УДК 517.977

**А. А. Якименко**
Белорусский государственный технологический университет

# МОДАЛЬНАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ ОДНОЙ ДВУМЕРНОЙ СИСТЕМЫ ЗАПАЗДЫВЮЩЕГО ТИПА С ТРЕМЯ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

В публикации рассмотрено решение задачи модальной управляемости для двумерной стационарной динамической системы с запаздывающим аргументом с одним входом и тремя соизмеримыми запаздываниями в одном специальном случае. Приведено определение задачи модального управления для исследуемой системы. Задача модального управления является одной из основных задач теории управления. Она заключается в приведении коэффициентов характеристического квазиполинома замкнутой системы к заданному виду. Такая задача хорошо изучена для систем без запаздывания. Для систем с запаздывающим аргументом и систем нейтрального типа решение задачи модального управления значительно сложнее. В статье получено решение поставленной задачи при определенных условиях на значения параметров исследуемой системы с запаздыванием. Также получены регуляторы по типу обратной связи, решающие задачу модального управления для рассматриваемой системы. Эти регуляторы найдены в частотной области как элементарные функции коэффициентов исходной системы. Также приведены правила, согласно которым полученные регуляторы переводятся из частотной области в регуляторы по типу обратной связи для исследуемой системы. Рассмотрен иллюстративный пример решения задачи модального управления для рассматриваемой системы. Приведен список литературы, в которой задача модального управления решается для других систем с запаздыванием и систем нейтрального типа.

**Ключевые слова:** запаздывающие системы, модальное управление, регуляторы, обратная связь, запаздывание, соизмеримые запаздывания.

**Для цитирования:** Якименко А. А. Модальная управляемость одной двумерной системы запаздывающего типа с тремя запаздываниями // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2025. № 1 (290). С. 11–15.
DOI: 10.52065/2520-6141-2025-290-2.

**A. A. Yakimenka**
Belarusian State Technological University

# MODAL CONTROLLABILITY OF ONE TWO-DIMENSIONAL DELAYED SYSTEM WITH THREE DELAYS

The publication considers the solution of the modal controllability problem for a two-dimensional stationary dynamic system with a retarded argument with one input and three commensurate delays in one special case. The definition of the modal control problem for the system under study is given. The modal control problem is one of the main problems of control theory. It consists in reducing the coefficients of the characteristic quasi-polynomial of a closed system to a given form. Such a problem has been well studied for systems without delay. For systems with a retarded argument and neutral type systems, the solution of the modal control problem is much more complicated. In the article, a solution to the problem is obtained under certain conditions on the values of the parameters of the system with delay. Also, feedback-type controllers are obtained that solve the modal control problem for the system under study. These controllers are found in the frequency domain as elementary functions of the coefficients of the original system. The rules according to which the obtained regulators are transferred from the frequency domain to the feedback type regulators for the system under study are also given. An illustrative example of solving the modal control problem for the system under consideration is considered. A list of literature is given in which the modal control problem is solved for other systems with delay and neutral type systems.

**Keywords:** delayed systems, modal control, regulators, feedback control, delay, commensurate delays.

**For citation:** Yakimenka A. A. Modal controllability of one two-dimensional delayed system with three delays. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2025, no. 1 (290), pp. 11–15 (In Russian).
DOI: 10.52065/2520-6141-2025-290-2.

**Введение.** Задача модального управления является одной из основных задач теории управления. Такая задача достаточно хорошо изучена для систем без запаздывания. Для систем с запаздывающим аргументом и систем нейтрального типа [1–8] решение задачи модального управления значительно сложнее. В данной работе решается задача модального управления для двумерной стационарной динамической системы с одним входом и тремя соизмеримыми запаздываниями в одном специальном случае. Получены регуляторы по принципу обратной связи, решающие задачу модального управления. Такие регуляторы в частотной области являются элементарными функциями коэффициентов рассматриваемой системы. Приведен иллюстративный пример решения такой задачи.

