15. **Забелло Л. Е.** К вопросу идеальной наблюдаемости в линейных нестационарных системах с запаздыванием.— Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1979, № 3, с. 207—212.
16. **Калман Р., Фалб П., Арбиб М.** Очерки по математической теории систем.— М.: Мир, 1971.— 473 с.
17. **Летов А. М.** Динамика полета и управление.— М.: Наука, 1969.— 360 с.
18. **Гальперин Е. А.** К задаче о стабилизации управляемых систем.— Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1961, № 6, с. 62—63.

В. В. Игнатенко

УПРАВЛЯЕМОСТЬ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ГРУППОЙ ДИНАМИЧЕСКИХ РЕГУЛЯТОРОВ

Рассмотрим систему управления

$$\dot{x}(t) = \int_0^h K(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau + Bu(t), \quad t > 0,$$
$$x(t) \equiv 0, \quad t \in [-h, 0], \tag{1}$$

где $h > 0$ — постоянное число, $x(t)$ — n-вектор, $u(t)$ — r-вектор управления, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_r\}$ — $n \times r$-матрица, $K(\tau)$ — аналитическая матричная функция.

Относительная управляемость систем вида (1) при различных ядрах $K(\tau)$ исследовалась в работах [1—3], где, в частности, доказано, что исследование случая нулевых начальных условий не ограничивает общности задачи.

В качестве управлений $u(t) = \{u_1(t), u_2(t), \ldots, u_r(t)\}$ возьмем выходы

$$u_j(t) = c'_{ij}\, y_{ij}(t), \quad t \in [t_i, t_{i+1}), \quad t_0 = 0, \quad i = \overline{0, k}, \quad j = \overline{1, r} \tag{2}$$

динамических регуляторов

$$\dot{y}_{ij}(t) = D_{ij}\, y_{ij}(t), \quad y_{ij}(t_i) = y_{ij0}, \tag{3}$$

где D_{ij} — $(m_{ij} \times m_{ij})$-матрица, y_{ij}, c_{ij}, m_{ij} — векторы, $i = \overline{0, k}$, $j = \overline{1, r}$.

Определение 1. Систему (1) назовем управляемой группой динамических регуляторов (3), если существуют моменты времени $t_1 < t_2 < \cdots < t_{k+1} < +\infty$ такие, что для любого n-вектора x_1 найдутся начальные состояния y_{ij0}, $i = \overline{0, k}$, $j = \overline{1, r}$ регуляторов (3) такие, что траектория $x(t)$, $t > 0$, системы (1), соответствующая управлению (2), удовлетворяет условию $x(t_{k+1}) = x_1$.

Ниже показывается, как по параметрам системы (1) найти число регуляторов (3), размеры и интервалы их работы, когда система (1) управляема динамическими регуляторами (3).

Рассмотрим множество векторов $X_{ij}(zh)$, $j = \overline{1, r}$, $i = 1, 2, \ldots$, $z = 0, 1, \ldots$, где $X_{ij}(zh)$ — j-й столбец решения $X_i(zh)$ определяющего уравнения [2]:

$$X_{i+1}(t) = \sum_{\xi=0}^{i} [K^{(\xi)}(0)\, X_{i-1-\xi}(t) - K^{(\xi)}(h)\times$$

$$\times X_{i-1-\xi}(t-h)],\ i = 1, 2, \ldots;$$

$$X_1(0) = B;\ X_1(t) \equiv 0,\ t \neq 0;\ X_k(t) \equiv 0,\ t < 0 \vee k \leqslant 0$$

системы (1).

