

Система (29) эквивалентна (28). Действительно, положив

$$x(t) = T(\exp(-p))y(t), \quad y(t) = T^{-1}(\exp(-p))x(t),$$

$$T(m) = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 7 & -4 & 0 \\ 3(1+m) & -4(1+m) & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

от системы (29) приходим к системе (28).

ЛИТЕРАТУРА

1. Кириллова Ф. М., Марченко В. М. Функциональные преобразования и некоторые канонические формы в линейных системах с запаздыванием.— Мн., 1978.— 27 с. (Препринт / ИМ АН БССР: № 7 (31)).
2. Марченко В. М., Москowska Б. П., Симеонова Ю. С. Поточечная управляемость систем с последствием.— Дифференц. уравнения, 1978, № 7, с. 1324—1327.
3. Kalman R. E. Kronecker invariant and feedback.— In: Proc. Conf. on Ordin. Diff. Equat., L. Weiss ed., Wath. Res. Cent., 1971, p. 459—471.
4. Янович В. И. К вопросу о реконструкции динамических систем.— Вестн. БГУ, 1977, сер. 1, № 2, с. 21—25.
5. Марченко В. М. Минимальное число входов линейных управляемых систем.— Дифференц. уравнения, 1974, № 10, с. 1789—1796.
6. Бруновский П. О стабилизации линейных систем при постоянном классе постоянно действующих возмущений.— Дифференц. уравнения, 1966, № 6, с. 769—773.

И. К. Асмыкович

О РАСЦЕПИМОСТИ МНОГОВХОДНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

§ 1. ПРОБЛЕМА РАСЦЕПИМОСТИ

Одним из важных свойств линейных систем является свойство автономности [1]. Если система этим свойством не обладает, то возникает вопрос: можно ли с помощью линейной обратной связи сделать систему автономной? Другими словами, развязать управляющие воздействия и с помощью линейной обратной связи изменить систему так, чтобы управление u_i действовало лишь на координату выхода y_i (каждый выход управляется независимо соответствующим входом). В 1964 г. Б. Морган [2] сформулировал эту задачу для обыкновенных линейных систем следующим образом.

Возможно ли для системы

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (1.1)$$

($x — n —$ вектор состояния, $u — m —$ вектор входа, $y — m —$ вектор выхода; $A, B, C —$ постоянные матрицы соответствующих размеров) построить регулятор

$$u(t) = Fx(t) + Gv(t), \det G \neq 0, \quad (1.2)$$

такой, что управление v_i действует только на выход y_i и не действует на остальные выходы. Если такие матрицы F и G существуют, то система (1.1) называется расцепимой регулятором (1.2), а пара матриц $(F, G) —$ расцепляющей парой.

В работе [2] показано, что если система (1.1) задана в некоторой специальной форме, то для ее расцепимости достаточно выполнения условия $\det CB \neq 0$.

Впервые подробное исследование задачи расцепления (развязывания) было проведено в работе [3]. Ее авторы получили необходимые и достаточные условия расцепимости, описали класс расцепляющих матриц, поставили задачу о возможности расцепления системы линейной обратной связью по выходу, рассмотрели вопрос о возможности произвольного расположения спектра одновременно с расцеплением, получили достаточные условия и описали процесс синтеза расцепляющей пары, обеспечивающей расцепление и управление спектром.

Пусть $d_1, d_2, \dots, d_m —$ целые числа, определенные следующим образом:

$$d_i = \min \{j | c_i A^j B \neq 0, j = 0, 1, \dots, n-1\}, \quad (1.3)$$

$$d_i = n-1, \text{ если } \forall j c_i A^j B = 0,$$

где $c_i — i$ -я строка матрицы C . Построим $(m \times m)$ -матрицу

$$B^* = \begin{bmatrix} c_1 A^{d_1} B \\ c_2 A^{d_2} B \\ \vdots \\ c_m A^{d_m} B \end{bmatrix}.$$

Для расцепимости системы (1.1) регулятором (1.2) необходимо и достаточно [3], чтобы

$$\det B^* \neq 0. \quad (1.4)$$

При этом расцепляющая пара может быть взята в виде $F^* = -(B^*)^{-1}A^*, G = (B^*)^{-1}$, где

$$A^* = \begin{bmatrix} c_1 A^{d_1+1} \\ c_2 A^{d_2+1} \\ \vdots \\ c_m A^{d_m+1} \end{bmatrix}.$$

Аналогичный критерий для дискретных систем получен в работе [4]. Для системы (1.1), заданной в пространстве переходных функций, обширное исследование проблемы расщепления провел Е. Джилберт [5]. Им был получен критерий расщепимости, сформулирована задача о так называемом слабом расщеплении (когда в расщепляющем регуляторе присутствуют динамические элементы), рассмотрен вопрос о канонической форме расщепленной системы. Практическая значимость решения задачи расщепления отмечается в работе [6], где, в частности, приведена программа для ЭВМ вычисления расщепляющей пары.

