УДК 517.966

В.В.Игнатенко, В.В.Крахотко

К УПРАВЛЯЕМОСТИ СИСТЕМ НЕРАЗРЕШЕННЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ

(Белорусский технологический институт,
Белорусский государственный университет)

Рассмотрим систему управления

$$S\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t), \tag{1}$$

где x, $b \in R^n$, $u(t)$ - скалярное управление, S, A - постоянные $n \times n$ -матрицы, $\det S = 0$. Особенностью таких систем является то, что часть уравнений связана дифференциальными связями, а часть алгебраическими. Различные задачи управления систем вида (1) изучались в работах [1-3].

В дальнейшем будем предполагать, что система (1) обыкновенная [4], т.е. $\det[\lambda S - A] \not\equiv 0$. При выполнении данного условия не будет ограничением общности считать, что матрицы S и A перестановочны.

При этом система (1) имеет единственное решение [4]

$$x(t) = e^{S_D A t} S S_D z + \int_0^t e^{S_D A(t-\tau)} S_D b u(\tau) d\tau +$$
$$+ (E - SS_D) \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i (SA_D)^i A_D b u^{(i)}(t), \quad t \geq 0, \tag{2}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$x(0) = x_0 = SS_D z + (E - SS_D) \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i (SA_D)^i A_D b u^{(i)}(0). \tag{3}$$

Здесь $z \in R^n$, k - индекс матрицы $S (k = \min_k (\operatorname{rank} S^k = \operatorname{rank} S^{k+1}))$, S_D, A_D - обратные матрицы Драйзиня к матрицам S и A [4]. Из представления решения (2) видно, что управление $u(t)$ предполагается достаточно гладким.

Можно показать, что решение (2) системы (I) является выходом

$$x(t)=MY(t)$$

системы

$$\dot{Y}(t)=\bar{A}Y(t)+B\vartheta(t) \quad . \tag{4}$$

с начальными условиями

$$Y(0)=\{z, u_i(0)=u^{(i-1)}(0),\ 1\leq i\leq k\},\ z\in R^n,$$

где $Y=\{z, u_1, u_2, \ldots, u_k\}$,

$$\bar{A}=\begin{bmatrix} S_D A & S_D B & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & E & \ldots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \ldots & E \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ E \end{bmatrix},$$

$$M=[SS_D, (E-SS_D)A_D B, \ldots, (-1)^{k-1}(E-SS_D)(SA_D)^{k-1}A_D B].$$

О п р е д е л е н и е I. Систему (I) назовем H -управляемой, если для любых x_0 вида (3) и $x_1\in R^n$ существует момент времени t_1, $t_1<+\infty$ и допустимое управление, обеспечивающее свойства $x(0)=x_0$, $Hx(t_1)=x_1$. H – постоянная $n\times n$ -матрица.

О п р е д е л е н и е 2. Систему (I) назовем полностью H-управляемой по состоянию, если для любого $x_0\in R^n$ вида (3) существуют t_1, $t_1<+\infty$ и допустимое управление $u(t)$, $t\geq 0$, такие, что траектория системы (I) обладает свойством $x(0)=x_0$, $Hx(t)\equiv 0$, $t>t_1$.

Справедливы следующие утверждения.

Т е о р е м а I. Для того чтобы система (I) была H -управляемой, необходимо и достаточно, чтобы

$$\operatorname{rank}\{M, H(S_D A)^r S_D B,\ \overline{r=0, n-1}\}=$$

$$= \operatorname{rank}\{H(E-SS_D)(SA_D)^j A_D B,\ j=\overline{0,k-1};\ H(S_D A)^i S_D B,\ i=\overline{0,n-1}\}.$$

Т е о р е м а 2. Система (I) полностью H -управляема по состоянию тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\operatorname{rank}\{\bar{H}\bar{A}^i B,\ i=\overline{0,n+k}\} = \operatorname{rank}\{\bar{H}\},$$

где

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} H M \bar{A}^i \\ i=\overline{0,n+k} \end{bmatrix}$$

Доказательство теоремы следует из представления решения системы (I) в виде (I)-(2) и H -полной управляемости системы (4).

Теперь в качестве управлений $u(t)$ рассмотрим выходы

$$u(t) = c' y(t) \tag{5}$$

динамического регулятора

$$\dot{y}(t) = D y(t),\ y(0) = y_0, \tag{6}$$

где D - постоянная $n \times n$ -матрица, y, $c \in R^n$.

О п р е д е л е н и е 3. Система (I) называется управляемой динамическим регулятором (6), если для любых x_0 вида (3) и $x_1 \in R^n$ существуют t_1, $0 < t_1 < +\infty$ и начальное состояние y_0 регулятора (6), такие, что решение $x(t)$ системы (I), порожденное управлением (5), удовлетворяет условию $x(t_1) = x_1$.

Справедливо следующее утверждение.

Т е о р е м а 3. Система (I) управляема динамическим регулятором (6), если

1) $\operatorname{rank}\{X_i,\ i=\overline{1,n+k}\} = \operatorname{rank}\{SS_D, X_i,\ i=\overline{1,k}\}$;

2) $\operatorname{rank}\begin{bmatrix} c' D^i \\ i=\overline{0,n-1} \end{bmatrix} = n.$

Здесь X_i - решение определяющего уравнения системы (I):

$$S X_{i+1} = A X_i + B u_i;\ X_0 = SS_D;\ u_1 = 1;\ u_i = 0,\ i \neq k.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коложная Т.С. Управляемость общих дифференциальных систем. - Дифференциальные уравнения, 1978, т.14, № 3, с.451-459.
2. L. Pandolfi. Controllabilite and Stabilization for linear systems of algebraic and differential equations. JOTA, 1980, vol. 30, № 4, p. 601-620.
3. A. Favini. Controllability Conditions of Linear Degenerate Evolution Systems. Applied Mathematics and Optimization. 1980, vol 6, p. 153-167.
4. S.L. Campbell, C.D. Meyer. Generalized Inverses of Linear Transformations. Pitmen Press 1979.

УДК 517.977.1

В.И.Янович

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ РЕКОНСТРУИРУЕМОСТИ СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

(Белорусский технологический институт)

Введем обозначения: $\mathcal{S}=\{\beta(\cdot):\beta(m)=$

$$\sum_{j=0}^{K}\beta_j m^{h_j},\ m\in R_0,\ h_j\in R_0,\ 0=h_0<h_1<\ldots<h_K,\ \beta_j\in R,\ j=\overline{0,K},\ K\in N\};$$

$\mathcal{G}$ - множество функций, представленных в виде отношения функций из $\mathcal{S}$; $B^{n\times r}$ - множество $n\times r$ -матриц над $\mathcal{G}$; R_0 - множество неотрицательных действительных чисел.

Пусть $\alpha(\cdot)\in\mathcal{S}$ и рассматриваются две системы:

$$\dot{x}(t)=A(exp(-p))\,x(t), \tag{I}$$