Поскольку [3] при $z_1 \geqslant n$

$$\operatorname{rank}\{X_i(zh),\ z = \overline{0, n-1},\ i = 1, 2, \ldots\} =$$

$$= \operatorname{rank}\{X_{ij}(zh),\ z = \overline{0, z_1},\ i = 1, 2 \ldots\},$$

то достаточно ограничиться рассмотрением векторов

$$X_{ij}(zh),\ z = \overline{0, n-1},\ j = \overline{1, r},\ i = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

Пусть ранг матрицы, составленной из векторов-столбцов (4), равен m. Выделим из совокупности (4) m линейно независимых векторов следующим образом. Векторы (4) разместим в виде таблицы:

$$\begin{array}{llllll}
X_{11}(0) & X_{31}(0) & X_{41}(0) & \ldots\ X_{n1}(0) & X_{n+1\,1}(0) & \ldots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
X_{1r}(0) & X_{3r}(0) & X_{4r}(0) & \ldots\ X_{nr}(0) & X_{n+1\,r}(0) & \ldots \\
0 & X_{31}(h) & X_{41}(h) & \ldots\ X_{n1}(h) & X_{n+1\,1}(h) & \ldots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & X_{3r}(h) & X_{4r}(h) & \ldots\ X_{nr}(h) & X_{n+1\,r}(h) & \ldots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & \ldots\ X_{n1}((n-1)h) & X_{n+1\,1}((n-1)h) & \ldots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & \ldots\ X_{nr}((n-1)h) & X_{n+1\,r}((n-1)h) & \ldots
\end{array} \tag{5}$$

Просматривая последовательно слева направо векторы строк таблицы (5), выделим из них m линейно независимых:

$$X_{s_{0111}}(0),\ \ldots,\ X_{s_{01n_{01}}1}(0),\ \ldots,\ X_{s_{0r1}r}(0),\ \ldots$$

$$\ldots,\ X_{s_{0rn_{0r}}r}(0),\ \ldots,\ X_{s_{111}1}(h),\ \ldots,\ X_{s_{11n_{11}}1}(h),\ \ldots$$

$$\ldots,\ X_{s_{1r1}r}(h),\ \ldots,\ X_{s_{1rn_{1r}}r}(h),\ \ldots,\ X_{s_{k11}1}(kh),\ \ldots$$

$$\ldots,\ X_{s_{k1n_{k1}}1}(kh),\ \ldots,\ X_{s_{kr1}r}(kh),\ \ldots,\ X_{s_{krn_{kr}}r}(kh); \tag{6}$$

$$i+1 \leqslant s_{ij1} < s_{ij2} < \cdots < s_{ijn_{ij}},\ i=\overline{0,\ k},\ j=\overline{1,\ r};$$

$$\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=1}^{r} n_{ij} = m,\ k \leqslant n-1,$$

где $X_{s_{011}1}(0) = X_{11}(0)$; $X_{s_{012}1}(0)$ — первый из векторов $X_{31}(0)$, $X_{41}(0)$, ..., линейно независимый с вектором $X_{s_{011}1}(0)$; $X_{s_{013}1}(0)$ — первый из векторов $X_{i1}(0)$ $(i=s_{011}+1,\ s_{011}+2,\ \ldots)$, линейно независимый с векторами $X_{s_{011}1}(0)$ и $X_{s_{012}1}(0)$ и т. д.; $X_{s_{01n_{01}}1}(0)$ — последний из векторов первой строки таблицы (5), вошедший в базис (7); $X_{s_{\mu j\nu}j}(\mu h)$ $(\mu=\overline{0,\ k},\ j=\overline{1,\ r},\ \nu=\overline{1,\ n_{\mu j}})$ — первый из векторов $X_{ij}(\mu h)$ $(i=s_{\mu j\nu-1}+1,\ s_{\mu j\nu-1}+2,\ \ldots)\ \times$ $\times\ \mu r+j$-й строки, линейно независимый с векторами

$$X_{s_{011}1}(0),\ \ldots,\ X_{s_{01n_{01}}1}(0),\ \ldots,\ X_{s_{\mu-1\,11}1}((\mu-1)h),\ \ldots$$

$$\ldots,\ X_{s_{\mu-1\,1n_{\mu-1\,1}}1}((\mu-1)h),\ \ldots,\ X_{s_{\mu-1\,r\,1}r}((\mu-1)h),\ \ldots$$

