

УДК 514.765.1

Н. П. Можей

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

РЕДУКТИВНЫЕ ПРОСТРАНСТВА С РАЗРЕШИМОЙ ГРУППОЙ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ, НЕ ДОПУСКАЮЩИЕ ЭКВИАФФИННЫХ СВЯЗНОСТЕЙ

Во введении указан объект исследования – связности на редуктивных пространствах. В случае, если на многообразии транзитивно действует группа Ли, такое многообразие называется однородным пространством, если однородное пространство является редуктивным, то оно всегда допускает инвариантную связность. Если же существует хотя бы одна инвариантная аффинная связность, то пространство является изотропно-точным.

Цель работы – изучение трехмерных редуктивных однородных пространств, не допускающих эквиваффинных связностей. Рассматривается случай изотропно-точных пространств, на которых действует разрешимая группа преобразований. Для трехмерных редуктивных однородных пространств, допускающих нормальную связность, изучается вопрос, при каких условиях данное пространство не допускает эквиваффинных связностей. Определены основные понятия: однородное пространство, аффинная (инвариантная) связность, тензор кручения, тензор кривизны, тензор Риччи, редуктивное пространство, алгебра голономии, нормальная связность, эквиваффинная связность. В основной части работы найдены и приведены в явном виде трехмерные редуктивные однородные пространства, допускающие нормальную связность, но не допускающие эквиваффинную, что эквивалентно описанию соответствующих эффективных пар алгебр Ли. Дополнительно выписаны сами инвариантные связности и тензоры Риччи.

Ключевые слова: группа преобразований, редуктивное пространство, нормальная связность, тензор Риччи, эквиваффинная связность.

Для цитирования: Можей Н. П. Редуктивные пространства с разрешимой группой преобразований, не допускающие эквиваффинных связностей // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2025. № 1 (290). С. 16–19.

DOI: 10.52065/2520-6141-2025-290-3.

N. P. Mozhey

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics

REDUCTIVE SPACES WITH A SOLVABLE GROUP OF TRANSFORMATIONS THAT DO NOT ADMIT EQUIAFFINE CONNECTIONS

In the introduction, the object of research is indicated – connections on reductive spaces. If a Lie group acts transitively on a manifold, such manifold is called the homogeneous space, if a homogeneous space is reductive, then it always admits invariant connection. If there exists at least one invariant affine connection, then the space is isotropically-faithful.

The aim of the work is to study three-dimensional reductive homogeneous spaces that do not admit equiaffine connections. The case of isotropically-faithful spaces on which a solvable group of transformations operates is considered. For three-dimensional reductive homogeneous spaces admitting normal connection, the question is studied under what conditions this space does not admit equiaffine connections. The basic notions are defined: homogeneous space, affine (invariant) connection, torsion tensor, curvature tensor, Ricci tensor, reductive space, holonomy algebra, normal connection, equiaffine connection. In the main part of the work, three-dimensional reductive homogeneous spaces that admit normal connection but do not admit equiaffine are found and explicitly presented, which is equivalent to describing the corresponding effective pairs of Lie algebras. Additionally, the invariant connections and Ricci tensors themselves are written out.

Keywords: group of transformations, reductive space, normal connection, Ricci tensor, equiaffine connection.

For citation: Mozhey N. P. Reductive spaces with a solvable group of transformations that do not admit equiaffine connections. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2025, no. 1 (290), pp. 16–19 (In Russian).

DOI: 10.52065/2520-6141-2025-290-3.

Введение. Класс пространств с симметрическим тензором Риччи значительно шире класса римановых пространств, это так называемые пространства эквивариантной связности. Они, в сущности, не обладают метрикой, но в их касательных пространствах можно ввести измерение объемов так, чтобы объем n -мерного параллелепипеда, построенного на n векторах, сохранялся при параллельном перенесении этих векторов по любому пути. Цель работы – определить пространства, не допускающие эквивариантных связностей.

Инвариантные связности на редуктивных однородных пространствах изучались П. К. Рашевским, М. Куритой, Э. Б. Винбергом, Ш. Кобаяси, К. Номидзу [1] и др. В статье исследуется существование и свойства инвариантных связностей на однородных пространствах. Результаты Вана [2] применяются к ситуации, когда существует инвариантная структура на редуктивном однородном пространстве.

Аффинная связность является эквивариантной, если допускает параллельную форму объема (см. [3]). Трехмерные редуктивные однородные пространства разрешимых групп Ли изучались в работе [4]. В данной публикации определяется, при каких условиях пространство допускает нормальную связность, но не допускает эквивариантную.

Основная часть. Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\bar{G}$, $G = \bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$, $\bar{g}$ – алгебра Ли группы Ли $\bar{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра, соответствующая подгруппе G .

