

УДК 51-77

А. А. Якименко, кандидат физико-математических наук, доцент (БГТУ)

### ПРИМЕНЕНИЕ ПРОГРАММНЫХ СРЕДСТВ В ПРОЦЕССЕ ПРЕПОДАВАНИЯ КУРСА «ЭКОНОМЕТРИКА И ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ»

Рассматриваются вопросы применения программных средств в процессе преподавания курса «Эконометрика и экономико-математические методы и модели» для студентов инженерно-экономического факультета специальности «Менеджмент». Для каждого раздела данного курса указываются возможные проблемы и предлагаются способы их решения в различных программных средах.

For engineering and economics faculty students specializing in management, we analyze the mathematical and software tools teaching support of the course «Econometrics end Economic-Mathematical Methods and Models». For each section of the course, problems arising during study and solutions of the problems are given by using a variety of software tools.

**Введение.** Курс «Эконометрика и экономико-математические методы и модели» (ЭиЭММ) изучается студентами второго курса специальности «Менеджмент» инженерно-экономического факультета. Математические дисциплины, которые при этом используются, весьма разнообразны. Это, например, математическая статистика, математическое программирование, динамическое программирование, теория игр, теория систем массового обслуживания и др. Ясно, что глубоко изучить представленные дисциплины за плановые 68 часов аудиторной работы (34 часа лекций, 26 часов практических занятий и 8 часов лабораторных занятий) не представляется возможным. Существенную помощь в усвоении материала курса могут оказать и оказывают различные программные средства, которые «берут» на себя не только вычислительные сложности при решении задач, но и помогают в усвоении теоретического материала.

Ниже приводится краткое описание методического обеспечения курса ЭиЭММ в соответствии с внедряемой на кафедре высшей математики БГТУ уровневой технологией преподавания математических дисциплин [1].

**Основная часть.** Изучение курса ЭиЭММ начинается с эконометрики. Эконометрика – это наука, объединяющая совокупность математико-статистических методов, которые позволяют дать количественное выражение взаимосвязей экономических явлений и процессов. На кафедре разработано учебное пособие по эконометрике [2], где в «уровневом» изложении даны основные теоретические сведения, предложена тематика и примеры решения основных практических задач и задач для лабораторных занятий. Теоретические сведения и задания уровня А являются обязательным для усвоения материалом, без которого нельзя получить «положительную» оценку или зачет. Задания уровня В и С нужны для более глубо-

кого усвоения материала курса, что позволит, во-первых, претендовать на «хорошие» и «отличные» оценки, а во-вторых, что более важно, применять полученные знания при изучении других предметов и в дальнейшей деятельности при моделировании задач (технологических процессов) по избранной специальности.

После того как даны основные понятия и определения эконометрики, рассматриваются элементы корреляционно-регрессионного анализа. Вначале рассматривается простейшая теоретическая линейная регрессионная однофакторная модель:

$$\bar{Y}_x = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon,$$

где  $\bar{Y}_x$  – условная средняя, то есть значение объясняемой переменной  $Y$  при условии, что объясняющая переменная (фактор)  $X$  приняла значение, равное  $x$ ;  $\beta_0$ ,  $\beta_1$  – теоретические коэффициенты регрессии;  $\varepsilon$  – случайная ошибка. Требуется по выборке  $(x_i, y_i)$ ,  $i = \overline{1, n}$  найти точечные оценки теоретических коэффициентов регрессии  $b_0, b_1$ . Эти оценки могут быть получены по методу наименьших квадратов как решение системы нормальных (линейных алгебраических) уравнений:

$$\begin{cases} nb_0 + \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) b_1 = \sum_{i=1}^n y_i, \\ \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) b_0 + \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) b_1 = \sum_{i=1}^n x_i y_i. \end{cases} \quad (1)$$

Нахождение коэффициентов и решение системы (1) при небольшом объеме выборки  $n$  может быть получено вручную. Если же объем выборки достаточно большой, решать систему (1) удобнее при помощи ЭВМ. На лабораторных занятиях применяется программа Excel,