$$\ldots,\ X_{s_{\mu-1\,r\,n_{\mu-1\,r}}r}((\mu-1)h),\ \ldots$$

$$\ldots,\ X_{s_{\mu j1}j}(\mu h),\ \ldots,\ X_{s_{\mu j\nu-1}j}(\mu h).$$

Если i, j-я строка таблицы (5) не содержит векторов из (6), то $n_{ij}=0$. Не ограничивая общности, можно считать, что $n_{ij}\neq 0$, $i=\overline{0,\ k}$, $j=\overline{1,\ r}$.

Рассмотрим матричное уравнение

$$\begin{gathered}\dot F(t) = \int_0^h K(\tau)\,F(t-\tau)\,d\tau,\ t>0;\\ F(0)=E_n;\ F(t)\equiv 0,\ t<0.\end{gathered} \tag{7}$$

Его решение $F(t)$ представляет собой [3] аналитическую на каждом из промежутков $[ph,\ (p+1)h)$, $p=0,\ 1,\ \ldots$, матричную функцию.

По аналогии с работой [4] можно доказать следующее утверждение

Лемма 1. *Для* $t \in [ph, (p+1)h)$, $p = 0, 1, \ldots$

$$F(t)\, b_j = \sum_{z=0}^{p-1} \sum_{l=1}^{r} \sum_{\nu=1}^{n_{zl}} \alpha_{pjzl\nu}(t)\, X_{s_{zl\nu}l}(zh) + $$

$$+ \sum_{l=1}^{j} \sum_{\nu=1}^{n_{pl}} \alpha_{pjpl\nu}(t)\, X_{s_{pl\nu}}(ph), \tag{8}$$

где $\alpha_{pjzl\nu}(t)$ — *некоторые скалярные аналитические функции, удовлетворяющие условиям:*

$$\alpha^{(z)}_{ijij\nu}(ih) = \begin{cases} 0, & z < s_{ij\nu} - 1, \\ 1, & z = s_{ij\nu} - 1, \quad \nu = \overline{1, n_{ij}}, \quad j = \overline{1, r}, \\ & \qquad i = \overline{0, n-1}; \\ a_{ij\nu z}, & z > s_{ij\nu} - 1, \end{cases} \tag{9}$$

$a_{ij\nu z}$ — *некоторые константы;* $z = \overline{0, p}$, $l = \overline{1, r}$, n_{zl} *и* k *определены в наборе (6).*

Положим $m_{ij} = n_{k-ij}$, $i = \overline{0, k}$, $j = \overline{1, r}$ и рассмотрим матрицы-функции

$$\beta_{ijzl\nu}(ih + \rho_i) =$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_{ih}^{ih+\rho_i} \alpha_{ijzl\nu}(\tau)\, c'_{k-ij} \exp(-D_{k-ij}\tau)\, d\tau, \text{ если} \\ z = \overline{0, i-1}, \ l = \overline{1, r} \vee z = i, \ l \leqslant j, \text{ а } \nu = \overline{1, n_{zl}}, \\ 0, \qquad \text{если } z = i, \ l > j, \ \nu = \overline{1, n_{ij}}, \end{cases}$$

$$\Psi_{ijij}(ih + \rho_i) = \begin{Bmatrix} \beta_{ijij1}(ih + \rho_i) \\ \beta_{ijij2}(ih + \rho_i) \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ \beta_{ijijn_{ij}}(ih + \rho_i) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \beta_{ijij\nu}(ih + \rho_i) \\ \nu = \overline{1, n_{ij}} \end{Bmatrix},$$

$\rho_i \in [0, h)$, $i = \overline{0, k}$.

