

АЛГОРИТМ МОДЕЛИРОВАНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ С ЗАДААННЫМИ ВЕРОЯТНОСТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Задача формирования реализаций случайных процессов с заданными вероятностными характеристиками имеет ряд важных научно – технических приложений, таких как имитационное моделирование работы систем различного назначения на ЭВМ. Для качественного имитационного моделирования необходимо уметь получать временные реализации сигналов, имеющих заданные законы распределения амплитуд и корреляционные функции определенного вида.

Задача моделирования может быть сформулирована следующим образом: необходимо сформировать стационарный случайный процесс с одномерной плотностью распределения вероятностей $p_x(y)$ и корреляционной функцией $K_x(\tau)$. Существуют различные подходы к решению поставленной задачи [1,2]. Один из путей заключается в использовании специально подобранного нелинейного преобразования соответствующего нормального процесса.

Выберем в качестве исходного нормальный стационарный случайный процесс $\xi_x(t)$ с нулевым средним. Известно [1], что всегда существует такое нелинейное безынерционное преобразование $y = f(x)$ которое превращает нормальную функцию плотности $p_x(x)$ процесса $\xi_x(t)$ в заданную функцию плотности $p_y(y)$. Если исходный процесс $\xi_x(t)$ имеет корреляционную функцию $K_x(\tau)$, то преобразованный процесс $\xi_y(t)$ будет иметь в общем случае ковариационную функцию $B_y(\tau) = K_y(\tau) + m_y^2$, где m_y – математическое ожидание процесса $\xi_y(t)$, отличную от функции $K_x(\tau)$ и связанную с ней некоторой зависимостью

$$B_y(\tau) = \Phi[K_x(\tau)] \quad (1)$$

Вид этой зависимости определяется преобразованием $y = f(x)$. Для того чтобы корреляционная функция $K_y(\tau)$ преобразованного процесса была требуемой необходимо выбрать корреляционную функцию исходного процесса равной

$$K_x(\tau) = \Phi^{-1}[B_y(\tau)], \quad (2)$$

где $\Phi^{-1}[B_y(\tau)]$ – функция, обратная функции $\Phi[B_x(\tau)]$.

Выберем преобразование $y = f(x)$ монотонным и положим, что исходный процесс имеет равное нулю математическое ожидание и единичную дисперсию, т. е. $M[\xi_x(t)] = m_x = 0$ и $M[\xi_x^2(t)] = \sigma_x^2 = 1$

Таким образом

$$K_x(\tau) = \sigma_x^2 \rho_x(\tau) = \rho_x(\tau), \quad (3)$$

где $\rho_x(\tau)$ — нормированная корреляционная функция процесса $\xi_x(t)$.

Необходимую функциональную зависимость $y = f(x)$ можно получить из уравнения

$$F_y(y) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 0 \quad (4)$$

где $F_y(y)$ — требуемый интегральный закон распределения.

Полагая в (4) последовательно $x = x_1, x_2, \dots, x_N$, и решая уравнение относительно y , получим соответствующий набор значений $y = y_1, y_2, \dots, y_N$.

При известном преобразовании $y = f(x)$ зависимость

$$B_y(\tau) = \Phi[K_x(\tau)] = \Phi[\rho_x(\tau)]$$

можно получить, если представить функцию $B_y(\tau)$ в виде ряда по степеням $\rho_x(\tau)$. Искомое разложение имеет вид [1]

$$B_y(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m^2 \frac{\rho_x^m(\tau)}{m!}, \quad (5)$$

где $c_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) H_m(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx$, $H_m(x)$ — полиномы Эрмита.

Полагая в уравнении (5) $\tau_i = i\Delta t$, где Δt — интервал дискретизации случайного процесса $\xi_x(t)$, $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$, N — число отсчетов по τ , и решая его относительно $\rho_x(\tau_i) = \rho_i$, находим нормированную корреляционную функцию исходного нормального случайного процесса в виде дискретного набора значений $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{N-1}$.

Для моделирования нормального стационарного случайного процесса $\xi_x(t)$ с заданной корреляционной функцией $K_x(\tau) = \rho_x(\tau)$ воспользуемся линейным преобразованием стационарной последовательности $\{x_n\}$, $n = 1, 2, \dots, N$ независимых нормальных случайных чисел с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией (нормированный дискретный белый шум) в последовательность, коррелированную по заданному закону [1].

$$\xi_x = \sum_{k=1}^N c_k x_{n-k}, \quad \xi_n = \xi_x(n\Delta t) \quad (6)$$

Набор коэффициентов c_k определяется из решения системы уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_0 = \sum_{k=1}^N c_k^2 = c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_N^2 \\ \rho_1 = \sum_{k=1}^{N-1} c_k c_{k+1} = c_1 c_2 + c_2 c_3 + \dots + c_{N-1} c_N \\ \dots\dots\dots \\ \rho_{N-1} = \sum_{k=1}^1 c_k c_{k+N-1} = c_1 c_N \end{array} \right. \quad (7)$$

где ρ_i , $i=0,1,2,\dots,N-1$, дискретный набор значений нормированной корреляционной функций, определенный из уравнения (5).

Таким образом, алгоритм моделирования стационарного случайного процесса с заданной плотностью вероятностей его мгновенных значений и корреляционной функцией сводится к следующему:

- получить необходимое функциональное преобразование $y=f(x)$ путем решения уравнения (4);
- получить нормированную корреляционную функцию нормального стационарного случайного процесса $\rho_i(\tau)$, путем решения уравнения (5);
- получить набор коэффициентов для формирования нормального случайного процесса $\xi_i(t)$ с корреляционной функцией $\rho_i(\tau)$, путем решения системы уравнений (7);
- в соответствии с выражением (6) сформировать нормальный стационарный случайный процесс;
- получить искомый стационарный случайный процесс $\xi_v(t)$ путем функционального преобразования $y=f(x)$, то есть $\xi_v(t) = f[\xi_i(t)]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Быков В.В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. – М.: Сов. радио, 1971.
2. Овсянников А.В. Формирование случайных процессов с заданными вероятностными характеристиками // Труды БГТУ. Сер. VI. Физ. – мат. науки и информ. – 2002. – Вып. X. – с. 133–136.