входящая в Microsoft Office. При этом можно просто ввести в соответствующие ячейки нужные формулы и получить решение с помощью обратной матрицы. Если же воспользоваться инструментом анализа данных в Excel «Регрессия», то помимо решения системы (1) можно получить много дополнительных статистик, таких как  $t$ -статистики для коэффициентов регрессии,  $F$ -статистику для уравнения в целом, коэффициент детерминации и др. Эти дополнительные статистики позволяют оценить при заданном уровне значимости статистическую значимость полученных коэффициентов линейной регрессии и уравнения в целом. Кроме того, с помощью Excel можно установить точность модели, найдя средние абсолютную и относительную ошибки аппроксимации, а также проанализировав дисперсию ряда остатков.

Полученные точечные оценки  $b_0, b_1$  теоретических коэффициентов регрессии должны быть несмещенными, состоятельными и эффективными. Это требование будет выполнено, если выполняются предпосылки метода наименьших квадратов или имеют место условия теоремы Гаусса – Маркова. Проверка этих условий достаточно сложна. При невыполнении каких-либо условий теоремы Гаусса – Маркова некоторые из свойств несмещенности, состоятельности или эффективности теряются. В самой модели при этом будет иметь место автокорреляция либо гетероскедастичность. Для обнаружения автокорреляции можно применить тест Дарбина – Уотсона. Для того чтобы установить гетероскедастичность, можно применить тест ранговой корреляции Спирмена, тест Парка и др. Для устранения этих проблем можно попробовать изменить саму модель (например, включить какой-либо дополнительный фактор) либо модифицировать метод наименьших квадратов (например, применить метод взвешенных наименьших квадратов). На практических и лабораторных занятиях анализ применимости метода наименьших квадратов обычно не производится, а лишь констатируется адекватность или неадекватность модели, ее точность и статистическая значимость коэффициентов. Для более точного анализа регрессионной модели можно применить более специализированное программное обеспечение, например пакет Statistica.

Далее в курсе эконометрики исследуются многофакторные линейные регрессионные модели, условия применимости метода наименьших квадратов для нахождения коэффициентов регрессии будут те же. Однако в силу того, что система нормальных уравнений имеет большую размерность, чем в случае одного фактора, такие модели рассматриваются только на лабо-

раторных занятиях с применением инструментов анализа данных в Excel «Регрессия», «Корреляция». Кроме перечисленных выше проблем для однофакторной модели, в многофакторных применимость метода наименьших квадратов может ограничиваться тесной линейной связью между факторами, или мультиколлинеарностью. В лабораторной работе, посвященной многофакторной регрессионной модели, показывается, как с помощью инструмента анализа данных в Excel «Регрессия» обнаружить наличие мультиколлинеарности: зависимость между двумя факторами  $x_i$  и  $x_j$  признается тесной, если парный коэффициент корреляции между этими факторами  $|r_{x_i x_j}| > 0,8$ . Устранить мультиколлинеарность можно, например, удалением из модели одного из тесно связанных друг с другом факторов. Удалить можно тот фактор,  $t$ -статистика коэффициента регрессии при котором меньше по модулю.

Далее следует изучение систем одновременных уравнений. Это системы линейных регрессионных уравнений, в которых объясняемые (эндогенные) переменные одних уравнений входят в другие уравнения системы в качестве факторов (экзогенных переменных). Для того чтобы применить для нахождения точечных оценок параметров этой системы метод наименьших квадратов, необходимо вначале перейти от исходной системы (ее еще называют структурной формой модели) к системе, в которой эндогенные переменные отсутствуют в правых частях системы (такую систему называют приведенной формой модели). Такой переход нужен потому, что оценки параметров структурной формы модели, найденные по методу наименьших квадратов, будут смещенными и несостоятельными (нарушаются условия теоремы Гаусса – Маркова). Оценки параметров приведенной формы модели ищутся по методу наименьших квадратов. Для того чтобы по этим оценкам однозначно получить оценки структурной формы модели, система должна быть идентифицируемой. Условия идентифицируемости системы одновременных уравнений достаточно простые и для систем небольшой размерности могут быть проверены вручную. Однако даже в таких случаях системы нормальных уравнений для нахождения точечных оценок параметров системы в приведенной форме лучше решать с помощью ЭВМ, например в Excel.