Задача о расщеплении системы (1.1) регулятором $u=f(x)+v$ исследовалась в работе [7], где с помощью преобразования в пространстве состояний получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи, рассмотрен вопрос об асимптотической устойчивости расщепленной системы, поставлена задача групповой расщепимости, для которой приведены достаточные условия разрешимости. Различные задачи теории развязывания для системы (1.1) (без предположения равенства числа входов числу выходов) рассматриваются в обзоре [8], где приведен подробный анализ ранее полученных результатов в этом направлении. Вопрос о расщеплении обыкновенных нестационарных систем исследован в статьях [9, 10], а достаточные условия расщепимости стационарной системы с нелинейностью определенного вида получены в работе [11].

В последующих исследованиях задач расщепления все чаще использовались системы в канонических формах [13—16]. На этом пути получены различные эквивалентные формы критерия развязывания [13, 16], изучен класс расщепляющих матриц, указано количество свободных параметров и приведены уравнения для их нахождения [14], исследованы задача расщепления обратной связью по выходу [12] и задача треугольного расщепления [15], т. е. получение в замкнутой системе переходной матрицы верхнего треугольного вида. Отмечено, что в канонической форме расщепленной системы матрицы B и C имеют специальный вид [13—15]; при некоторых условиях эти матрицы состоят только из нулей и единиц [13].

Задача расщепления для систем с запаздывающим аргументом изучалась в работах [17—19]. В статье [19] на основании результатов работ [3, 10] для нестационарных систем с запаздыванием по управлению и нестационарных систем с запаздыванием по состоянию получены достаточные условия разрешимости задачи расщепления, выраженные через решения определяющих уравнений [1] соответствующих систем, а также рассмотрен вопрос о виде расщепляющих матриц, но результаты имеют трудно обозримый характер. При формальной замене системы с кратными запаздываниями по состоянию

и управлению системой в операторной форме получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи полного расцепления [17], достаточные условия возможности частичного расцепления [18]. При этом расцепляющая пара записывается формально (без выяснения вопроса о физической реализуемости управления).

§ 2. КРИТЕРИЙ РАСЦЕПИМОСТИ

Пусть объект управления описывается системой уравнений

$$\begin{aligned}x(t) &= Ax(t) + A_1x(t-h) + Bu(t), \quad t > 0, \\x(\tau) &= \varphi(\tau), \quad \tau \in [-h, 0), \quad x(0) = x_0, \\y(t) &= Cx(t).\end{aligned}\tag{2.1}$$

Здесь $x(t) \in R_n$; $u(t), y(t) \in R_m$; $h > 0$ — постоянное запаздывание; A, A_1, B, C — постоянные матрицы соответствующих размеров, φ — кусочно-непрерывная n -вектор-функция, $x_0 \in R_n$.

Определение 2.1. Система (2.1) называется расцепимой, если существует регулятор

$$u(t) = f(x(t)) + Gv(t), \quad \det G \neq 0,$$

такой, что в замкнутой системе выход $y_i(t)$ зависит от φ, x_0 и v_i и не зависит от $v_j, j \neq i$.

Поскольку реализация нелинейного функционального регулятора затруднительна, в качестве расцепляющего регулятора обычно (см. § 1) рассматриваются линейные по состоянию регуляторы.

Определение 2.2. Система (2.1) называется расцепимой с помощью линейного по состоянию дискретного регулятора с запаздыванием, если существует регулятор вида

$$\sum_{i=0}^M \alpha_i u(t-ih) = \sum_{j=0}^{\Theta} F_j x(t-jh) + \sum_{k=0}^L G_k v(t-kh), \tag{2.2}$$

$$\det G_0 \neq 0, \quad \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \dots + \alpha_M^2 \neq 0,$$

такой, что система (2.1), (2.2) является расцепленной.

