4. Титаренко С. А. *Можно услышать форму почти любого барабана!* // Препринт С.-Петербургского Матем. Общ., 2020. № 04.

5. Владимиров Д. А. *Булевы алгебры*. М.: Наука, 1969.

КРИТЕРИЙ КОРРЕКТНОСТИ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ СТРУНЫ ПРИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ КОСЫХ ПРОИЗВОДНЫХ НА КОНЦАХ

Е.В. Устилко[1], **Ф.Е. Ломовцев**[2].

[1]Белорусский государственный технологический университет,
Свердлова 13а, 220006 Минск, Беларусь, ustilko@tut.by
[2]Белорусский государственный университет,
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь, lomovtsev23@mail.ru

Смешанная (начально-граничная) задача (1)–(3), гладкость коэффициентов и входных данных задачи указаны в [1]. В настоящей работе даны классические решения этой смешанной задачи для двухскоростного уравнения колебаний ограниченной струны при нестационарных граничных режимах с характеристическими первыми частными производными:

$$u_{3k-2}(x,t)=\frac{1}{a_1+a_2}\left[a_1\varphi_k(x+a_2t_k)+a_2\varphi_k(x-a_1t_k)+\int\limits_{x-a_1t_k}^{x+a_2t_k}\psi_k(\nu)d\nu+\int\limits_{d_k}^{t}\int\limits_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)}f(s,\tau)dsd\tau\right],$$

$$u_{3k-1}(x,t)=\frac{1}{a_1+a_2}\left[a_1\varphi_k(x+a_2t_k)-a_1\varphi_k\left(a_2\left(t_k-\frac{x}{a_1}\right)\right)+\int\limits_{a_2(t_k-x/a_1)}^{x+a_2t_k}\psi_k(\nu)d\nu\right]+$$

$$+\frac{1}{\gamma_1\left(t-\frac{x}{a_1}\right)}\left[\mu_1\left(t-\frac{x}{a_1}\right)-a_1\Phi_1\left(t-\frac{x}{a_1}\right)-\Psi_1\left(t-\frac{x}{a_1}\right)-\mathfrak{F}_1\left(t-\frac{x}{a_1}\right)\right]+F_{1,k}(x,t),$$

$$u_{3k}(x,t)=\frac{1}{a_1+a_2}\left[a_2\varphi_k(x-a_1t_k)-a_2\varphi_k\left(d-a_1\left(t_k-\frac{d-x}{a_2}\right)\right)+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{x-a_1t_k}^{d-a_1(t_k-(d-x)/a_2)}\psi_k(\nu)d\nu\right]+\frac{1}{\gamma_2\left(t-\frac{d-x}{a_2}\right)}\left[\mu_2\left(t-\frac{d-x}{a_2}\right)+a_2\Phi_2\left(t-\frac{d-x}{a_2}\right)-\right.$$

$$\left.-\Psi_2\left(t-\frac{d-x}{a_2}\right)-\mathfrak{F}_2\left(t-\frac{d-x}{a_2}\right)\right]+F_{2,k}(x,t),\ t_k=t-d_k,\ k=\overline{1,n},\ n=1,\ 2,...,$$

в которых используются частные классические решения $F_{i,k}(x,t)$ неоднородного двухскоростного ($a_1\neq a_2$) волнового уравнения без младшей части (1) и следующие функции

$$F_{i,k}(x,t)=\frac{1}{a_1+a_2}\left[(-1)^i\int\limits_{d_k}^{t_i^*(x)}\int\limits_{x-(-1)^ia_{3-i}(t-\tau)}^{\hat{d}_i-(-1)^ia_{3-i}[t_i^*(x)-\tau]}f(s,\tau)dsd\tau+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{t_i^*(x)}^{t}\int\limits_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)}f(s,\tau)dsd\tau\right],i=1,2,\ t_1^*(x)=t_2(x),\ t_2^*(x)=t-\frac{d-x}{a_2},$$

$$\Phi_{i,k}(t)\equiv\alpha_i(t)\varphi'\left(\hat{d}_i+(-1)^{i+1}a_{3-i}t_k\right),\ \Psi_{i,k}(t)\equiv\alpha_i(t)\psi\left(\hat{d}_i+(-1)^{i+1}a_{3-i}t_k\right),$$

$$\mathfrak{F}_{i,k}(t)\equiv\alpha_i(t)\int\limits_{d_k}^{t}f\left(\hat{d}_i+(-1)^{i+1}a_{3-i}(t-\tau),\tau\right)d\tau\in C^{n-k+2}[d_k,d_{k+1}].$$