**Основная часть.** Рассмотрим линейную стационарную систему с запаздывающим аргументом с одним входом и тремя соизмеримыми запаздываниями:

$$\dot{x}(t)=\sum_{j=0}^{3}A_j x(t-jh)+bu(t), \qquad (1)$$

где $A_j$, $j=0,1,2,3$ – постоянные (2×2)-матрицы; $h>0$ – постоянное запаздывание; $b$ – постоянный 2-вектор; $u$ – скалярное управление. Не ограничивая общности, можно считать, что $b'=(0\ 1)$ (штрих $(\cdot)'$ означает транспонирование).

Характеристическое уравнение разомкнутой (с нулевым управлением) системы (1) имеет вид

$$\det\left[\lambda I_2-A_0-A_1e^{-\lambda h}-A_2e^{-2\lambda h}-A_3e^{-3\lambda h}\right]\equiv$$
$$\equiv\lambda^2+\left(\alpha_{10}+\alpha_{11}e^{-\lambda h}+\alpha_{12}e^{-2\lambda h}+\alpha_{13}e^{-3h}\right)\lambda+$$
$$+\alpha_{00}+\alpha_{01}e^{-\lambda h}+\alpha_{02}e^{-2\lambda h}+\alpha_{03}e^{-3\lambda h}+$$
$$+\alpha_{04}e^{-4\lambda h}+\alpha_{05}e^{-5\lambda h}+\alpha_{06}e^{-6\lambda h}=0, \qquad (2)$$

где $\lambda\in\mathbb{C}$, $e^{-j\lambda h}$ – оператор сдвига ($e^{-j\lambda h}x(t)\equiv\equiv x(t-jh)$).

Присоединим к системе (1) регулятор вида

$$u(t)=\sum_{j=0}^{M}q_j'x(t-jh)+\int_{-lh}^{0}g'(s)x(t+s)ds, \qquad (3)$$

где $l,\ M\in\mathbb{N}$, $q_j, j=0,1,\ldots,M$ – 2-векторы; $g(s)$, $s\in[-h,\ 0]$ – непрерывная 2-вектор-функция.

В частотной области регулятор (3) имеет вид

$$U(\lambda)=\sum_{j=0}^{M}q_j'e^{-j\lambda h}+G(\lambda), \qquad (4)$$

где $G(\lambda)$ – целая функция, определяющая интегральную часть (3).

***Определение.*** Система (1) модально управляема регулятором вида (3), если для наперед заданных чисел $\tilde{\alpha}_{ij}$, $i=0,\ j=\overline{0,6}$; $i=1, j=0,1,2,3$ найдется такой регулятор, при котором характеристическое уравнение замкнутой системы (1), (3) будет иметь вид (сравните с формулой (2)):

$$\det\left[\lambda I_2-A_0-A_1e^{-\lambda h}-A_2e^{-2\lambda h}-A_3e^{-3\lambda h}-bU(\lambda)\right]\equiv$$
$$\equiv\lambda^2+\left(\tilde{\alpha}_{10}+\tilde{\alpha}_{11}e^{-\lambda h}+\tilde{\alpha}_{12}e^{-2\lambda h}+\tilde{\alpha}_{13}e^{-3h}\right)\lambda+$$
$$+\tilde{\alpha}_{00}+\tilde{\alpha}_{01}e^{-\lambda h}+\tilde{\alpha}_{02}e^{-2\lambda h}+\tilde{\alpha}_{03}e^{-3\lambda h}+$$
$$+\tilde{\alpha}_{04}e^{-4\lambda h}+\tilde{\alpha}_{05}e^{-5\lambda h}+\tilde{\alpha}_{06}e^{-6\lambda h}=0.$$

