УДК 517.977

А. А. Якименко, канд. физ.-мат. наук (БГТУ, г. Минск)

ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ МОДАЛЬНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ СИСТЕМОЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА С ОДНИМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Рассмотрим следующую систему с запаздывающим аргументом нейтрального типа с одним запаздыванием

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h) + A_2 \dot{x}(t-h) + bu(t),\ t>0, \tag{1}$$

где $h>0$ – постоянное запаздывание, $x(t)\in\mathbb{R}^n$, $u(t)\in\mathbb{R}$, $A_i,\ i=1,2,3$ – матрицы соответствующих размерностей.

К системе (1) присоединим дифференциально-разностный регулятор вида

$$u(t) = q'_{00}x(t) + \sum_{i=0}^{L}\sum_{j=1}^{M} q'_{ij}x^{(i)}(t-jh), \tag{2}$$

где $L\in\mathbb{Z}_+$, $N\in\mathbb{N}$, $x^{(k)}(\cdot)\equiv\frac{d^k x(\cdot)}{dt^k},\ k=1,2,\dots,L,\ x^{(0)}(\cdot)\equiv x(\cdot)$, $q_{ij}\in\mathbb{R}^n$.

Характеристическое уравнение «разомкнутой» системы (1), т.е. с управлением $u(t)\equiv 0$, имеет вид:

$$\det\left[\lambda I - A_0 - e^{-\lambda h}A_1 - \lambda e^{-\lambda h}A_2\right] \equiv \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\alpha_{ij}\lambda^i e^{-\lambda jh} = 0, \tag{3}$$

где числа $\alpha_{ij}, i=0,\dots,n,\ j=0,\dots,n$, вычисляются как функции элементов матриц A_0, A_1, A_2, например, $\alpha_{00}=(-1)^n\det A_0$, $\alpha_{nn}=(-1)^n\det A_2$, $\alpha_{n0}=1$.

Определение. Система (1), (2) называется модально управляемой, если для любых действительных чисел $\tilde{\alpha}_{ij},\ i=0,\dots,n,\ j=0,\dots,n,\ \tilde{\alpha}_{n0}=1,$ найдется управление вида (2) такое, что характеристическое уравнение системы (1), замкнутой регулятором (2), имеет вид (ср. (3)):

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\tilde{\alpha}_{ij}\lambda^i e^{-\lambda jh} = 0.$$

Пусть выполнено следующее условие

$$\det\left[b,\ A_2 b,\ \dots,\ A_2^{n-1}b\right]\neq 0. \tag{4}$$

Тогда (например, [1])имеет место соотношение

$$A_2^n b = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i A_2^i b \tag{5}$$

Рассмотрим матрицу

$$T_1 = [t_1, t_2, ..., t_k, ..., t_n], \tag{6}$$

где векторы $t_1, t_2, ..., t_k, ..., t_n$ определяются следующим образом

$$t_1 = A_2^{n-1} b - \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i A_2^{i-1} b,$$

$$t_2 = A_2^{n-2} b - \sum_{i=2}^{n-1} \beta_i A_2^{i-2} b,$$

$$\vdots$$

$$t_k = A_2^{n-k} b - \sum_{i=k}^{n-1} \beta_i A_2^{i-k} b,$$

$$\vdots$$

$$t_n = b.$$

Нетрудно видеть, что в силу (4) $\det T_1 \neq 0$. Сделаем замену переменных по правилу $x = T_1 y$. Тогда система (1) перепишется в виде

$$\dot{y}(t) = \tilde{A}_0 y(t) + \tilde{A}_1 y(t-h) + \tilde{A}_2 \dot{y}(t-h) + \tilde{b} u(t),\ t > 0 \tag{7}$$

где $\tilde{A}_0 = T_1^{-1} A_0 T$, $\tilde{A}_1 = T_1^{-1} A_1 T$, $\tilde{b} = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1]'$,

$$\tilde{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_{n-2} & \beta_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Замкнем систему (7) обратной связью вида

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t), \tag{8}$$

где $u_1(t) = q_1' \dot{y}(t-h)$, $q_1' = [-\beta_0 \quad -\beta_1 \quad \cdots \quad -\beta_{n-2} \quad -\beta_{n-1}]$.

Тогда система (7) перепишется в виде

$$\dot{y}(t) = \tilde{A}_0 y(t) + \tilde{A}_1 y(t-h) + \tilde{\tilde{A}}_2 \dot{y}(t-h) + \tilde{b} u_2(t),\ t > 0, \tag{9}$$

где матрица $\tilde{\tilde{A}}_2$ отличается от матрицы $\tilde{A}_2$ тем, что у нее в последней строке находятся нули.

Перепишем систему (9) в виде

$$\frac{d}{dt}\left(y(t)-\tilde{\tilde{A}}_2 y(t-h)\right)=\tilde{A}_0 y(t)+\tilde{A}_1 y(t-h)+\tilde{b}u_2(t),\ t>0 \qquad (10)$$

В частотной области система (10) имеет вид

$$\lambda\left(I_n-m\tilde{\tilde{A}}_2\right)Y(\lambda)=\left(\tilde{A}_0+m\tilde{A}_1\right)Y(\lambda)+\tilde{b}U_2(\lambda), \qquad (11)$$

где I_n – единичная матрица порядка n, $\lambda\in\mathbb{C}$, $m=e^{-\lambda h}$ – оператор сдвига.

Обозначим $T_2(m)=I_n-m\tilde{\tilde{A}}_2$. Очевидно, что $\det T_2(m)=1$. Умножим слева обе части системы (11) на матрицу $T_2^{-1}(m)$. Тогда система (11) перепишется в виде

$$\lambda Y(\lambda)=T_2^{-1}(m)\left(\tilde{A}_0+m\tilde{A}_1\right)Y(\lambda)+T_2^{-1}(m)\tilde{b}U_2(\lambda). \qquad (12)$$

Выполним в системе (12) замену $Y(\lambda)=T_2^{-1}(m)Z(\lambda)$. Тогда система (12) запишется в виде

$$\lambda Z(\lambda)=\left(\tilde{A}_0+m\tilde{A}_1\right)T_2^{-1}(m)Z(\lambda)+\tilde{b}U_2(\lambda) \qquad (13)$$

Система (13) запаздывающего типа. По аналогии с [2] отсюда вытекает следующее достаточное условие модальной управляемости системы (1) регулятором типа (2):

Теорема. Для того, чтобы система (1) была модально управляема регулятором вида (2) достаточно выполнения условия

$$\det\left[\tilde{b},\left(\tilde{A}_0+m\tilde{A}_1\right)T_2^{-1}(m)\tilde{b},\ldots,\left(\left(\tilde{A}_0+m\tilde{A}_1\right)T_2^{-1}(m)\right)^{n-1}\tilde{b}\right]\equiv const\neq 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1 Popov, V. M. Invariant description of linear time invariant controllable systems / V. M. Popov // SIAM J.Control. – Vol.10. – 1972. – P.252-264.

2 Асмыкович, И. К. К теории модального управления систем с запаздыванием / И. К. Асмыкович, В. М. Марченко // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. – 1979. – № 3. – С.200-206.

УДК 66.065 А. М. Волк, доц., канд. техн. наук (БГТУ, г. Минск)

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ГАЗОЦЕНТРОБЕЖНОГО РАЗДЕЛЕНИЯ СУСПЕНЗИЙ

Введение. Разделение многофазных систем является составной частью многих технологических процессов в различных отраслях промышленности. Для интенсификации процессов разделения