Пространство $\bar{G}/G$ редуктивно, если алгебра Ли $\bar{g}$ может быть разложена в прямую сумму векторных пространств – алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и $\text{ad}(G)$ -инвариантного подпространства $\mathfrak{m}$, т. е. если $\bar{g} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$, $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{m} = 0$, $\text{ad}(G)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$. Второе условие влечет $[\mathfrak{g}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$ и наоборот, если G связна. Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к $\mathfrak{g}$ в $\bar{g}$, и факторпространство $\mathfrak{m} = \bar{g}/\mathfrak{g}$. Аффинной связностью на паре $(\bar{g}, \mathfrak{g})$ называется такое отображение $\Lambda: \bar{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, что его ограничение на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представление подалгебры $\mathfrak{g}$, а все отображение является $\mathfrak{g}$ -инвариантным. Если $\bar{G}/G$ редуктивно, то оно всегда допускает инвариантную связность и линейное представление изотропии для G всегда точное. Тензор кручения $T \in \text{Inv}T_2^1(\mathfrak{m})$ и тензор кривизны $R \in \text{Inv}T_3^1(\mathfrak{m})$ имеют вид

$$T(x_m, y_m) = \Lambda(x)y_m - \Lambda(y)x_m - [x, y]_m;$$

$$R(x_m, y_m) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y])$$

для всех $x, y \in \bar{g}$.

Будем говорить, что Λ имеет нулевое кручение или является связностью без кручения, если $T = 0$.

Определим тензор Риччи: $\text{Ric}(y, z) = \text{tr}\{x \mapsto R(x, y)z\}$. Алгебра Ли $\mathfrak{h}^*$ группы голономии инвариантной связности $\Lambda: \bar{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ на паре $(\bar{g}, \mathfrak{g})$ – это подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ следующего вида: $V + [\Lambda(\bar{g}), V] + [\Lambda(\bar{g}), [\Lambda(\bar{g}), V]] + \dots$, где V – подпространство, порожденное множеством $\{[\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]) \mid x, y \in \bar{g}\}$. Положим $\mathfrak{a}$ равной подалгебре в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$, порожденной $\{\Lambda(x) \mid x \in \mathfrak{g}\}$. Связность нормальна, если $\mathfrak{h}^* = \mathfrak{a}$. Понятие нормальной связности ввел Э. Картан (для риманова многообразия, см. [5]). Будем говорить, что аффинная связность Λ является локально эквивариантной, если $\text{tr}\Lambda([x, y]) = 0$ для всех $x, y \in \bar{g}$, то есть $\Lambda([\bar{g}, \bar{g}]) \subset \mathfrak{sl}(\mathfrak{m})$. Аффинная связность Λ с нулевым кручением имеет симметрический тензор Риччи тогда и только тогда, когда она локально эквивариантна.

Под эквивариантной связностью будем понимать аффинную связность Λ (без кручения), для которой $\text{tr}\Lambda(x) = 0$ для всех $x \in \bar{g}$. В этом случае очевидно, что $\Lambda(\bar{g}) \subset \mathfrak{sl}(\mathfrak{m})$.

Будем описывать пару $(\bar{g}, \mathfrak{g})$ при помощи таблицы умножения алгебры $\bar{g}$, через $\{e_1, \dots, e_n, u_1, u_2, u_3\}$ обозначим базис $\bar{g}$ ($n = \dim \mathfrak{g}$). Будем полагать, что подалгебра $\mathfrak{g}$ порождается векторами $e_1, \dots, e_n$, а $\{u_1, u_2, u_3\}$ – базис $\mathfrak{m}$. Для нумерации подалгебр используем запись $d.n$, а для нумерации пар – запись $d.n.m$, соответствующие приведенным в статье [4], здесь d – размерность подалгебры, n – номер подалгебры в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$, а m – номер пары $(\bar{g}, \mathfrak{g})$.

Теорема. Все трехмерные редуктивные однородные пространства, допускающие нормальную связность, но не допускающие эквивариантную, такие, что $\bar{g}$ разрешима, а $\dim \mathfrak{g} > 1$, локально имеют следующий вид:

2.9.4, $\mu = 0$	$\begin{array}{c ccccc} & e_1 & e_2 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & e_2 & u_1 & 0 & 0 \\ e_2 & -e_2 & 0 & 0 & 0 & u_1 \\ u_1 & -u_1 & 0 & 0 & u_1 & 0 \\ u_2 & 0 & 0 & -u_1 & 0 & -u_3 \\ u_3 & 0 & -u_1 & 0 & u_3 & 0 \end{array}$
2.9.5, 2.9.6	$\begin{array}{c ccccc} & e_1 & e_2 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & e_2 & u_1 & 0 & 0 \\ e_2 & -e_2 & 0 & 0 & 0 & u_1 \\ u_1 & -u_1 & 0 & 0 & 0 & \pm e_2 \\ u_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 & \mp e_2 & -\alpha u_2 & 0 \end{array}, \alpha \geq 0$
2.9.7	$\begin{array}{c ccccc} & e_1 & e_2 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & e_2 & u_1 & 0 & 0 \\ e_2 & -e_2 & 0 & 0 & 0 & u_1 \\ u_1 & -u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 & 0 & -u_2 & 0 \end{array}$

Доказательство для случая нормальной связности приведено в работе [4]. Выберем из пространств, найденных в [4], те, которые не допускают эквиваффинных связностей.