Пусть

$$\mu_1=\tilde{\alpha}_{10}+\tilde{\alpha}_{11}m+\tilde{\alpha}_{12}m^2+\tilde{\alpha}_{13}m^3; \qquad (5)$$

$$\mu_2=\sum_{j=0}^{6}\tilde{\alpha}_{0j}m^j, \qquad (6)$$

где $\tilde{\alpha}_{ij}$, $i=0,\ j=\overline{0,6}$; $i=1,\ j=0,1,2,3$ – произвольные числа. Тогда система (1), замкнутая регулятором, решающим задачу модального управления, имеет следующее характеристическое уравнение:

$$\lambda^2+\mu_1\lambda+\mu_2=0. \qquad (7)$$

Обозначим $m=e^{-\lambda h}$ – оператор сдвига ($mx(t)=$ $=x(t-h)$), $A(m)=A_0+A_1m+A_2m^2+A_3m^3$. Не ограничивая общности, можно считать, что матрица $A(m)$ имеет вид

$$A(m)=\begin{bmatrix}a_0+a_1m+a_2m^2 & b_0+b_1m+b_2m^2+m^3\\ a_{21}(m) & a_{22}(m)\end{bmatrix},$$

где

$$a_{21}(m)=a_{210}+a_{211}m+a_{212}m^2+a_{213}m^3;$$
$$a_{22}(m)=a_{220}+a_{221}m+a_{222}m^2+a_{223}m^3. \qquad (8)$$

В данной работе рассмотрим случай

$$a_1=a_2=0. \qquad (9)$$

Тогда матрица $A(m)$ примет вид

$$A(m)=\begin{bmatrix}a_0 & b_0+b_1m+b_2m^2+m^3\\ a_{21}(m) & a_{22}(m)\end{bmatrix}.$$

Регулятор, решающий задачу модального управления, представим в виде

$$U(\lambda,m)=\left[u_1(\lambda,m)\quad u_2(\lambda,m)\right]=$$
$$=\left[\eta_{11}(m)-a_{21}(m)\quad \eta_2(\lambda,m)-a_{22}(m)\right], \qquad (10)$$

где $\eta_{11}(m)$ – полином относительно $m$.

Компоненту $\eta_2(\lambda,m)$ регулятора (10) разделим на дифференциально-разностную (ей соответствует некоторый квазиполином) и интегральную части:

$$\eta_2(\lambda, m) = \eta_{21}(m) + \eta_{22}(\lambda, m), \qquad (11)$$

где $\eta_{21}(m)$ – полином относительно $m$; $\eta_{22}(\lambda, m)$ соответствует интегральной части. Будем искать эту функцию в следующем виде:

$$\eta_{22}(\lambda, m) = \left(c_1 + c_2 m + c_3 m^2\right)\frac{m-k}{\lambda - a_0},$$

где $k = e^{-a_0 h}$; $c_1$, $c_2$, $c_3$ – некоторые числа, подлежащие определению. Характеристическое уравнение замкнутой регулятором (10) системы (1) примет вид

$$\begin{vmatrix} a_0 - \lambda & b_0 + b_1 m + b_2 m^2 + m^3 \\ \eta_{11} & \eta_{21} + \left(c_1 + c_2 m + c_3 m^2\right)\dfrac{m-k}{\lambda - a_0} - \lambda \end{vmatrix} \equiv$$

$$\equiv \lambda^2 + \left(-a_0 - \eta_{21}\right)\lambda - \eta_{11}m^3 - b_1\eta_{11}m - b_2\eta_{11}m^2 +$$

$$+ c_2 km - c_2 m^2 + c_3 m^2 k - c_3 m^3 +$$

$$+ \eta_{21}a_0 - b_0\eta_{11} + c_1 k - c_1 m = 0.$$

Чтобы получить для замкнутой системы характеристическое уравнение (7), выберем в качестве $\eta_{21}$ следующий квазиполином:

$$\eta_{21} = -a_0 - \mu_1,$$

где $\mu_1$ определен в формуле (5).