Рассмотрим сначала частный случай системы (2.1) — систему с чистым запаздыванием [1]:

$$\begin{aligned}x(t) &= A_1x(t-h) + Bu(t), \\y(t) &= Cx(t), \quad x(\tau) \equiv 0, \quad \tau \in [-h, 0)\end{aligned}\tag{2.3}$$

(A_1 — $(n \times n)$ -, B — $(n \times m)$ -, C — $(m \times n)$ -постоянные матрицы).

Предположим, что система относительно управляема [1], так как в противном случае в системе можно выделить неуправля-

емую часть [23], которая инвариантна при воздействии обратной связи. Как известно [1], это предположение эквивалентно условию

$$\text{rank } [B : A_1 B : \dots : A_1^{n-m} B] = n. \quad (2.4)$$

По аналогии с соотношением (1.3) введем числа $d_1, d_2, \dots, d_m$:

$$d_i = \min \{j | c_i A_1^j B \neq 0, j = 0, 1, \dots, n-1\}, \quad (2.5)$$

где c_i — i -я строка матрицы C . Нетрудно заметить, что в силу условия (2.4) имеет место неравенство $d_i \leq n-m, i = 1, 2, \dots, m$.

Теорема 2.1. *Для того чтобы система (2.5) была расцепима регулятором*

$$u(t) = Fx(t-h) + Gv(t), \quad \det G \neq 0, \quad (2.6)$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\det B^* = \det \begin{bmatrix} c_1 & A_1^{d_1} & B \\ c_2 & A_1^{d_2} & B \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_m & A_1^{d_m} & B \end{bmatrix} \neq 0. \quad (2.7)$$

Доказательство. Достаточность. В силу соотношения (2.5) имеем

$$\frac{d^j}{dt^j} y_i(t) = c_i A_1^j x(t-jh), \quad j = 0, 1, \dots, d_i; \quad (2.8)$$

$$\frac{d^{d_i+1}}{dt^{d_i+1}} y_i(t) = c_i A_1^{d_i+1} x(t-(d_i+1)h) + c_i A_1^{d_i} B u(t-d_i h),$$

$$i = 1, 2, \dots, m.$$

Положим

$$H = \begin{bmatrix} c_1 & A_1^{d_1+1} \\ c_2 & A_1^{d_2+1} \\ \vdots & \vdots \\ c_m & A_1^{d_m+1} \end{bmatrix}, \quad \frac{d^{d_i+1}}{dt^{d_i+1}} y_i(t) = \hat{y}_i(t),$$

$$i = 1, 2, \dots, m.$$

Так как выполнено условие (2.7), то в качестве расцепляющего регулятора возьмем управление вида

$$u(t) = (B^*)^{-1} (v(t) - Hx(t-h)). \quad (2.9)$$

Из равенств (2.8) получаем $\hat{y}_i = v_i$. Значит, на i -ю компоненту выхода действует только i -я компонента входа. Как показано в работе [5], такой набор равенств означает, что система расцеплена. Так как регулятор (2.9) имеет вид требуемого регулятора (2.6), то достаточность доказана.

Необходимость. Пусть

$$\hat{y}(t) = [\hat{y}_1(t - d_1 h), \hat{y}_2(t - d_2 h), \dots, \hat{y}_m(t - d_m h)].$$

Тогда соотношения (2.8) запишутся в виде

$$\hat{y}(t) = Hx(t - h) + B^*u(t).$$

Подставляя в это равенство регулятор (2.6), получим

$$\hat{y}(t) = (H + BF)x(t - h) + B^*Gv(t). \quad (2.10)$$

Если F выбрана из условия $H + BF = 0$, то предположение $\text{rank } B^* < m$ приведет к противоречию (в равенстве (2.10) меньше чем m независимых входов и m независимых выходов). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 2.1. По аналогии с работой [3] можно показать, что класс расцепляющих матриц имеет вид

$$G = (B^*)^{-1}\Lambda, \quad F = (B^*)^{-1} \sum_{k=0}^{\delta} M_k (CA^k - H).$$

Здесь $\delta = \max d_i$; $M_k \Lambda$ — некоторые диагональные матрицы. Можно также доказать, что если выполняется равенство

$\sum_{i=1}^m d_i + m = n$, то можно одновременно с расцеплением системы управлять характеристиками цепочек ее корней, в частности можно стабилизировать систему (2.3).