Будем описывать связность через образы базисных векторов $\Lambda(u_1)$, $\Lambda(u_2)$, $\Lambda(u_3)$. В частности, для пар 2.9.4 ($\mu = 0$), 2.9.5, 2.9.6, 2.9.7 аффинные связности имеют вид

$$\begin{aligned}\Lambda(u_1) &= \begin{pmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \Lambda(u_2) &= \begin{pmatrix} q_{11} & 0 & 0 \\ 0 & q_{22} & q_{23} \\ 0 & 0 & q_{11} \end{pmatrix}, \\ \Lambda(u_3) &= \begin{pmatrix} r_{11} & 0 & 0 \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & p_{12} & r_{11} + p_{13} \end{pmatrix},\end{aligned}$$

где $p_{i,j}$, $q_{i,j}$, $r_{i,j} \in \mathbb{R}$, $i, j = \overline{1,3}$. В табл. 1 приведены тензоры кручения указанных связностей.

Таблица 1

Тензоры кручения

Пара	Тензоры кручения $T(u_1, u_2)$, $T(u_1, u_3)$, $T(u_2, u_3)$
2.9.4 при $\mu = 0$	$(p_{12} - q_{11} - 1, 0, 0), (p_{13} - r_{11}, 0, 0),$ $(0, q_{23} - r_{22}, q_{11} - p_{12} + 1)$
2.9.5, 2.9.6	$(p_{12} - q_{11}, 0, 0), (p_{13} - r_{11}, 0, 0),$ $(0, q_{23} - r_{22} - \alpha, q_{11} - p_{12})$
2.9.7	$(p_{12} - q_{11}, 0, 0), (p_{13} - r_{11}, 0, 0),$ $(0, q_{23} - r_{22} - 1, q_{11} - p_{12})$

Находим тензоры Риччи (см. табл. 2). Тогда локально эквиваффинные связности (без кручения) на трехмерных редуктивных однородных пространствах разрешимых групп Ли, приведенных в теореме, принимают вид, записанный в табл. 3.

Во всех приведенных случаях $\text{tr} \Lambda(e_1) \neq 0$, поэтому пары не допускают эквиваффинных связностей. Прямыми вычислениями получаем, что других трехмерных редуктивных однородных пространств, допускающих нормальную связность, но не допускающих эквиваффинную, таких, что $\bar{\mathfrak{g}}$ разрешима, а $\dim \mathfrak{g} > 1$, не существует.

Таблица 2

Тензоры Риччи

Пара	Тензоры Риччи
2.9.4 при $\mu = 0$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2p_{1,2}q_{1,1} + 2p_{1,2}q_{2,2} - 2p_{1,2} & 2p_{1,2}q_{2,3} - 2p_{1,3} - r_{1,1} \\ 0 & p_{1,2}p_{1,3} + p_{1,2}q_{2,3} - p_{1,2}r_{1,1} + p_{1,2}r_{2,2} + r_{2,2} & p_{1,2}r_{2,3} + p_{1,3}^2 + p_{1,3}q_{2,3} - q_{1,1}r_{2,3} + q_{2,2}r_{2,3} + q_{2,3}r_{1,1} - q_{2,3}r_{2,2} + r_{2,3} \end{pmatrix}$
2.9.5	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2p_{1,2}q_{1,1} + 2p_{1,2}q_{2,2} & \alpha q_{1,1} + 2p_{1,2}q_{2,3} \\ 0 & -\alpha q_{2,2} + p_{1,2}p_{1,3} + p_{1,2}q_{2,3} - p_{1,2}r_{1,1} + p_{1,2}r_{2,2} & S \end{pmatrix},$ $S = -\alpha q_{2,3} + p_{1,2}r_{2,3} + p_{1,3}^2 + p_{1,3}q_{2,3} - q_{1,1}r_{2,3} + q_{2,2}r_{2,3} + q_{2,3}r_{1,1} - q_{2,3}r_{2,2} - 1$
2.9.6	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2p_{1,2}q_{1,1} + 2p_{1,2}q_{2,2} & \alpha q_{1,1} + 2p_{1,2}q_{2,3} \\ 0 & -\alpha q_{2,2} + p_{1,2}p_{1,3} + p_{1,2}q_{2,3} - p_{1,2}r_{1,1} + p_{1,2}r_{2,2} & S \end{pmatrix},$ $S = -\alpha q_{2,3} + p_{1,2}r_{2,3} + p_{1,3}^2 + p_{1,3}q_{2,3} - q_{1,1}r_{2,3} + q_{2,2}r_{2,3} + q_{2,3}r_{1,1} - q_{2,3}r_{2,2} + 1$
2.9.7	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2p_{1,2}q_{1,1} + 2p_{1,2}q_{2,2} & 2p_{1,2}q_{2,3} + q_{1,1} \\ 0 & p_{1,2}p_{1,3} + p_{1,2}q_{2,3} - p_{1,2}r_{1,1} + p_{1,2}r_{2,2} - q_{2,2} & p_{1,2}r_{2,3} + p_{1,3}^2 + p_{1,3}q_{2,3} - q_{1,1}r_{2,3} + q_{2,2}r_{2,3} + q_{2,3}r_{1,1} - q_{2,3}r_{2,2} - q_{2,3} \end{pmatrix}$