Тогда характеристическое уравнение замкнутой системы примет вид

$$\lambda^2 + \mu_1\lambda - \eta_{11}m^3 - b_2\eta_{11}m^2 + c_2 km - c_2 m^2 - a_0^2 +$$

$$+ c_3 m^2 k - c_3 m^3 - \mu_1 a_0 - b_0\eta_{11} + c_1 k - c_1 m = 0.$$

Чтобы последнее уравнение имело вид (7), нужно выполнение равенства

$$-\eta_{11}m^3 - b_2\eta_{11}m^2 + c_2 km - c_2 m^2 - a_0^2 +$$

$$+ c_3 m^2 k - c_3 m^3 - \mu_1 a_0 - b_0\eta_{11} + c_1 k - c_1 m = \mu_2.$$

Выразив отсюда $\eta_{21}$ $\eta_{11}$, получим

$$\eta_{11} = \frac{-\mu_2 + c_2 km - c_2 m^2 + c_3 m^2 k}{b_0 + b_1 m + b_2 m^2 + m^3} +$$

$$+ \frac{-c_3 m^3 - a_0^2 - \mu_1 a_0 + c_1 k - c_1 m}{b_0 + b_1 m + b_2 m^2 + m^3}. \qquad (12)$$

Последняя дробь в общем случае не является полиномом относительно $m$. Подберем $c_1$, $c_2$ и $c_3$ так, чтобы правая часть формулы (12) стала полиномом. Для этого вначале выделим целую часть в формуле (12).

$$\eta_{11} = -c_3 +$$

$$+ \frac{b_2 c_3 m^2 + c_3 m^2 k + b_1 c_3 m + c_2 km - c_2 m^2 - a_0^2}{b_0 + b_1 m + b_2 m^2 + m^3} +$$

$$+ \frac{-\mu_1 a_0 + b_0 c_3 + c_1 k - c_1 m - \mu_2}{b_0 + b_1 m + b_2 m^2 + m^3}.$$

Потребуем, чтобы числитель последней дроби был бы равен нулю. Имеем

$$b_2 c_3 m^2 + c_3 m^2 k + b_1 c_3 m + c_2 km - c_2 m^2 - a_0^2 -$$

$$- \mu_1 a_0 + b_0 c_3 + c_1 k - c_1 m - \mu_2 \equiv$$

$$\equiv \left(b_2 c_3 + c_3 k - c_2\right)m^2 + \left(b_1 c_3 + c_2 k - c_1\right)m -$$

$$- a_0^2 - \mu_1 a_0 + b_0 c_3 + c_1 k - \mu_2 = 0.$$

Отсюда видно, что в качестве $c_2$ можно взять

$$c_2 = b_2 c_3 + c_3 k, \qquad (13)$$

а в качестве $c_1$ возьмем

$$c_1 = b_1 c_3 + c_2 k. \qquad (14)$$

Тогда с учетом соотношений (13), (14)

$$b_2 c_3 m^2 + c_3 m^2 k + b_1 c_3 m + c_2 km - c_2 m^2 - a_0^2 -$$

$$- \mu_1 a_0 + b_0 c_3 + c_1 k - c_1 m - \mu_2 \equiv$$

$$\equiv \left(b_0 + b_1 k + b_2 k^2 + k^3\right)c_2 - a_0^2 - a_0\mu_1 - \mu_2 = 0.$$

Отсюда

$$c_2 = \frac{a_0^2 + a_0\mu_1 + \mu_2}{b_0 + b_1 k + b_2 k^2 + k^3}. \qquad (15)$$

Нетрудно увидеть, что для того, чтобы $c_2$ из формулы (15) было полиномом относительно $m$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$b_0 + b_1 k + b_2 k^2 + k^3 \neq 0. \qquad (16)$$

С учетом того, что

$$\eta_{22}(\lambda, m) = \left(c_1 + c_2 m + c_3 m^2\right)\frac{m-k}{\lambda - a_0},$$

и принимая во внимание (13), (14), (15), после несложных преобразований получим

$$\eta_{22}(\lambda, m) = \frac{\left(a_0^2 + \mu_1 a_0 + \mu_2\right)}{b_0 + b_1 k + b_2 k^2 + k^3} \times$$

$$\times \frac{\left(b_2 k + m b_2 + k^2 + km + m^2 + b_1\right)(m-k)}{\lambda - a_0}.$$