Здесь u_{3k-2}, u_{3k-1}, u_{3k} – сужения решения u соответственно на Δ_{3k-2}, Δ_{3k-1}, Δ_{3k} вида

$$\Delta_{3k-2} = \left\{(x,t) \in G_k:\ x \geqslant a_1 t_k,\ x + a_2 t_k \leqslant d,\ x \in [0,d]\right\},$$

$$\Delta_{3k-1} = \left\{(x,t) \in G_k:\ x \leqslant a_1 t_k,\ x \in [0, a_1 d_2]\right\},$$

$$\Delta_{3k} = \left\{(x,t) \in G_k:\ x + a_2 t_k \geqslant d,\ x \in [a_1 d_2, d]\right\},$$

$$G_k = [0,d] \times [d_k, d_{k+1}], d_k = (k-1)d/(a_1+a_2), t_k = t - d_k,\ k = \overline{1,\ n},$$

с рекуррентными начальными данными:

$$\varphi_k(x) = u_{3k+j-4}|_{t=d_k}, \psi_k(x) = \partial_t u_{3k+j-4}|_{t=d_k}, x \in [a_1 j d_2,\ (a_1+a_2 j)d_2],\ j = 0, 1,\ k = \overline{2,n},$$

$$\varphi_1(x) = \varphi(x),\ \ \psi_1(x) = \psi(x),\ \ x \in [0,\ d].$$

Разработанным методом в статьях [2] и [3] выведены условия согласования данных задачи:

$$J_{i,1} \equiv \alpha_i(0)[\psi(\hat{d}_i) + (-1)^{i+1} a_i \varphi'(\hat{d}_i)] + \gamma_i(0)\varphi(\hat{d}_i) = \mu_i(0),$$

$$J_{i,2} \equiv \alpha_i'(t)[\psi(\hat{d}_i) + (-1)^{i+1} a_i \varphi'(\hat{d}_i)] + \alpha_i(0)\{a_2[\psi'(\hat{d}_i) + (-1)^{i+1} a_i \varphi''(\hat{d}_i)] + f(\hat{d}_i, 0)\} +$$

$$+\gamma_i'(0)\varphi(\hat{d}_i) + \gamma_i(0)\psi(\hat{d}_i) = \mu_i'(0),$$

$$J_{i,q+1} \equiv \left\langle \alpha_i^{(q)}(0)[\psi(\hat{d}_i) + (-1)^{i+1} a_i \varphi'(\hat{d}_i)] + \gamma_i^{(q)}(0)\varphi(\hat{d}_i) \right\rangle +$$

$$+q\left\langle \alpha_i^{(q-1)}(0)\left\{(-1)^{i+1} a_{3-i}[\psi'(\hat{d}_i) + (-1)^{i+1} a_i \varphi''(\hat{d}_i)] + f(\hat{d}_i, 0)\right\} + \gamma_i^{(q-1)}(0)\psi(\hat{d}_i) \right\rangle +$$

$$+\sum_{s=2}^{q} C_q^s \left\langle \alpha_i^{(q-s)}(0)\left\{((-1)^{i+1} a_{3-i})^s [\psi^{(s)}(\hat{d}_i) + (-1)^{i+1} a_i \varphi^{(s+1)}(\hat{d}_i)] + \right.\right.$$

$$\left. + \sum_{j=0}^{s-1} ((-1)^{i+1} a_{3-i})^j f^{(j;s-j-1)}(\hat{d}_i, 0) \right\} +$$

$$+\gamma_i^{(q-s)}(0)\left\{ \frac{a_{3-i}^s - (-a_i)^s}{a_1+a_2} \psi^{(s-1)}(\hat{d}_i) + a_1 a_2 \frac{a_{3-i}^{s-1} - (-a_i)^{s-1}}{a_1+a_2} \varphi^{(s)}(\hat{d}_i) + \right.$$

$$\left.\left. + \sum_{j=0}^{s-2} \frac{a_{3-i}^{j+1} - (-a_i)^{j+1}}{a_1+a_2} f^{(j;s-j-2)}(\hat{d}_i, 0) \right\} \right\rangle = \mu_i^{(q)}(0), q = 2, 3, \ldots, n-1.$$

$$J_{i,n+1} \equiv a_i \Phi_{i,k}^{(n)}(0) + \Psi_{i,k}^{(n)}(0) + \mathfrak{F}_{i,k}^{(n)}(0) + \gamma_i^{(n)}(0)\varphi(\hat{d}_i) + n\gamma_i^{(n-1)}(0)\psi(\hat{d}_i) +$$

$$+\sum_{s=2}^{n} C_n^s \gamma_i^{(n-s)} \left\langle \frac{a_{3-i}^s - (-a_i)^s}{a_1+a_2} \psi^{(s-1)}(\hat{d}_i) + a_1 a_2 \frac{a_{3-i}^{s-1} - (-a_i)^{s-1}}{a_1+a_2} \varphi^{(s)}(\hat{d}_i) + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=0}^{s-2} \frac{a_{3-i}^{j+1} - (-a_i)^{j+1}}{a_1+a_2} f^{(j;s-j-2)}(\hat{d}_i, 0) \right\rangle = \mu_i^{(n)}(0), \hat{d}_1 = 0, \hat{d}_2 = d, i = 1, 2.$$

Замечание. Впервые получены необходимые и достаточные гладкость и согласование правых частей уравнения (1) при $a_1 \neq a_2$, начальных (2) и граничных (3) условий для классических решений задачи (1)–(3) с характеристическими косыми производными.