Лемма 2. *Если*

$$\operatorname{rank} \begin{Bmatrix} c'_{k-ij} D^{\nu}_{k-ij} \\ \nu = \overline{0, n_{ij} - 1} \end{Bmatrix} = n_{ij}, \quad i = \overline{0, k}, \quad j = \overline{1, r}, \tag{10}$$

то существуют числа $\rho^0_i \in [0, h)$, $i = \overline{0, k}$, *такие, что*

$$\det \Psi_{ijij}(ih + \rho^0_i) \neq 0, \quad i = \overline{0, k}, \quad j = \overline{1, r}. \tag{11}$$

Доказательство. Из аналитичности $\alpha_{ijij\nu}(t)$ вытекает, что $\Delta_{ij}(\rho_i) = \det \Psi_{ijij}(ih + \rho_i)$ $(j = \overline{1, r})$ — аналитические функции переменного ρ_i, $\rho_i \in [0, h)$, $i = \overline{0, k}$. Вычислим $\Delta_{ij}^{N_{ij}}(0)$. Так как

$$\Delta_{ij}^{(N_{ij})}(0) = \sum_{l_1^{ij} + l_2^{ij} + \cdots + l_{n_{ij}}^{ij} = N_{ij}} \frac{N_{ij}!}{l_1^{ij}!\, l_2^{ij}! \cdots l_{n_{ij}}^{ij}!} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} \dfrac{d^{l_\nu^{ij}}}{d\rho_i^{l_\nu^{ij}}} \beta_{ijij\nu}(ih + \rho_i), \\ \nu = \overline{1, n_{ij}} \end{vmatrix}$$

и в силу (10)

$$\frac{d^{l_\nu^{ij}}}{d\rho_i^{l_\nu^{ij}}} \beta_{ijij\nu}(ih + \rho_i)\Big|_{\rho_i = 0} =$$

$$= \begin{cases} (-1)^{l_\nu^{ij} - s_{ij\nu}} C_{l_\nu^{ij} - 1}^{s_{ij\nu} - 1} c'_{k-ij} D^{l_\nu^{ij} - s_{ij\nu}} \exp(-D_{k-ij} ih) + \\ \quad + \sum\limits_{z=0}^{l_\nu^{ij} - s_{ij\nu} - 1} \bar{a}_{ij\nu z} c'_{k-ij} D_{k-ij}^{z} \exp(-D_{k-ij} ih), \\ \qquad l_\nu^{ij} > s_{ij\nu}, \ \nu = \overline{1, n_{ij}}, \\ 0, \ l_\nu^{ij} < s_{ij\nu}, \ \nu = \overline{1, n_{ij}}, \end{cases}$$

$\bar{a}_{ij\nu z}$ — некоторые константы, $C_n^m = \dfrac{n!}{m!\,(n-m)!}$, то введя обозначения $l_\nu^{ij} - s_{ij} = p_\nu^{ij} - 1$, $i = \overline{0, k}$, $\nu = \overline{1, n_{ij}}$ при $N_{ij} = \sum\limits_{\nu=1}^{n_{ij}} s_{ij\nu} + \dfrac{n_{ij}(n_{ij}+1)}{2}$, имеем

$$\Delta_{ij}^{(N_{ij})}(0) = \sum_{p_1^{ij} + p_2^{ij} + \cdots + p_{n_{ij}}^{ij} = \frac{n_{ij}(n_{ij}+1)}{2}} \times$$

$$\times \frac{N_{ij}!}{(p_1^{ij} + s_{ij1} - 1)!\,(p_2^{ij} + s_{ij2} - 1)! \cdots (p_{n_{ij}}^{ij} + s_{ijn_{ij}} - 1)!} \times$$

$$\times \det \left\{ \begin{array}{c} (-1)^{p_\nu^{ij}-1} C^{s_{ij\nu}-1}_{p_\nu^{ij}+s_{ij\nu}-2} c'_{k-ij} D_{k-ij}^{p_\nu^{ij}-1} \exp(-D_{k-ij}ih) + \\ + \sum_{z=0}^{p_\nu^{ij}-2} \bar{a}_{ij\nu z} c'_{k-ij} D_{k-ij}^{z} \exp(-D_{k-ij}ih) \\ \nu = \overline{1,\ n_{ij}} \end{array} \right\},$$

