

К ВОПРОСУ О РАЗЛОЖЕНИИ ВЕКТОРОВ НАД КОЛЬЦОМ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

В различных задачах теории управления возникает необходимость получения векторных равенств. Пусть, например, рассматривается следующая линейная стационарная система управления:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t), t > 0, \quad (1)$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$.

Данная система однозначно определяется парой матриц (A, b) . Система (1) будет, к примеру, модально управляемой при выполнении условия $\det[b, Ab, \dots, A^{n-1}b] \neq 0$. Если же $\det[b, Ab, \dots, A^{n-1}b] = 0$, то для ряда задач может потребоваться следующее векторное равенство

$$A^n d_p = \sum_{j=0}^{k_1-1} \alpha_j A^j b + \sum_{j=0}^{k_2-1} \alpha_{k_1+j} A^j d_1 + \dots + \sum_{j=0}^{k_p-1} \alpha_{k_1+\dots+k_{p-1}+j} A^j d_p, \quad (2)$$

где $k_1 + k_2 + \dots + k_p = n$, $k_1 \in \mathbb{R}$ — максимальное значение, при котором система векторов $b, Ab, \dots, A^{k_1-1}b$ линейно независима, $k_2 \in \mathbb{R}$ — максимальное значение, при котором система векторов $b, Ab, \dots, A^{k_1-1}d_1, Ad_1, A^{k_2-1}d_1$ линейно независима, вектор d_1 — произвольный вектор, линейно независимый с системой векторов $b, Ab, \dots, A^{k_1-1}$, и т.д. Коэффициенты разложения вида (2) $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ находятся из решения системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{bmatrix} b, Ab, \dots, A^{k_1-1}d_1, \dots, A^{k_p-1}d_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{bmatrix} = A^{k_p} d_p, \quad (3)$$

которая, по построению, имеет ненулевой определитель и, следовательно, однозначно разрешима.

Рассмотрим теперь линейную систему управления нейтрального типа с одним сосредоточенным запаздыванием

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h) + A_2 \dot{x}(t-h) + bu(t), t > 0, \quad (4)$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 0, 1, 2$, $b \in \mathbb{R}^n$, $h > 0$.

В частотной области, система (4) однозначно определяется парой матриц $(A(\lambda), b)$, где $A(\lambda) = A_0 + A_1 e^{-\lambda h} + A_2 \lambda e^{-\lambda h}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Элементами матрицы $A(\lambda)$ будут целые функции специального вида — квазиполиномы. Поставим следующую задачу: найти для пары матриц

$(A(\lambda), b)$ разложение вида (2), где $\alpha_0(\lambda), \dots, \alpha_{n-1}(\lambda)$ — целые функции. Непосредственное обобщение результата для системы без запаздывания (1) не приводит к результату, например, рассмотрим следующую пару матриц

$$(A(\lambda), b) = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \lambda e^{-\lambda h} + 1 & 1 & \lambda e^{-\lambda h} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Поскольку вектор $A^2(\lambda)b = (0 \ \lambda e^{-\lambda h} \ 0)'$ линейно зависим с системой векторов $b, A(\lambda)b = (0 \ 0 \ 1)', (0 \ \lambda e^{-\lambda h} \ 0)'$, то $k_1 = 2$. Здесь знак $(\cdot)'$ обозначает транспонирование. Взяв в качестве вектора d_1 вектор $(1 \ 0 \ 0)'$, для нахождения коэффициентов разложения получим систему

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda e^{-\lambda h} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda e^{-\lambda h} + 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

которая имеет нецелое решение $\alpha_0 = 0, \alpha_1 = 1 + \frac{1}{\lambda e^{-\lambda h}}, \alpha_2 = 0$.

Для получения разложения вида (2) над кольцом целых функций предлагается следующий метод. Пусть $k_1 \in \mathbf{R}$ — наибольшее число, при котором система векторов $b, A(\lambda)b, \dots, A(\lambda)^{k_1-1}b$ линейно независима хотя бы при одном $\lambda \in \mathbf{R}$. При этом, очевидно, в матрице $(b, A(\lambda)b, \dots, A(\lambda)^{k_1-1}b)$ найдется хотя бы один ненулевой минор порядка k_1 . Обозначим его через $M_1(\lambda)$. Теперь в качестве вектора d_1 возьмём вектор $M_1(\lambda)d_1$, где d_1 — линейно независим с системой векторов $b, A(\lambda)b, \dots, A(\lambda)^{k_1-1}b$ хотя бы при одном $\lambda \in \mathbf{R}$. Действуя подобным способом, получим систему вида (3), разрешимую над кольцом целых функций. В рассмотренном примере, взяв в качестве вектора d_1 вектор $(\lambda e^{-\lambda h} \ 0 \ 0)'$, получим целое решение $\alpha_0 = 0, \alpha_1 = 1 + \lambda e^{-\lambda h}, \alpha_2 = 0$.