

517
И 26

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
БССР

БЕЛОРУССКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В. И. ЛЕНИНА

На правах рукописи

Игнатенко Василий Васильевич

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ УПРАВЛЯЕМОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ
СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

(01.01.02 — дифференциальные и интегральные уравнения)

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Минск 1977

517
И 26

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
БССР

БЕЛОРУССКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В. И. ЛЕНИНА

КНХ

На правах рукописи

Игнатенко Василий Васильевич

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ УПРАВЛЯЕМОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ
СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

(01.01.02 - дифференциальные и интегральные уравнения)

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Минск 1977

БИБЛИОТЕКА БТИ
им. С. М. Гирова

4692ap

Работа выполнена на кафедре методов оптимального управления Белорусского ордена Трудового Красного Знамени государственного университета имени В.И.Ленина.

Научный руководитель — профессор, доктор физико-математических наук Габасов Р.Ф.

Официальные оппоненты: профессор, доктор физико-математических наук Богданов Ю.С. (Белорусский государственный университет);

доцент, кандидат физико-математических наук Коробов В.И. (Харьковский государственный университет).

Ведущее высшее учебное заведение:

Ленинградский ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени государственный университет имени А.А.Жданова.

Защита состоится "16" декабря 1977 г. в 10.00 на заседании специализированного Совета К 056.03.10 по присуждению ученой степени кандидата наук в Белорусском ордена Трудового Красного Знамени государственном университете им.В.И.Ленина (220080, г. Минск, Университетский городок, гл. корпус, комн.206).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Белгосуниверситета им. В.И.Ленина.

Автореферат разослан " _____ " _____ 1977 г.

Ученый секретарь Совета
профессор

Н.А. Прусов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность проблемы. Проблема управляемости динамических систем, впервые поставленная и математически обоснованная в трудах Р.Калмана и Н.Н. Красовского, занимает одно из центральных мест в теории оптимальных процессов. Важность этой задачи объясняется как ролью, которую она играет в общей теории оптимальных процессов, так и её непосредственными практическими приложениями.

Теория управляемости в последние годы развивается в основном по двум направлениям: 1) усложняются объекты исследования (нестационарные линейные системы, нелинейные системы, системы с последействием, системы с распределенными параметрами и т.д.); 2) исследуются новые задачи, связанные с проблемой управляемости (модальная управляемость, реконструируемость систем, синтез систем с минимальным числом входов, управляемость в специальных классах функций и т.д.).

В диссертации исследуется проблема управления с помощью динамических регуляторов. Эта задача является естественным обобщением задачи управления динамическими системами в классах простейших функций, которая в литературе рассматривалась И.Трох , А.Г.Бутковским, Б.Ш.Шкляром и другими авторами.

Объект исследования. Основным объектом исследования работы являются системы с последействием, для которых изучаются две задачи : 1) получение параметрических критериев управляемости в случае систем с распределенным запаздыванием; 2) исследование управляемости с помощью динамических регуляторов.

Научная новизна. Получены необходимые и достаточные условия управляемости систем с распределенным запаздыванием при различных предположениях относительно их параметров. Доказаны критерии управляемости динамических систем (обыкновенных и с последействием) в классе выходных сигналов динамических регуляторов. Описана процедура построения динамических регуляторов по параметрам систем управления.

Практическая ценность. Результаты диссертации могут быть использованы при анализе и синтезе систем управления, динамика которых описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями и дифференциальными уравнениями с последействием.

Аппробация. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на IV Республиканской конференции математиков Белоруссии (г. Минск, июнь 1975 г.), на IV Всесоюзной конференции по теории и приложениям дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом (г. Киев, сентябрь 1975 г.).

Содержание работы неоднократно обсуждалось на Минском общегородском семинаре по процессам управления.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в пяти печатных работах.

Структура и объем работы. Диссертация, выполненная на 107 страницах машинописного текста, состоит из введения, трех глав и приложения. Список литературы содержит 114 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дан краткий обзор основных работ по теории управляемости и сформулированы результаты, полученные в диссертации.