З а м е ч а н и е 2.2. Если в выходном канале есть запаздывание, кратное запаздыванию системы, т. е. $y(t) = Cx(t - lh)$, то форма критерия расцепимости системы (2.3) регулятором (2.6) не меняется.

Рассмотрим обыкновенную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = (A + \kappa A_1)x(t) + Bu(t). \quad (2.11)$$

Не ограничивая общности, можно считать систему (2.1) поточно управляемой [22] (в противном случае в системе можно выделить неуправляемую часть [20], которая инвариантна относительно воздействий типа обратной связи). Это предположение эквивалентно требованию [22]

$$\text{rank} [B : (A + \kappa A_1)B : \dots : (A + \kappa A_1)^{n-1}B] =$$

$$= n, \quad \exists \kappa \in R_1. \quad (2.12)$$

Введем числа $d_1, d_2, \dots, d_m$:

$$d_i = \min \{j | c_i (A + \kappa A_1)^j B \neq 0, j = 0, 1, \dots, n-1\}. \quad (2.13)$$

Нетрудно показать, что в силу условия (2.12) выполняются неравенства $d_i \leq n - m, i = 1, 2, \dots, m$.

Теорема 2.2. Для того чтобы система (2.1) была расцепима регулятором (2.2), необходимо и достаточно, чтобы

$$\det B^*(\kappa) = \det \begin{bmatrix} c_1 (A + \kappa A_1)^{d_1} B \\ c_2 (A + \kappa A_1)^{d_2} B \\ \dots \dots \dots \\ c_m (A + \kappa A_1)^{d_m} B \end{bmatrix} \neq 0. \quad (2.14)$$

Доказательство теоремы 2.2 аналогично доказательству теоремы 1 из работы [17].

Пусть

$$\det B^*(\kappa) = a_p \kappa^p + a_{p-1} \kappa^{p-1} + \dots + a_0; \quad (2.15)$$

$$H(\kappa) = \begin{bmatrix} c_1 (A + \kappa A_1)^{d_1+1} \\ c_2 (A + \kappa A_1)^{d_2+1} \\ \dots \dots \dots \\ c_m (A + \kappa A_1)^{d_m+1} \end{bmatrix} = D_1 \kappa^l + \dots + D_1 \kappa + D_0. \quad (2.16)$$

Матрица, присоединенная к $B^*(\kappa)$, записывается в виде

$$\bar{B}^*(\kappa) = M_h \kappa^h + M_{h-1} \kappa^{h-1} + \dots + M_1 \kappa + M_0. \quad (2.17)$$

Тогда параметры регулятора (2.2) можно взять следующими:

$$M = p; \quad \alpha_i = a_i; \quad \Theta = l; \quad F_j = D_j; \quad L = k; \quad G_h = M_h. \quad (2.18)$$

Отметим, что если $a_0 = 0$, а $D_0 \neq 0$, то регулятор (2.2) имеет опережение. Физическая реализация такого регулятора затруднительна. Кроме того, для замыкания системы (2.1) регулятором (2.2) в силу присутствия запаздывания в управлении необходимо решить разностное уравнение. Поэтому целесообразно выяснить вопрос о возможности расцепимости системы (2.1) линейным регулятором с запаздыванием только по состоянию, т. е. регулятор вида

$$u(t) = \sum_{j=0}^{\Theta} F_j x(t - jh) + \sum_{k=0}^L G_k v(t - kh). \quad (2.19)$$

Теорема 2.3. Для того чтобы система (2.1) была расцепимой регулятором (2.19), достаточно, чтобы

$$\det B^*(\kappa) \equiv \text{const} \neq 0. \quad (2.20)$$

Справедливость утверждения следует из соотношений (2.18).

Если $|B^*(\kappa)| \equiv 0$, а $\text{rank } B^*(\kappa) = r < m$, тогда, как доказано в работе [18], с помощью регулятора (2.2) разрешима задача частичного расщепления, т. е. при таком условии можно расщепить r пар входов — выходов. Не ограничивая общности, можно считать, что в $B^*(\kappa)$ линейно независимы первые r строк.