Далее в курсе ЭиЭММ изучаются различные линейные экономико-математические модели. Такие модели приводят к задачам линей-

ного программирования (в прямой и двойственной формах), транспортным задачам (классическим и с различными усложнениями в постановке). Такие задачи на практических занятиях решаются вручную (геометрически, табличным симплекс-методом, методом потенциалов). Однако такое решение, как правило, трудоемко. Гораздо быстрее решение можно получить с помощью Excel, применив инструмент поиска решения. Этому посвящена одна из лабораторных работ курса.

Задачи, решаемые с помощью метода динамического программирования, который рассматривается далее (такие как задача нахождения кратчайшего пути на транспортной сети и задача об оптимальном распределении ресурсов), не требуют применения ЭВМ и решаются вручную. Но это не мешает, при наличии определенных навыков, запрограммировать алгоритм их решения в какой-либо программной среде, что представляется целесообразным.

Модели межотраслевого баланса, а точнее модель «затраты – выпуск» Леонтьева, рассматриваемая далее, описываются по существу матричным уравнением. Анализ и решение такого уравнения, а также составление балансовых таблиц также целесообразно выполнить в Excel.

После моделей межотраслевого баланса рассматриваются экономико-математические модели конфликтных ситуаций. Они сводятся к различным моделям теории парных матричных игр с нулевой суммой. Решение матричной игры в чистых стратегиях легко найти вручную. Если же игра не имеет решения в чистых стратегиях, то ее решение в смешанных стратегиях можно найти с помощью решения вспомогательной задачи линейного программирования. Такое решение студенты уже научились находить в предыдущих разделах курса. Далее рассматриваются статистические игры. Критерии, по которым находят решения таких игр, не сложны и не требуют применения ЭВМ.

Следующий раздел курса – это математические модели сетевого планирования и управления. Временные параметры сетевого графика выполнения работ, такие как критическое вре-

мя, ранние и поздние сроки свершения событий, различные резервы времени работ, несложно найти вручную, предварительно упорядочивание сетевого графика. Немного сложнее провести оптимизацию графика работ с учетом имеющихся в наличии трудовых ресурсов. Ее также обычно проводят вручную, однако при наличии определенных навыков и эту задачу можно запрограммировать в какой-либо программной среде.

Модели массового обслуживания достаточно сложны для анализа. Система уравнений Колмогорова, которая возникает при этом, может быть решена в математическом пакете с символьными вычислениями, например в Matlab, Maple. Для подсчета различных характеристик конкретных систем массового обслуживания, таких как одноканальные и многоканальные системы, системы с ограниченной и неограниченной очередью, достаточно применить известные формулы, что предлагается сделать вручную или в Excel.

В моделях управления запасами, завершающих курс ЭиЭММ, при различных дополнительных предположениях известны формулы, в которых объем вычислений не очень велик, что позволяет решать такие задачи без привлечения ЭВМ.

**Заключение.** В статье проведен анализ всего курса ЭиЭММ в разрезе необходимости и возможности использования различных программных средств. Для каждого из разделов курса даны рекомендации по использованию конкретных программных продуктов.

### Литература

1. Марченко, В. М. Уровневая технология преподавания высшей математики в вузе / В. М. Марченко, И. М. Борковская, О. Н. Пыжкова // Труды БГТУ. Сер. VIII, Учеб.-метод. работа. – 2009. – Вып. X. – С. 98–107.
2. Марченко, В. М. Эконометрика и экономико-математические методы и модели: учеб. пособие: в 2 ч. / В. М. Марченко, Н. П. Можей, Е. А. Шинкевич. – Минск: БГТУ, 2011. – Ч. 1. Эконометрика. – 157 с.

*Поступила 02.04.2012*