Литература

1. Устилко Е. В., Ломовцев Ф. Е. *Глобальная теорема корректности смешанной задачи для классических решений волнового уравнения с нестационарными характеристическими косыми производными ограниченной струны* // Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения — XXXV : материалы Международной Воронежской весенней математической школы (26–30 апреля 2024 г.). Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2024. С. 353 – 354.

2. Устилко Е. В., Ломовцев Ф. Е. *Условия согласования значений характеристической косой производной на конце струны, начальных данных и правой части волнового уравнения* // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2020. Т. 1. С. 30–37.

3. Ломовцев Ф. Е., Устилко Е. В. *Смешанная задача для двухскоростного волнового уравнения с характеристической косой производной на конце полуограниченной струны* // Математические заметки. 2024. Т. 116, № 3, С. 411–429.

СТАБИЛИЗАЦИЯ РЕШЕНИЙ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

А.В. Филиновский[1,2]

[1]Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,
2-я Бауманская ул, 5, 105005 Москва, Российская Федерация,
[2]Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
ул. Колмогорова, 1, Москва, 119991 Москва, Российская Федерация, flnv@yandex.ru

В неограниченной области $\Omega \subset R^n$ с гладкой границей Γ рассмотрим смешанную задачу для волнового уравнения

$$u_{tt} - \Delta u = 0, \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$u(x,0) = f \in \overset{0}{H}{}^1(\Omega), \quad u_t(x,0) = g \in L_2(\Omega), \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$u|_\Gamma = 0. \tag{3}$$

Для решений задачи (1) — (3) из "энергетического класса" ($u \in C([0,+\infty) \to \overset{0}{H}{}^1(\Omega))$, $u_t \in$ $\in C([0,+\infty) \to L_2(\Omega)))$ справедливо представление в виде интеграла Бохнера-Стилтьеса (см. [1], п. 3.1, лемма 3.1, [2], лемма 1):

$$u = \int_0^{+\infty} \cos(\sqrt{\lambda} t) dE(\lambda) f + \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\sqrt{\lambda} t)}{\sqrt{\lambda}} dE(\lambda) g, \tag{4}$$

где $E(\lambda)$ — спектральное разложение единицы, соответствующее оператору $L = -\Delta$ с граничным условием Дирихле в $L_2(\Omega)$.

Определим для задачи (1) — (3) функционал энергии $\mathcal{E}(t) = |||\mathrm{grad}_{n+1} u|||^2_{L_2(\Omega)}$, $\mathrm{grad}_{n+1} u =$ $= (\nabla_x u, u_t)$, для которого выполняется "закон сохранения энергии" $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(0)$, а также функционал локальной энергии $\mathcal{E}_{\Omega'}(t) = |||\mathrm{grad}_{n+1} u|||^2_{L_2(\Omega')}$, где $\Omega' \subset \Omega$.

В нашем случае спектр оператора $\sigma(L) = \sigma_p(L) \cup \sigma_c(L) \subset [0,+\infty)$, где $\sigma_p(L)$ — точечный, а $\sigma_c(L)$ — непрерывный спектр. В ([3], глава 5, лемма 2.4) было показано, что при $\sigma_p(L) = \emptyset$ для любой ограниченной области $\Omega' \subset \Omega$ найдется последовательность $\{t_k\}$, такая, что

$$\lim_{k \to +\infty} \mathcal{E}_{\Omega'}(t_k) = 0. \tag{5}$$

Из представления (4) и тауберовых теорем вытекает следующее утверждение.

Теорема 1.([1] п. 3.4, теорема 3.2, [2], теорема 5) *Если оператор L не имеет точечного спектра, то для всех ограниченных областей* $\Omega' \subset \Omega$

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathcal{E}_{\Omega'}(\tau) d\tau = 0. \tag{6}$$

Можно показать, что из равенства (6) следует (5).

Спектр самосопряженного оператора L называется *абсолютно непрерывным* $\sigma(L) = \sigma_{ac}(L)$, если для любого $h \in L_2(\Omega)$ функция $(E(\lambda)h, h)$ абсолютно непрерывна по λ (см. [1]).

Теорема 2. ([1] п. 3.5, теорема 3.4, [2], теорема 6) *Если спектр оператора L абсолютно непрерывен, то для всех ограниченных областей* $\Omega' \subset \Omega$

$$\lim_{t \to \infty} \mathcal{E}_{\Omega'}(\tau) = 0.$$