных конструкций из толстостенных и тонкостенных элементов;
- возможна эффективная аппроксимация криволинейных областей многогранными элементами с произвольно расположенными плоскими гранями;
- предлагаемый элемент может служить для расчета существенно трехмерных тел, пластин, оболочек, стержней, областей с концентраторами напряжений на базе единого подхода.

Исследованы некоторые конструктивные варианты трубопровода нестандартной формы. Картины изменения напряжений в зависимости от соотношения геометрических характеристик получены с достаточной точностью при небольших вычислительных затратах.

Основные положения работы изложены в следующих статьях:

1. Долгова Т.А., Напрасников В.В. Разработка математического обеспечения для моделирования сложных корпусных деталей на основе метода внешних конечноэлементных аппроксимаций //Ма-

териалы межреспубликанской научно-практической конференции творческой молодежи "Актуальные проблемы информатики: математическое, программное и информационное обеспечение.-Мн., I992. - с.I96.
2. Долгова Т.А. Вычисление элементов матрицы жесткости для трехмерного конечного элемента одного класса //Материалы 47-й научно-технической конференции, посвященной 70-летию Белорусского политехнического иститута: в 3-х ч.- Мн., I992.- Ч.I.- с. 82.
3. Долгова Т.А. О новом подходе в конечноэлементном анализе сложных конструкций //Колебания и волны в экологии, технологических процессах и диагностике: Тезисы докладов международной конференции.- Мн., I992.- с.54.
4. Долгова Т.А., Апанович В.Н. Использование метода внешних конечноэлементных аппроксимаций для расчетов трехмерного напряженно-деформированного состояния //XIX Гагаринские чтения : Тезисы докладов молодежной научно-технической конференции, апрель I993: в 3-х ч. - МАТИ. М., I993. - Ч.3.- с.70-7I.
5. Апанович В.Н., Долгова Т.А. Практическая сходимость метода внешних конечноэлементных аппроксимаций при решении трехмерных задач теории упругости.- Деп.в ВИНИТИ I7.03.93, N 645-В93
6. Долгова Т.А. Применение метода внешних конечноэлементных аппроксимаций для решения трехмерных задач теории упругости// Материалы 50-й научно-технической конференции профессоров, преподавателей, научн. работников, аспирантов и студентов БГПА: в 2-х ч. - Мн., I994.- с.
7. Апанович В.Н., Долгова Т.А. Метод внешних конечноэлементных апрксимаций в задачах теории упругости//Тезисы докладов XXI научно-технической конференции в рамках "Международной недели науки".-Брест, I994.- с.67-68.
8. Долгова Т.А. Трехмерный конечный элемент метода внешних конечноэлементных аппроксимаций// Тезисы докладов Белорусского конгресса по теоретической и прикладной механике "Механика-95" (Минск, 6-II февраля).-Гомель, I995. с.89-90, 305.
9. Долгова Т.А. Внешние конечноэлементные аппроксимации трехмерных задач теории упругости//Дифференциальные уравнения.-I995, N II.-с.1930-1932.

РЕЗЮМЕ

Долгова Татьяна Александровна

Разработка конечных элементов для внешних аппроксимаций трехмерных задач теории упругости

Ключевые слова: трехмерные задачи, теория упругости, конечный элемент, внешние конечноэлементные аппроксимации, степени свободы, матрица жесткости, перемещения, напряжения.

Метод внешних конечноэлементных аппроксимаций применен к решению трехмерных задач теории упругости.

Впервые построен несовместный конечный элемент, расположение и число граней которого - произвольно.

Выведены соотношения для определения базиса, построения матрицы жесткости и вектора нагрузки этого КЭ.

Разработанная на их основе методика применена для расчета перемещений и напряжений трехмерного упругого тела.

На примере различных типов задач теории упругости продемонстрирована высокая прикладная эффективность предлагаемого подхода.

Результаты могут использоваться при разработке и модификации конечноэлементных программных пакетов в составе систем автоматизированного расчета и проектирования массивных и составных конструкций.

РЭЗЮМЭ

Далгова Таццяна Аляксандраўна

Распрацоўка канчатковых элементаў для знешніх апраксімацый трохвымерных задач тэорыі пругкасці

Ключавыя словы: трохвымерныя задачы, тэорыя пругкасці, канчатковы элемент, знешнія канчатковаэлементныя апраксімацыі, ступені свабоды, матрыца жорсткасці, перамяшчэнне, напруга.

Метад знешніх канчатковаэлементных апраксімацый выкарыстаны для вырашэння трохвымерных задач тэорыі пругкасці.

Упершыню пабудаваны несумесны канчатковы элемент, распалажэнне і колькасць граней якога адвольныя.

Выведзены суадносіны для атрымання базіса, пабудавання мат-

рыцы жорсткасці і вектара нагружэння гэтага КЭ.

Распрацаваная на іх аснове методыка скарыстана для разліку перамяшчэнняў і напругі трохвымернага пругкага цела.

На прыкладзе розных тыпаў задач тэорыі пругкасці прадэманстравана высокая прыкладная эфектыўнасць прапанаванага падыходу.

Вынікі могуць быць выкарыстаны пры распрацоўцы і мадыфікацыі канчатковаэлементных праграмных пакетаў у складзе сістэм аўтаматызаванага разліку і праектавання масіўных і складаных канструкцый.

SUMMARY

Dolgova Tatyana Alexandrovna

Formulation and use of finite elements for external approximations of three-dimensional problems of elastisity.

Key words: three-dimensional problems, elasticity, finite element, external finite-element approximations, degrees of freedom, stiffness, displasements, stresses.

Method of external finite-element approximations is applied to three-dimensional problems of elasticity.

In the thesis an incompatible convex-concave finite element is built, in which face arrangement and fase number are variable. That is formulated for the first time.

Basic functions, stiffness and element load are determined. An algorithm for calculating three-dimensional elastic displacements and stresses is presented.

Various tests in elasticity calculated by the author show superior character and high accuracy of computation.

Results obtained can be effectively used in computer-aided engineering for developing and modifying finite element program packets.

ДОЛГОВА Татьяна Александровна

РАЗРАБОТКА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ВНЕШНИХ АППРОКСИМАЦИЙ ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

01.02.04 - Механика деформируемого твердого тела

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Корректор Ничипорук А.С.

Подписано в печать 20.10.95

Формат 60х84 1/16. Бумага тип. №2. Офсет. печать.

Усл.печ.л.1,0. Уч.-изд.0,9. Тир.100.Зак.107

Отпечатано на ротапринте ГП Минсктиппроект.

220123.Минск,ул.Хоружей 13/61