Первая глава диссертации посвящена вопросам управляемости системы

$$\dot{x}(t) = \int_0^t K(\tau) x(t-\tau) d\tau + Bu(t), \quad x(0) = x_0, \quad t > 0, \quad (I)$$

при различных ядрах $K(\tau)$, где x - n -вектор состояния, u - r -вектор управления, B - постоянная $n \times r$ -матрица, $K(\tau)$ - $n \times n$ -матричная функция.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I.1.* Система (I) называется управляемой, если существует момент времени t_1 , $0 < t_1 < +\infty$, такой, что для любых начального состояния x_0 и n -вектора x_1 , найдется кусочно-непрерывное управление $u(t)$, $t \in [0, t_1]$, такое, что соответствующая ему траектория $x(t)$ системы (I) удовлетворяет условию $x(t_1) = x_1$.

* Нумерация определений и теорем соответствует их нумерации в диссертации.

При исследовании управляемости динамических систем важную роль играет понятие определяющего уравнения, введенное Ф.М.Кирилловой и С.В.Чураковой и развитое в работах Р.Габасова, В.В.Крэхотко и др. авторов.

Для системы (I) определяющее уравнение имеет вид

$$X_{z+1}(t) = \int_0^{t+0} K(\tau) e^{-A\tau} d\tau X_z(t) + B U_z(t), \quad (2)$$

$$(\Delta X_z(t) \equiv X_{z+1}(t), e^{A\tau} X_z(t) \equiv X_z(t+\tau))$$

и решается при условиях

$$U_z(t) \equiv 0, t \neq 0 \quad \text{или} \quad z \neq 0; U_0(0) = E_z; \quad (3)$$

$$X_z(t) \equiv 0, t < 0 \quad \text{или} \quad z \leq 0;$$

где E_z - единичная диагональная $z \times z$ -матрица, $X_z(t)$,

$U_z(t)$ - матрицы соответствующих размеров.

В случае, когда ядро $K(\tau)$ квазиполиномиальная матричная функция, т.е.

$$K(\tau) = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{m_i} Q_{ij} \frac{\tau^j}{j!} e^{\alpha_i \tau}, \quad \tau \geq 0,$$

Q_{ij} - постоянные $n \times n$ -матрицы, α_i - константы, определяющее уравнение (2) упрощается и имеет вид

$$X_{z+1}(t) = \sum_{i=0}^z K^{(i)}(0) X_{z-1-i}(t) + B U_z(t). \quad (4)$$

Справедлива

ТЕОРЕМА 2.1. Для управляемости системы (I) необходимо и достаточно, чтобы

$$\text{rang} \{ X_z(0), z = \overline{1, Nn} \} = n,$$

$$X_z(0) - \text{решение определяющего уравнения (4), } N = 1 + \sum_{i=1}^l (m_i + 1)$$

Для аналитической матричной функции $K(\tau)$, $\tau \in R_1$

доказана

ТЕОРЕМА 5.2. Система (I) управляема тогда и только тогда, когда линейно независимы строки матрицы

$$B + \sum_{i=1}^{n-1} \int_0^t \frac{(t-\tau)^i}{i!} D_i(\tau) B d\tau, \quad t \geq 0,$$

где

$$D_1(t) = Y_1(t) + z_1(t) Y_0(t);$$

$$D_i(t) = Y_i(t) - \int_0^t z_i(\tau) Y_{i-1}(t-\tau) d\tau - \dots - \int_0^t z_{i-1}(\tau) Y_1(t-\tau) d\tau -$$

$$- z_i(t) Y_0(t), \quad i = \overline{2, n-1}; \quad z_i(t) = \delta p[\mathcal{K}(t)];$$

$$z_i(t) = \frac{1}{i!} \delta p \left[\int_0^t \mathcal{K}(\tau) D_{i-1}(t-\tau) d\tau \right], \quad i = \overline{2, n};$$

$$Y_i(t) = \int_0^t \mathcal{K}(\tau) Y_{i-1}(t-\tau) d\tau, \quad i = 2, 3, \dots;$$

$$Y_0(t) = E_n; \quad Y_1(t) = \mathcal{K}(t);$$

$$Y_i(t) \equiv 0, \quad \text{если } t < 0 \text{ или } i < 0;$$

$$\delta p[A] \quad - \text{след матрицы } A.$$

Если $\mathcal{K}(\tau)$ - аналитическая матричная функция с элементами, удовлетворяющими условиям (6), то справедлива

ТЕОРЕМА 5.3. Для управляемости системы (I) необходимо и достаточно, чтобы существовало натуральное число $N \geq 2$ такое, что

$$\text{rank} \left\{ B, \sum_{i=1}^{j-1} Y_i^{(j-1-i)}(0) B, \quad j = \overline{2, N} \right\} = n.$$

Вторая глава диссертации посвящена исследованию управляемости обыкновенных динамических систем

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t), \quad x(0) = x_0, \quad (7)$$

выходами динамических регуляторов, где $x - n$ - вектор, $u - r$ - вектор управления $B = \{b_1, b_2, \dots, b_r\} - n \times r$ - постоянная матрица, $A - n \times n$ - постоянная матрица.