откуда, учитывая результаты работы [5], получаем

$$\Delta_{ij}^{(N_{ij})}(0) = (-1)^{\frac{n_{ij}(n_{ij}-1)}{2}} \times$$

$$\times \frac{N_{ij}\,!}{(s_{ij1}-1)!\ (s_{ij2}-1)! \cdots (s_{ijn_{ij}}-1)!} \times$$

$$\times \det \left\{ \begin{array}{c} c'_{k-ij} D_{k-ij}^{z} \exp(-D_{k-ij}ih) \\ z = \overline{0,\ n_{ij}-1} \end{array} \right\} \frac{1}{1!\ 2! \cdots (n_{ij}-1)!} \lambda \neq 0;$$

$$\lambda = \det \begin{vmatrix} \frac{1}{s_{ij1}} & \frac{1}{s_{ij1}+1} & \cdots & \frac{1}{s_{ij1}+n_{ij}-1} \\ \frac{1}{s_{ij2}} & \frac{1}{s_{ij2}+1} & \cdots & \frac{1}{s_{ij2}+n_{ij}-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{s_{ijn_{ij}}} & \frac{1}{s_{ijn_{ij}}+1} & \cdots & \frac{1}{s_{ijn_{ij}}+n_{ij}-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\prod\limits_{1 \leqslant \nu < \mu \leqslant n_{ij}} (s_{ij\nu} - s_{ij\mu})(\nu - \mu)}{1!\ 2! \cdots (n_{ij}-1)! \prod\limits_{\nu,\mu=1}^{n_{ij}} (s_{ij\nu} + (\mu - 1))}$$

(по построению базиса (6) $s_{ij\nu} \neq s_{ij\mu}$, $\nu \neq \mu$ и $\det(\exp \times \times (-D_{k-ij}ih)) \neq 0$).

Из аналитичности $\Delta_{ij}(\rho_i)$, $i = \overline{0,\ k}$, $j = \overline{1,\ r}$ вытекает справедливость леммы 2.

Размеры m_{ij} динамических регуляторов (3) и интервалы $[t_i,\ t_{i+1})$ их работы зададим соотношениями:

$$m_{ij} = n_{k-ij},\ i = \overline{0,\ k},\ j = \overline{1,\ r},$$

$$\theta_i = t_{k+1} - t_{k+1-i} \in [(i-1)\,h,\ ih),\ \theta_0 = 0,\ i = \overline{1,\ k+1}, \quad (12)$$
$$j = \overline{1,\ r},$$

где числа n_{k-ij} и k определены при построении базиса (6).

Решение $x(t)$, $t > 0$ системы (1), соответствующее уравнению (2), имеет вид

$$x(t_{k+1}) = \int\limits_0^{t_{k+1}} F(t_{k+1} - \tau) Bu(\tau)\, d\tau =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=1}^{r} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} F(t_{k+1} - \tau) b_j u_j(\tau)\, d\tau =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=1}^{r} \int\limits_{t_{k+1}-t_{i+1}}^{t_{k+1}-t_i} F(\tau) b_j u_j(t_{k+1} - \tau)\, d\tau =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=1}^{r} \int\limits_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} F(\tau) b_j c'_{k-ij} \exp(D_{k-ij}(t_{k+1} - \tau))\, d\tau y_{k-ij0},$$

где $F(\tau)$ — решение уравнения (7).