Таблица 3

Локально эквиваффинные связности

Пара	Локально эквиваффинная связность (без кручения) $\Lambda(u_1)$, $\Lambda(u_2)$, $\Lambda(u_3)$
2.9.4 при $\mu = 0$	$\begin{pmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{1,2} - 1 & 0 & 0 \\ 0 & q_{22} & -3p_{13} \\ 0 & 0 & p_{1,2} - 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{13} & 0 & 0 \\ 0 & -3p_{13} & r_{23} \\ 0 & p_{12} & 2p_{13} \end{pmatrix}$

Окончание табл. 3

Пара	Локально эквивариантная связность (без кручения) $\Lambda(u_1)$, $\Lambda(u_2)$, $\Lambda(u_3)$
2.9.5, 2.9.6	$\begin{pmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & q_{22} & q_{23} \\ 0 & 0 & p_{1,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{13} & 0 & 0 \\ 0 & q_{23} - \alpha & r_{23} \\ 0 & p_{12} & 2p_{13} \end{pmatrix}, \text{при } \alpha \neq 0 \quad q_{22} = -2p_{12}$
2.9.7	$\begin{pmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & -2p_{12} & q_{23} \\ 0 & 0 & p_{1,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{13} & 0 & 0 \\ 0 & q_{23} - 1 & r_{23} \\ 0 & p_{12} & 2p_{13} \end{pmatrix}$

Заключение. Для трехмерных редуктивных однородных пространств, допускающих нормальную связность, определено, при каких условиях данное пространство не допускает эквивариантных связно-

стей, соответствующие пространства найдены и выписаны в явном виде, рассмотрен случай разрешимой группы преобразований. Дополнительно приведены инвариантные связности и тензоры Риччи.

Список литературы

1. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии: в 2 т. М.: Наука, 1981. 2 т.
2. Wang H. C. On invariant connections over a principal fibre bundle // Nagoya Math. J. 1958. No. 13. P. 1–19.
3. Nomizu K., Sasaki T. Affine differential geometry. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1994. 263 p.
4. Можей Н. П. Трехмерные редуктивные пространства разрешимых групп Ли // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. 2016. № 6 (99). С. 74–81.
5. Картан Э. Риманова геометрия в ортогональном репере. М.: Моск. ун-т, 1960. 307 с.

References

1. Kobayasi Sh., Nomidzu K. *Osnovy differentsial'noy geometrii: v 2 t.* [Foundations of differential geometry: in 2 vol.]. Moscow, Nauka Publ., 1981. 2 vol. (In Russian).
2. Wang H. C. On invariant connections over a principal fibre bundle. *Nagoya Math. J.*, 1958, no. 13, pp. 1–19.
3. Nomizu K., Sasaki T. Affine differential geometry. Cambridge, Cambridge Univ. Press Publ., 1994. 263 p.
4. Mozhey N. P. Three-dimensional reductive spaces of solvable Lie groups. *Izvestiya Gomel'skogo gosudarstvennogo universiteta* [Izvestiya Gomel State University], 2016, no. 6 (99), pp. 74–81 (In Russian).
5. Kartan E. *Rimanova geometriya v ortogonal'nom repere* [Riemannian geometry in an orthogonal frame]. Moscow, Moskovskiy universitet Publ., 1960. 307 p.

Информация об авторе

Можей Наталья Павловна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры программного обеспечения информационных технологий. Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (ул. П. Бровки, 6, 220013, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: mozheynatalya@mail.ru

Information about the author

Mozhey Natalya Pavlovna – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Software for Information Technologies. Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (6 P. Brovki str., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: mozheynatalya@mail.ru

Поступила после доработки 15.10.2024