Согласно Калману, система (7) называется управляемой, если для любого начального состояния x_0 найдутся число $t_1, 0 < t_1 < +\infty$, и кусочно-непрерывное управление $u(t)$, $0 \leq t \leq t_1$, такие, что траектория $x(t)$ системы (7), соответствующая этому управлению, удовлетворяет условию $x(t_1) = 0$.

Известно, что для управляемости системы (7) необходимо и достаточно, чтобы

$$\text{rang} \{B, AB, \dots, A^{n-1}B\} = n.$$

В диссертации в качестве управлений $u(t) = \{u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)\}$ используются специальные классы функций, состоящих из выходных сигналов

$$u_j(t) = c_j' y_j(t), \quad j = \overline{1, r}, \quad (8)$$

динамических регуляторов

$$\dot{y}_j(t) = D_j y_j(t), \quad y_j(0) = y_{j0}, \quad j = \overline{1, r}, \quad (9)$$

где D_j - постоянные $m_j \times m_j$ - матрицы, $c_j, y_j - m_j$ - векторы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.1. Система (7) называется управляемой группой динамических регуляторов (9), если существует момент времени $t_1, 0 < t_1 < +\infty$, такой, что для любого начального состояния x_0 найдутся начальные состояния y_{j0} , $j = \overline{1, r}$, динамических регуляторов (9), при которых система (7), соответствующая управлением (8), удовлетворяет условию $x(t_1) = 0$.

Группа динамических регуляторов (9) называется наблюдаемой по выходу (8), если при каждом $j, j = \overline{1, r}$, су-

существует момент времени t_1 , $0 < t_1 < +\infty$, такой, что любое начальное состояние y_{j0} можно восстановить по выходу $C'y_j(t)$, $t \in [0, t_1]$.

Таким образом, если в классической постановке для управления системой (7) нужно задавать программу $u(t)$, $t \in [0, t_1]$, то при управлении динамическими регуляторами достаточно задать начальное состояние регуляторов (9). Дальнейшее регулирование системой (7) происходит автоматически.

В диссертации показано, что необходимым условием управляемости системы (7) группой динамических регуляторов (9) является неравенство $\sum_{j=1}^r m_j \geq n$.

Пусть $\text{rank} \{B, AB, \dots, A^{n-1}B\} = m$ и

$$b_1, Ab_1, \dots, A^{n_1-1}b_1, b_2, Ab_2, \dots, A^{n_2-1}b_2, \dots, b_r, Ab_r, \dots, A^{n_r-1}b_r,$$

— базис векторов $A^i b_j$, $j = \overline{1, r}$, $i = \overline{0, n_j-1}$; где n_j — степень минимального полинома вектора b_j относительно линейной оболочки векторов

$$b_1, Ab_1, \dots, A^{n_1-1}b_1, \dots, b_{j-1}, Ab_{j-1}, \dots, A^{n_{j-1}-1}b_{j-1}, j = \overline{2, r},$$

n_j — степень абсолютного минимального полинома вектора b_j .

Размеры динамических регуляторов (9) зададим равными $m_j = n_j$, $j = \overline{1, r}$, тогда справедлива

ТЕОРЕМА 8.1. Для управляемости системы (7) группой динамических регуляторов (9) необходимо и достаточно, чтобы система (7) была управляема по Калману, а группа динамических регуляторов (9) — наблюдаема по выходам (8).

В третьей главе исследуется управляемость систем с последствием по состоянию с помощью группы динамических регуляторов.

В начале главы рассматривается система

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-h) + Bu(t), \quad t > 0, \quad (10)$$

$x_0(\cdot) = \{x(t) = \varphi(t), t \in [-h, 0], x(0) = x_0\}$,
 где $x - n$ - вектор, $u - r$ - вектор управления, $\varphi(t)$ -
 кусочно-непрерывная вектор-функция, A, A_1, B - постоянные ма-
 трисы соответствующих размеров, $h > 0$ - постоянное запаздыва-
 ние.