Следовательно, для управляемости системы (1) группой динамических регуляторов (3) необходимо и достаточно, чтобы существовали числа θ_i^0, $i = \overline{1, k+1}$, удовлетворяющие условиям (12), такие, что для любого n-вектора x_1 разрешима (относительно y_{k-ij0}, $i = \overline{0, k}$, $j = \overline{1, r}$) система линейных уравнений

$$x_1 = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=1}^{r} \int\limits_{\theta_i^0}^{\theta_{i+1}^0} F(\tau) b_j c'_{k-ij} \exp(D_{k-ij}(t_{k+1} - \tau))\, d\tau y_{k-ij0},$$

что равносильно условию

$$\operatorname{rank} \Phi(\theta_1^0, \theta_2^0, \ldots, \theta_{k+1}^0) = n,$$

$$\Phi(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{k+1}) = \tag{13}$$

$$= \left\{ \int\limits_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} F(\tau) b_j c'_{k-ij} \exp(-D_{k-ij}\tau)\, d\tau, \quad i = \overline{0, k}, \quad j = \overline{1, r} \right\}.$$

Здесь переменные θ_i, $i = \overline{1, k+1}$, удовлетворяют соотношениям (12). Из условия (13) видно, что необходимым условием управляемости системы (1) группой динамических регуляторов (3) является неравенство

$$\sum_{i=0}^{k} \sum_{j=1}^{r} m_{ij} \geqslant n.$$

Определение 2. Группу динамических регуляторов (3) назовем наблюдаемой по выходам (2), если при каждых i, j, $i = \overline{0, k}$, $j = \overline{1, r}$, система

$$\dot{y}_{ij}(t) = D_{ij}\, y_{ij}(t)$$

наблюдаема [6] по выходу

$$u_j(t) = c'_{ij}\, y_{ij}(t).$$

Теорема. *Система (1) управляема группой динамических регуляторов (3) тогда и только тогда, когда система (1) относительно управляема в классе кусочно-непрерывных управлений, а группа динамических регуляторов (3) наблюдаема по выходам (2).*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть система (1) управляема группой динамических регуляторов (3). Тогда, очевидно, она относительно управляема [2] в классе кусочно-непрерывных управлений и ранг матрицы, составленной из векторов-столбцов (4), равен n.

Учитывая равенства

$$\exp(-D_{k-ij}\tau) = \\ = \sum_{\nu=0}^{\bar{m}_{k-ij}-1} \gamma_{k-ij\nu}(\tau)\, D^{\nu}_{k-ij}, \quad \bar{m}_{k-ij} \leqslant m_{k-ij} = n_{ij}, \quad i = \overline{0,\ k}, \\ j = \overline{1,\ r} \tag{14}$$

($\gamma_{k-ij\nu}(\tau)$ — скалярные функции), можно записать:

$$\Phi(\theta_1,\ \theta_2,\ \ldots,\ \theta_{k+1}) = \\ = \Bigl\{ \sum_{\nu=0}^{\bar{m}_{k-ij}-1} \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} F(\tau)\, b_j c'_{k-ij}\, \gamma_{k-ij\nu}(\tau)\, D^{\nu}_{k-ij}\, d\tau, \\ i = \overline{0,\ k},\ j = \overline{1,\ r} \Bigr\} = \Bigl\{ \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} F(\tau)\, b_j \gamma_{k-ij\nu}(\tau)\, d\tau,\ i = \overline{0,\ k}, \\ j = \overline{1,\ r},\ \nu = \overline{0,\ \bar{m}_{k-ij} - 1} \Bigr\} \cdot M, \tag{15}$$

$$M = \begin{vmatrix} M_{k1} & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & M_{kr} & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & M_{01} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & M_{0r} \end{vmatrix},$$

$$M_{ij} = \left\{ \frac{c'_{k-ij}\, D^{\nu}_{k-ij}}{\nu = \overline{0,\ \bar{m}_{k-ij} - 1}} \right\},\quad i = \overline{0,\ k},\ j = \overline{1,\ r}.$$

Так как система (1) управляема группой динамических регуляторов (3), то найдутся числа θ_i^0, $i = \overline{1,\ k+1}$, удовлетворяющие условиям (12), такие, что выполняется равенство (13). Из соотношений (13), (15) имеем

$$\operatorname{rank} M \geqslant n. \tag{16}$$

Покажем, что

$$m_{k-ij} = n_{ij},\ i = \overline{0,\ k}, \tag{17}$$

$$\operatorname{rank} M_{ij} = n_{ij},\ i = \overline{0,\ k},\ j = \overline{1,\ r}. \tag{18}$$