Теорема 2.4. Если r строк матрицы $B^*(\kappa)$ линейно независимы при некотором κ и существует такая $(m-r) \times r$ -матрица $Q(\kappa)$, что

$$\det \bar{B}(\kappa) = \det \left[\begin{array}{c|c} \bar{c}_1(A + \kappa A_1)^{d_1} \bar{B} & \\ \vdots & \\ \bar{c}_r(A + \kappa A_1)^{d_r} \bar{B} & \\ \hline Q(\kappa) & E_{m-r} \end{array} \right] \equiv \text{const},$$

где элементы матрицы $Q(\kappa)$ определяются уравнениями $[\bar{B}(\kappa)\bar{B}^{-1}(\kappa)]_{ij} = 0$, $i = 1, 2, \dots, r$; $j = r+1, \dots, m$, то в системе (2.1) можно расщепить $r < m$ пар входов — выходов регулятором (2.19).

Справедливость этого утверждения является следствием результатов работы [18] и теоремы 2.3.

З а м е ч а н и е 2.1. Теорема 2.4 дает возможность расщепления некоторых пар входов — выходов системы регулятором (2.19) и при невыполнении условия (2.20) и при невыполнении условия (2.14).

П р и м е р ы.

1. Рассмотрим систему с чистым запаздыванием

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} x(t-1) + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u(t),$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

с нулевыми начальными условиями. Для этой системы $d_1=0$, $d_2=1$, $\det B^*=2$. Поэтому она расщепима регулятором (2.6), причем в силу равенства $d_1+d_2+m=3$, одновременно с расщеплением ее можно сделать асимптотически устойчивой.

Применив процедуру синтеза [3] и потребовав, чтобы

характеристики цепочек корней [23] были равны -1 , получим следующий расцепляющий регулятор:

$$u(t) = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 8 \\ -1 & -4 & -8 \end{bmatrix} x(t-1) + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} v(t).$$

Получим систему

$$x(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -16 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} x(t-1) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} v(t),$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t),$$

в которой v_1 действует только на y_1 , v_2 — только на y_2 и характеристическое уравнение имеет вид $\Phi(\lambda) = (\lambda + e^{-\lambda})^3 = 0$.

2. Рассмотрим систему

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} x(t-h) +$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u(t),$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t).$$

Здесь $d_1 = 0$, $d_2 = 1$, $B^*(\kappa) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1+\kappa & 1+3\kappa \end{bmatrix}$. Как показано в работе [17], эта система расцепима регулятором (2.2). Покажем, что, используя условия теоремы 2.4, можно получить, чтобы на первый выход действовал только первый вход с помощью регулятора (2.19).

Найдем матрицу $\bar{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \gamma & 1 \end{bmatrix}$ так, чтобы $[\bar{B}\bar{B}^{-1}]_{12} = 0$. Это условие выполняется при $\gamma = 0$. Тогда [18]

$$u(t) = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 9 \\ 0 & -5 & -9 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 5 & 11 & 7 \\ -5 & -13 & -8 \end{bmatrix} x(t-h) +$$

$$+ \begin{bmatrix} 3 & 6 & 6 \\ -3 & -6 & -6 \end{bmatrix} x(t-2h) + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} v(t).$$