В качестве управлений $u(t) = \{u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)\}$
 берутся выходные сигналы

$$u_j(t) = c'_{ij} y_{ij}(t), \quad t \in [t_i, t_{i+1}), \quad t_0 = 0, \quad i = \overline{0, k}; \quad j = \overline{1, r}, \quad (11)$$

динамических регуляторов

$$\dot{y}_{ij}(t) = D_{ij} y_{ij}(t), \quad y_{ij}(t_i) = y_{ij0}, \quad i = \overline{0, k}; \quad j = \overline{1, r}. \quad (12)$$

Здесь D_{ij} - постоянные $m_{ij} \times m_{ij}$ - матрицы, c_{ij}, y_{ij} -
 m_{ij} - векторы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.1. Система (10) называется управляемой группой динамических регуляторов (12), если существуют моменты времени $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{k+1} < +\infty$ такие, что для любых n - вектора x_1 и начального состояния $x_0(\cdot)$ найдутся начальные состояния y_{ij0} динамических регуляторов (12), при которых траектория $x(t)$ системы (9.1), соответствующая управлению (11), удовлетворяет условию $x(t_{k+1}) = x_1$.

Определяющее уравнение системы управления (10) имеет вид

$$X_{3,i+1}(zh) = AX_3(zh) + A_1X_3((z-1)h); \quad (13)$$

$$X_1(0) = B; \quad X_1(zh) = 0, z \neq 0; \quad X_3(zh) = 0, \exists z = 0 \text{ или } z < 0.$$

Рассмотрим множество векторов

$$X_{3j}(zh), \quad z = \overline{0, n-1}; \quad j = \overline{2, n}; \quad j = \overline{1, r}; \quad (14)$$

где $X_{3j}(zh) - j$ - ий столбец решения $X_3(zh)$

определяющего уравнения (13). Пусть ранг векторов (14) равен m . Из векторов (14) выделим линейно независимые векторы

$$\begin{aligned} & X_{s_{o11}1}^{(0)}, \dots, X_{s_{o1n_{o1}}1}^{(0)}, \dots, X_{s_{o11}\tau}^{(0)}, \dots \\ & \dots, X_{s_{o1n_{o1}}\tau}^{(0)}, \dots, X_{s_{111}1}^{(h)}, \dots, X_{s_{11n_{11}}1}^{(h)}, \dots \\ & \dots, X_{s_{121}\tau}^{(h)}, \dots, X_{s_{12n_{12}}\tau}^{(h)}, \dots, X_{s_{k11}1}^{(kh)}, \dots \\ & \dots, X_{s_{k1n_{k1}}1}^{(kh)}, \dots, X_{s_{k21}\tau}^{(kh)}, \dots, X_{s_{k2n_{k2}}\tau}^{(kh)}; \end{aligned}$$

$$i+1 \leq s_{ij1} < \dots < s_{ijn_{ij}} \leq n, i = \overline{0, k}; j = \overline{1, \tau}; \sum_{i=0}^k \sum_{j=1}^{\tau} n_{ij} = m, k \leq n-1.$$

Здесь $X_{s_{o1jv}d}^{(0)} = X_{vj}^{(0)}$, $j = \overline{1, \tau}$, $v = \overline{1, n_{oj}}$; n_{oj} ($j = \overline{2, \tau}$) - степень минимального полинома вектора b_j относительно подпространства, натянутого на векторы

$$X_{s_{o11}1}^{(0)}, \dots, X_{s_{o1n_{o1}}1}^{(0)}, \dots, X_{s_{oj-1,1}j-1}^{(0)}, \dots, X_{s_{oj,1,n_{oj}}j-1}^{(0)},$$

n_{o1} - степень абсолютного минимального полинома вектора b_1

$$(X_{s_{ojv}d}^{(0)} = A^{v-1} b_j, j = \overline{1, \tau}, v = \overline{1, n_{oj}}); \text{ вектор}$$

$$X_{s_{\mu j v} d}^{(\mu k)} (\mu = \overline{1, k}, j = \overline{1, \tau}, v = \overline{1, n_{j\mu}}) - \text{первый из}$$