Из (6), (12) и (14) следует, что

$$\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=1}^{r} \bar{m}_{k-ij} \leqslant \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=1}^{r} m_{k-ij} = \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=1}^{r} n_{ij} = m = n.$$

Отсюда в силу (16) получаем

$$\operatorname{rank} M = n. \tag{19}$$

Далее, если хотя бы одно из чисел $\bar{m}_{k-ij}$ меньше n_{ij}, $i = \overline{0,\ k}$, $j = \overline{1,\ r}$, то $\sum\limits_{i=0}^{k}\sum\limits_{j=1}^{r} m_{k-ij} < n$, что противоречит (19). Из (17), (19) вытекает справедливость равенств (18), которые означают [6], что группа динамических регуляторов (3) наблюдаема по выходам (2).

Достаточность. Пусть система (1) относительно управляема в классе кусочно-непрерывных управлений, а группа динамических регуляторов (3) наблюдаема по выходам (2). Это означает [2, 6], что ранг матрицы, составленной из векторов-столбцов (4), равен n и выполняются условия (10). Из леммы 1 следует, что при $i = \overline{0,\ k}$, $j = \overline{1,\ r}$

$$\int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} F(\tau)\, b_j c'_{k-ij} \exp(-D_{k-ij}\tau)\, d\tau =$$

$$= -\int_{ih}^{\theta_i} F(\tau)\, b_j c'_{k-ij} \exp(-D_{k-ij}\tau)\, d\tau +$$

$$+ \int_{ih}^{\theta_{i+1}} F(\tau)\, b_j c'_{k-ij} \exp(-D_{k-ij}\tau)\, d\tau =$$

$$= \sum_{\mu=0}^{i-1} \sum_{q=1}^{r} \sum_{\nu=1}^{n_{iq}} X_{s_{\mu q \nu}^{q}}(\mu h)\,[\beta_{ij\mu q\nu}(\theta_{i+1}) - \overline{\beta}_{i-1j\mu q\nu}(\theta_i)] +$$

$$+ \sum_{q=1}^{j-1} \sum_{\nu=1}^{n_{iq}} X_{s_{\mu q \nu}^{q}}(\mu h)\,\beta_{ijiq\nu}(\theta_{i+1}) + \sum_{\nu=1}^{n_{ij}} X_{s_{ij\nu}^{j}}(ih)\,\beta_{ijij\nu}(\theta_{i+1}),$$

где

$$\beta_{ij\mu q\nu}(\theta_{i+1}) = \beta_{ij\mu q\nu}(ih + \rho_i), \quad \rho_i \in [0, h),$$

$$\overline{\beta}_{i-1j\mu q\nu}(\theta_i) = -\int_{\theta_i}^{ih} \alpha_{i-1j\mu q\nu}(\tau)\, c'_{k-ij} \exp(-D_{k-ij}\tau)\, d\tau,$$

$$\mu = \overline{0,\ i}, \quad \nu = \overline{1,\ n_{\mu q}}, \quad q = \begin{cases} \overline{1,\ r} & \text{при } \mu = \overline{0,\ i-2}, \\ \overline{1,\ j} & \text{при } \mu = i-1. \end{cases}$$

Следовательно, матрицу $\Phi(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{k+1})$ можно представить в виде произведения матрицы, составленной из векторов-столбцов (6), на матрицу

$$\Psi(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{k+1}) =$$

$$= \begin{vmatrix} \Psi_{0101}(\theta_1) & \ldots & \Psi_{0r01}(\theta_1) & \ldots & \Psi_{k101}(\theta_{k+1}) & \ldots & \Psi_{kr01}(\theta_{k+1}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & \Psi_{0r0r}(\theta_1) & \ldots & \Psi_{k10r}(\theta_{k+1}) & \ldots & \Psi_{kr0r}(\theta_{k+1}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & \Psi_{k1k1}(\theta_{k+1}) & \ldots & \Psi_{krk1}(\theta_{k+1}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & \Psi_{krkr}(\theta_{k+1}) \end{vmatrix}.$$