Замкнутая система примет вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -18 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -9 & -23 & -13 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} x(t-h) + \\ & + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -6 & -12 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t-2h) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} v(t), \\ y(t) = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t). \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Качественная теория оптимальных процессов.— М.: Наука, 1971.— 508 с.
2. Morgan B. S. The synthesis of linear multivariable systems by state variable feedback.— IEEE Trans. on Aut. Cont., 1964, v. AC-9, N 5, p. 405—411.
3. Falb P. L., Wolovich W. A. Decoupling in the design and synthesis of multivariable control systems.— IEEE Trans. on Aut. Cont., 1967, v. AC-12, N 6, p. 651—659.
4. Lloyd S. Decoupling a multivariable discrete-time system.— Electr. Letters, 1970, v. 6, N 26, p. 831.
5. Gilbert E. G. The decoupling of multivariable systems by state feedback.— SIAM J. Cont., 1969, v. 7, N 1, p. 50—67.
6. Gilbert E. G., Pivnichy I. R. A computer program for the synthesis of decoupling multivariable feedback systems.— IEEE Trans. on Aut. Cont., 1969, v. AC-14, N 6, p. 652—659.
7. Буякас В. И. О регуляторах, обеспечивающих автономность управляемой системе.— Автоматика и телемеханика, 1973, № 3, с. 5—12.
8. Morse A. S., Wonham W. M. Status of noninteracting control.— IEEE Trans. on Aut. Cont., 1971, v. AC-16, N 6, p. 568—581.
9. Freund E. Design of time-variable multivariable systems by decoupling and by inverse.— IEEE Trans. on Aut. Cont., 1971, v. AC-16, N 2, p. 183—185.
10. Majumdar A. K., Choudhury A. K. On decoupling of linear multivariable systems.— Inter. J. Cont., v. 17, N 2, 1973, p. 225—256.
11. Nazar S., Rekasius Z. V. Decoupling of a class of nonlinear systems.— IEEE Trans. on Aut. Cont., 1971, v. AC-16, N 3, p. 257—260.
12. Howze J. W. Necessary and sufficient condition for decoupling using output feedback.— IEEE Trans. on Aut. Cont., 1973, v. AC-18, N 1, p. 44—46.
13. Kar P. K., Bergman N. I., Aplevich I. D. Decouplable multivariable systems: canonical forms and pole assignment.— Proc. IEE, 1973, v. 120, N 11, p. 1433—1438.
14. Mufti I. H. Some result on the decoupling of multivariable systems.— Inter. J. Cont., 1971, v. 14, N 3, p. 477—485.
15. Descusse I., Lizarzaburu R. Triangular decoupling and pole placement in linear multivariable systems: a direct algebraic approach.— Inter. J. Cont., 1979, v. 30, N 1, p. 139—152.

16. Vardulakis A. I. G., Stoyte P. N. R. An algorithm for decoupling and maximal pole assignment in multivariable systems by use of state feedback.—IEEE Trans. on Aut. Cont., 1979, v. AC-24, N 2, p. 362—365.
17. Tzafestas S. G. and Paraskevopoulos P. N. On the decoupling of multivariable control systems with time delays.—Inter. J. Cont., v. 17, 1973, N 2, p. 405—415.
18. Tzafestas S. G., Pimenides T. G. Partial input-output decoupling in time-delay control systems.—Electr. Letters, 1975, v. 11, N 24, p. 586—588.
19. Iwai Z., Seborg D. E., Fisher D. G., Kobayashi N. Decoupling of linear time-varying systems with time delays in the control variables or state variables.—Inter. J. Cont., 1978, v. 28, N 6, p. 869—888.
20. Асмыкович И. К., Марченко В. М. Управление спектром систем с запаздыванием.—Автоматика и телемеханика, 1976, № 7, с. 5—14.
21. Асмыкович И. К., Марченко В. М. Об управлении спектром многовыходных систем с запаздыванием.—Автоматика и телемеханика, 1980, № 1, с. 5—10.
22. Кириллова Ф. М., Марченко В. М. Функциональные преобразования и некоторые канонические формы в линейных системах с запаздывающим аргументом.—Мн., 1978.—27 с. (Препринт /ИМ АН БССР: № 7 (39)).
23. Асмыкович И. К., Марченко В. М. Об управляемости спектром в системах с чистым запаздыванием.—Вестн. БГУ, 1976, сер. 1, № 3, с. 62—64.

В. В. Карпук

К ПРОБЛЕМЕ ТОЧЕЧНОЙ ВЫРОЖДЕННОСТИ

Проблема управляемости динамических систем, впервые поставленная в работе [1], в дальнейшем интенсивно исследовалась советскими и зарубежными авторами. Развитие теории управляемости шло в нескольких направлениях: с одной стороны, обобщались понятия управляемости, с другой — усложнялись объекты исследования. В работах [2, 3] были получены необходимые и достаточные условия управляемости для ряда систем с запаздыванием. Под управляемостью системы с последствием (относительной управляемостью) понималась возможность перевести траекторию из произвольного начального состояния в произвольную заданную точку. В дальнейших результатах работ [2, 3] были перенесены на более общие системы. К настоящему времени теория относительной управляемости для систем с отклоняющимся аргументом разработана достаточно полно.

Наличие запаздывания вносит существенные особенности в постановку и исследование задач управляемости для систем с последствием. Наряду с задачей относительной управляемости для систем с последствием изучалась также задача нуль-управляемости, в связи с которой Вейсом была поставлена проблема точечной полноты [4]. Он показал, что если соответствующая однородная система точно полна, то кри-