Таким образом, с учетом (10) регуляторы в частотной области

$$u_1(\lambda, m) = -\frac{a_0^2 + a_0\mu_1 + \mu_2}{b_0 + b_1k + b_2k^2 + k^3} - a_{21}(m); \quad (17)$$

$$u_2(\lambda, m) = -a_0 - \mu_1 - a_{22}(m) + \\ + \frac{\left(a_0^2 + \mu_1 a_0 + \mu_2\right)}{b_0 + b_1k + b_2k^2 + k^3} \times \\ \times \frac{\left(b_2k + mb_2 + k^2 + km + m^2 + b_1\right)(m-k)}{\lambda - a_0}. \quad (18)$$

решают задачу модального управления для системы (1) при выполнении условия (16).

Отсюда видна справедливость следующей теоремы

***Теорема.*** Для того чтобы система (1) была модально управляема регулятором вида (3) в случае (9), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (16). При этом регуляторы, решающие задачу модального управления, в частотной области имеют вид (17), (18).

При переходе от регуляторов в частотной области к регуляторам вида (3) нужно следовать следующим правилам.

1. Слагаемым вида $m^i x_j$ соответствует

$$x_j(t - ih).$$

2. Слагаемым вида $\mu_1 x_j$ соответствует

$$\tilde{\alpha}_{10}x_j(t) + \tilde{\alpha}_{11}x_j(t-h) + \tilde{\alpha}_{12}x_j(t-2h) + \\ + \tilde{\alpha}_{13}x_j(t-3h).$$

3. Слагаемым вида $\mu_2 x_j$ соответствует

$$\tilde{\alpha}_{00}x_j(t) + \tilde{\alpha}_{01}x_j(t-h) + \tilde{\alpha}_{02}x_j(t-2h) + \\ + \tilde{\alpha}_{03}x_j(t-3h) + \tilde{\alpha}_{04}x_j(t-4h) \\ + \tilde{\alpha}_{05}x_j(t-5h) + \tilde{\alpha}_{06}x_j(t-6h).$$

4. Слагаемым вида $\dfrac{m-k}{\lambda-\xi}x_j$ соответствует

$$\int_{-h}^{0} H(t+s)H(h+s)e^{-(h+s)\xi}x_j(t+s)\,ds,$$

где $H(t)$ – функция Хевисайда.

5. Слагаемым вида $m^l \cdot \dfrac{m-k}{\lambda-\xi}x_j$ соответствует

$$\int_{-(l+1)h}^{-lh} H(t+s)H\left((l+1)h+s\right)e^{-((l+1)h+s)\xi}x_j(t+s)\,ds,$$

$l = 1, 2.$

***Пример.*** Рассмотрим систему (1) с матрицами

$$A_0 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ a_{210} & a_{220} \end{bmatrix}, \; A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ a_{211} & a_{221} \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ a_{212} & a_{222} \end{bmatrix}, \; A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{213} & a_{223} \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда матрица $A(m)$ имеет вид

$$A(m) = \\ = \begin{bmatrix} 2 & 3 + 2m + 4m^2 + m^3 \\ a_{21}(m) & a_{22}(m) \end{bmatrix},$$

где

$$a_{21}(m) = a_{210} + a_{211}m + a_{212}m^2 + a_{213}m^3;$$

$$a_{22}(m) = a_{220} + a_{221}m + a_{222}m^2 + a_{223}m^3.$$

Обозначим $k = e^{-a_0 h} = e^{-2h} \in \mathbb{R}$. Проверим выполнение условия (16):

$$b_0 + b_1k + b_2k^2 + k^3 = 3 + 2e^{-2h} + 4e^{-4h} + e^{-8h} > 0.$$

Условие (16) выполнено. Тогда регуляторы (17), (18) примут вид

$$u_1(\lambda, m) = -\frac{4 + 2\mu_1 + \mu_2}{3 + 2k + 4k^2 + k^3} - a_{210} - \\ - a_{211}m - a_{212}m^2 - a_{213}m^3;$$

$$u_2(\lambda, m) = -2 - \mu_1 - a_{220} - a_{221}m - a_{222}m^2 - a_{223}m^3 + \\ + \frac{(4 + 2\mu_1 + \mu_2)}{3 + 2k + 4k^2 + k^3} \times \\ \times \frac{\left(4k + 4m + k^2 + km + m^2 + 2\right)(m-k)}{\lambda - 2}.$$

Нетрудно проверить, что система (1), замкнутая этим регулятором, имеет характеристическое уравнение вида

$$\lambda^2 + \mu_1\lambda + \mu_2 = 0,$$

где $\mu_1$, $\mu_2$ определены в формулах (5), (6).