Здесь

$$\Psi_{ijij}(\theta_{i+1}) = \Psi_{ijij}(ih + \rho_i), \quad i = \overline{0,\ k}, \quad j = \overline{1,\ r};$$

$$\Psi_{ijiq}(\theta_{i+1}) = \left\{ \begin{matrix} \beta_{ijiq\nu}(\theta_{i+1}) \\ \overline{\nu = 0,\ n_{iq} - 1} \end{matrix} \right\}, \quad q = \overline{0,\ k}, \quad j = \overline{1,\ r};$$

$$\Psi_{ij\mu q}(\theta_{i+1}) =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \beta_{ij\mu q\nu}(\theta_{i+1}) - \overline{\beta}_{i-1j\mu q\nu}(\theta_i) \\ \nu = \overline{0,\ n_{\mu q} - 1} \end{matrix} \right\}, \quad \mu = \overline{0,\ i-1}, \quad q = \overline{1,\ r}.$$

Поскольку

$$\det \Psi(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{k+1}) = \prod_{i=0}^{k} \prod_{j=1}^{r} \det \Psi_{ijij}(\theta_{i+1}),$$

то по лемме 2 найдутся числа $\rho_i^0 \in [0, h)$, $i = \overline{0, k}$, такие, что $\det \Psi(\theta_1^0, \theta_2^0, \ldots, \theta_{k+1}^0) \neq 0$, $\theta_{i+1}^0 = ih + \rho_i^0$, $i = \overline{0, k}$. Так как ранг матрицы, составленной из векторов-столбцов базиса (5), равен *n*, то выполняется равенство (13).

Теорема доказана.

Следствие. Если система (1) управляема группой динамических регуляторов (3), то она управляема этими регуляторами для почти всех t_i, $i = \overline{1, k+1}$, удовлетворяющих условиям (12).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Габасов Р., Кириллова Ф. М., Крахотко В. В.** Управляемость линейных стационарных систем.— Докл. АН СССР, 1972, т. 203, № 3, с. 537—539.

2. **Крахотко В. В., Метельский А. В.** К управляемости систем с распределенным запаздыванием.— Дифференц. уравнения, 1974, т. 10, № 3, с. 419—425.

3. **Игнатенко В. В., Метельский А. В.** Управляемость линейных систем с распределенным запаздыванием.— Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук, 1978, № 3, с. 15—19.

4. **Шкляр Б. Ш.** К проблеме относительной управляемости систем с отклоняющимся аргументом нейтрального типа.— Дифференц. уравнения, 1974, т. 10, № 8, с. 1443—1450.

5. **Игнатенко В. В.** Управляемость систем нейтрального типа со многими входами группой обыкновенных динамических регуляторов.— Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук, 1976, № 3, с. 26—33.

6. **Габасов Р., Кириллова Ф. М.** Качественная теория оптимальных процессов.— М., 1971.— 508 с.

В. М. Марченко

К ТЕОРИИ УПРАВЛЯЕМОСТИ И НАБЛЮДАЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

Системы с последействием с точки зрения их управляемости впервые были рассмотрены в работах [1—3]. С тех пор актуальные вопросы управляемости и наблюдаемости этих систем постоянно находились в поле зрения как советских, так и зарубежных исследователей, и к настоящему моменту эта тема располагает обширной библиографией (см., например, работы [4—8] и библиогр. ссылки к ним).

В математической теории [9] систем без запаздывания основополагающую роль играет понятие состояния динамической системы. Поскольку состояние системы с последействием есть, вообще говоря, элемент функционального пространства, то пространство состояний такой системы в общем случае бес-