векторов $X_{zj}^{(\mu k)}, z = \overline{s_{\mu j, v-1}+1, n}$, линейно независимый с векторами

$$X_{s_{o11}1}^{(0)}, \dots, X_{s_{o1n_{o1}}1}^{(0)}, \dots, X_{s_{o11}\tau}^{(0)}, \dots, X_{s_{o1n_{o1}}\tau}^{(0)}, \dots$$

$$\dots, X_{s_{\mu-1,11}((\mu-1)h)}, \dots, X_{s_{\mu-1,1n_{\mu-1}}((\mu-1)h)}, \dots$$

$$\dots, X_{s_{\mu-1,21}((\mu-1)h)}, \dots, X_{s_{\mu-1,2n_{\mu-1}}((\mu-1)h)}, \dots$$

$$\dots, X_{s_{\mu,j1}(\mu h)}, \dots, X_{s_{\mu,jv-1}(\mu h)}; X_{s_{\mu,j0}(\mu h)} = 0.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $n_{ij} \neq 0$, $i = \overline{0, k}$, $j = \overline{1, n}$. Размеры динамических регуляторов (I2) и интервалы их работы зададим соотношениями

$$m_{ij} = n_{k-i,j}, \quad i = \overline{0, k}, \quad j = \overline{1, n},$$

$$t_{k,i} - t_{k,i-1} \in [(i-1)h, ih), \quad i = \overline{1, k+1}.$$

Показано, что необходимым условием управляемости системы (I0) группой динамических регуляторов (I2) является неравенство $\sum_{i=0}^k \sum_{j=1}^n m_{ij} \geq n$, и доказана

ТЕОРЕМА 10.1. Для управляемости системы (I0) группой динамических регуляторов (I2) необходимо и достаточно, чтобы система (I0) была относительно управляема в классе кусочно-непрерывных управлений, а группа динамических регуляторов (I2) - наблюдаема по выходам (I1).

Далее с помощью динамических регуляторов (I2) исследована управляемость систем нейтрального типа

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1 x(t-h) + A_2 \dot{x}(t-h) + Bu(t), \quad t > 0, \quad (I6)$$

$$x_0(\cdot) = \{x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-h, 0), \quad x(0) = x_0\},$$

где $x - n$ - вектор, $u - r$ - вектор управления, $h > 0$ - постоянное запаздывание, $\varphi(t)$ - непрерывно-дифференцируемая вектор-функция, A, A_1, A_2, B - постоянные матрицы соответствующих размеров.

Показано, как по параметрам системы (I6) найти количество, размеры и интервалы работы динамических регуляторов (I2), а также доказана

ТЕОРЕМА II.1. Система (16) управляема группой динамических регуляторов (12) тогда и только тогда, когда система (16) относительно управляема в классе кусочно-непрерывных управлений, а группа динамических регуляторов (12) — наблюдаема по выходам (11).

В конце третьей главы диссертации исследуется управляемость системы (1) с помощью динамических регуляторов (9) и доказывается

ТЕОРЕМА I2.1. Для управляемости системы (1) группой динамических регуляторов (9) необходимо и достаточно, чтобы система (1) была управляема в классе кусочно-непрерывных управлений, а группа динамических регуляторов (9) — наблюдаема по выходам (8).

В приложении рассматриваются следующие практические задачи: успокоение гироскопа, управление следящей системой, управление автоколебаниями в генераторе с запаздыванием, успокоение колебаний твердого тела. Задачи исследованы с помощью результатов, полученных в диссертации.

Автор глубоко благодарен научному руководителю Р.Габасову за постоянную помощь и неизменное внимание к работе.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах:

1. Игнатенко В.В., Крахотко В.В. Управляемость линейной системы с последствием. Дифференц.уравн., 10, № 2, 1974
2. Габасов Р., Игнатенко В.В. Управляемость систем с помощью регуляторов. IV Республиканская конференция математиков Белоруссии. Тезисы докладов, часть I, Изд-во Белгосуниверситета им. В.И.Ленина, Минск, 1975 .
3. Габасов Р., Игнатенко В.В., Крахотко В.В., Метельский А.В. К теории управляемости систем с последствием. IV Всесоюзная конференция по теории и приложениям дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Тезисы докладов, Изд-во "Наукова думка", Киев, 1975.
4. Игнатенко В.В. Управляемость динамических систем с помощью регулятора. Вестник БГУ, сер. I, № 2, 1976.
5. Игнатенко В.В. Управляемость систем нейтрального типа со многими входами группой обыкновенных динамических регуляторов. Известия АН БССР, серия физико-математических наук, № 3, 1976.