**Заключение.** В статье получен способ нахождения регуляторов по принципу обратной связи, решающих задачу модального управления для двумерной системы запаздывающего типа с тремя соизмеримыми запаздываниями и одним входом в случае (9). Указаны дополнительные условия существования таких регуляторов. Также приведен иллюстративный пример.

### Список литературы

1. Марченко В. М. О проблеме модального управления в линейных системах с запаздыванием // Доклады Академии наук БССР. 1978. № 5. С. 401–404.

2. Якименко А. А. Модальное управление одной запаздывающей системой // Труды БГТУ. 2013. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 3–7.

3. Якименко А. А. Модальное управление одной системой нейтрального типа // Труды БГТУ. 2016. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 18–21.

4. Якименко А. А. Модальное управление одной системой нейтрального типа в общециклическом случае // Труды БГТУ. Сер. 3, Физ.-мат. науки и информатика. 2017. № 2. С. 25–27.

5. Якименко А. А. Модальное управление одной системой нейтрального типа в общециклическом случае при кратных корнях // Труды БГТУ. Сер. 3, Физ.-мат. науки и информатика. 2018. № 1 (206). С. 5–8.

6. Якименко А. А. Модальная управляемость одной двумерной системы запаздывающего типа // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2023. № 1 (266). С. 15–19. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-266-1-3.

7. Якименко А. А. Модальная управляемость одной двумерной системы запаздывающего типа в случае кратных корней // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2023. № 2 (272). С. 18–22. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-272-2-3.

8. Якименко А. А. Модальная управляемость одной двумерной системы запаздывающего типа в специальном случае // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2024. № 2 (284). С. 5–9. DOI: 10.52065/2520-6141-2024-284-1.

### References

1. Marchenko V. M. On problem of modal control in linear systems with delay. *Doklady Akademii nauk BSSR* [Reports of the BSSR Academy of Science], 1978, no. 5, pp. 401–404 (In Russian).

2. Yakimenka A. A. Modal control for one delayed system. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2013, no. 6: Physics and Mathematics. Informatics, pp. 3–7 (In Russian).

3. Yakimenka A. A. Modal control for one neutral type system. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2016, no. 6: Physics and Mathematics. Informatics, pp. 18–21 (In Russian).

4. Yakimenka A. A. Modal control for one neutral type system in general cyclic case. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], issue 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2017, no. 2, pp. 25–27 (In Russian).

5. Yakimenka A. A. Modal control for one neutral type system in general cyclic case with double roots. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], issue 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2018, no. 1, pp. 5–8 (In Russian).

6. Yakimenka A. A. Modal controllability of one two-dimensional delayed system. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], issue 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2023, no. 1 (266), pp. 15–19. DOI: 10.52065/ 2520-6141-2023-266-1-3 (In Russian).

7. Yakimenka A. A. Modal controllability of one two-dimensional delayed system in the case of multiple roots. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], issue 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2023, no. 2 (272), pp. 18–22. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-272-2-3 (In Russian).

8. Yakimenka A. A. Modal controllability of one two-dimensional delayed system in a special case. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], issue 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2024, no. 2 (284), pp. 5–9. DOI: 10.52065/2520-6141-2024-284-1 (In Russian).

### Информация об авторе

**Якименко Андрей Александрович** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: yakimenko@belstu.by

### Information about the author

**Yakimenka Andrei Aliaksandravich** – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: yakimenko@belstu.by

*Поступила после доработки 17.11.2024*