то по лемме 2 найдутся числа $\rho_i^0 \in [0, h)$, $i = \overline{0, k}$, такие, что $\det \Psi(\theta_1^0, \theta_2^0, \ldots, \theta_{k+1}^0) \neq 0$, $\theta_{i+1}^0 = ih + \rho_i^0$, $i = \overline{0, k}$. Так как ранг матрицы, составленной из векторов-столбцов базиса (6), равен $n$, то выполняется равенство (13).

Теорема доказана.

Следствие. Если система (1) управляема группой динамических регуляторов (3), то она управляема этими регуляторами для почти всех $t_i$, $i = \overline{1, k+1}$, удовлетворяющих условиям (12).

### ЛИТЕРАТУРА


1. **Габасов Р., Кириллова Ф. М., Крахотко В. В.** Управляемость линейных стационарных систем.— Докл. АН СССР, 1972, т. 203, № 3, с. 537—539.
2. **Крахотко В. В., Метельский А. В.** К управляемости систем с распределенным запаздыванием.— Дифференц. уравнения, 1974, т. 10, № 3, с. 419—425.
3. **Игнатенко В. В., Метельский А. В.** Управляемость линейных систем с распределенным запаздыванием.— Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук, 1978, № 3, с. 15—19.
4. **Шкляр Б. Ш.** К проблеме относительной управляемости систем с отклоняющимся аргументом нейтрального типа.— Дифференц. уравнения, 1974, т. 10, № 8, с. 1443—1450.
5. **Игнатенко В. В.** Управляемость систем нейтрального типа со многими входами группой обыкновенных динамических регуляторов.— Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук, 1976, № 3, с. 26—33.
6. **Габасов Р., Кириллова Ф. М.** Качественная теория оптимальных процессов.— М., 1971.— 508 с.



*В. М. Марченко*


# К ТЕОРИИ УПРАВЛЯЕМОСТИ И НАБЛЮДАЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

Системы с последействием с точки зрения их управляемости впервые были рассмотрены в работах [1—3]. С тех пор актуальные вопросы управляемости и наблюдаемости этих систем постоянно находились в поле зрения как советских, так и зарубежных исследователей, и к настоящему моменту эта тема располагает обширной библиографией (см., например, работы [4—8] и библиогр. ссылки к ним).

В математической теории [9] систем без запаздывания основополагающую роль играет понятие состояния динамической системы. Поскольку состояние системы с последействием есть, вообще говоря, элемент функционального пространства, то пространство состояний такой системы в общем случае бесконечномерно, что затрудняет не только исследование, но и постановку задачи управляемости для систем с запаздыванием. В статье [6] (см. библиогр. к ней) предпринята попытка рассмотреть управляемость системы с запаздыванием по аналогии с интерпретацией Калмана как управление состоянием такой системы, причем в качестве состояний берутся элементы некоторого априорно заданного функционального пространства. В связи с этим отметим, что содержательность теории Калмана [9] определяется тем, что в ней состояние есть минимальная информация о предыстории системы, позволяющая вычислить движение системы в будущем. Это обстоятельство, по существу, осталось без внимания в известных работах по функциональной управляемости систем с запаздыванием, вследствие чего предъявлены завышенные требования к структуре входного устройства управляемой системы с запаздыванием [6, 7] и др. Так, например, в статье [6] рассматривается система

$$\dot{y}(t) = A_0 y(t) + A_1 y(t-h) + Bu(t), \quad t > 0, \tag{0.1}$$

где $A_0$, $A_1$ — $(n \times n)$- , $B$ — $(n \times m)$-постоянные матрицы, $h > 0$.

Система (0.1) с нулевыми начальными условиями называется $M_2$-аппроксимативно управляемой, если существует момент $t_1$, $t_1 > h$, такой, что для любого положительного числа $\varepsilon$, любых $n$-вектора $x_0$ и $n$-вектора-функции $x^1 \in L_2([-h, 0], R^n)$ найдется управление $u$, $u \in L^1_{\mathrm{loc}}$, такое, что соответствующее решение $y(t)$, $t > 0$, системы (0.1) обладает свойством:

$$(y(t_1) - x_0)'(y(t_1) - x_0) +$$
$$+ \int_{-h}^{0} (y(t_1 + \tau) - x^1(\tau))' (y(t_1 + \tau) - x^1(\tau))\, d\tau < \varepsilon.$$

Здесь и далее штрих означает транспонирование. В сформулированном определении фактически рассматривается управляемость по состоянию для системы (0.1), если в качестве пространства состояний взять произведение $R^n \times L_2([-h, 0], R^n) \overset{\mathrm{def}}{=} M_2$. Недостатком данного определения является то обстоятельство, что оно не учитывает специфики системы (0.1), и как следствие этого пространство $R^n \times L_2([-h, 0], R^n)$ (как пространство состояний системы (0.1)) может оказаться чрезмерно широким для описания движения такой системы. В данном случае требование $M_2$-управляемости уже относится не столько к динамике самой системы (0.1), сколько к структуре ее входного устройства. Рассмотрим, например, частный случай системы (0.1), когда $A_1 = 0$. Критерий $M_2$-аппроксимативной управляемости такой системы эквивалентен условию $\operatorname{rank} B=n$. В этом случае теряется смысл системы (0.1) как системы с динамикой $(A_0, A_1)$ и структурой $B$ входного устройства, поскольку при помощи замены $u(t)=B'(BB')^{-1}\times$ $\times(-A_0y(t)+f(y(t), v(t), t))$ систему (0.1) можно привести к системе $\dot{y}(t)=f(y(t), v(t), t)$ с произвольной наперед заданной функцией $f$ и управлением $v$. Данная ситуация объясняется тем, что минимальное пространство состояний для системы (0.1) с $A_1=0$ является конечномерным, что никоим образом не учитывает определение $M_2$-управляемости, где и в случае $A_1=0$ по-прежнему роль пространства состояний играет $M_2$.

Рассмотрим снова систему (0.1). Для того чтобы однозначно вычислить решение $y(t)$, $t>0$, системы, обычно задают начальные условия для нее в виде

$$y(\tau)=\varphi(\tau),\ \tau\in[-h,\ 0[\ ,\ y(0)=\varphi_0\in R^n, \tag{0.2}$$

где $\varphi$ — $n$-вектор-функция из некоторого класса. Понятие начального состояния при этом отождествляется с парой $(\varphi_0, \varphi)$. Нетрудно видеть, что информация (0.2) избыточна для однозначного вычисления $y(t)$ при $t>0$. С этой целью вместо (0.2) достаточно, например, положить

$$A_1y(\tau)=A_1\varphi(\tau),\ \tau\in[-h,\ 0[\ ,\ y(0)=\varphi_0. \tag{0.3}$$

Тогда в качестве начального состояния (сильного состояния) системы можно взять пару $(\gamma_{[-h,\,0]}, \varphi_0)$, где $\gamma_{[-h,\,0]}=\gamma$, $\gamma(\tau)=$ $=A_1\varphi(\tau)$, $\tau\in[-h,\ 0[$ . В случае $A_1=0$ пространство сильных начальных состояний системы (0.1) конечномерно.

Ниже излагается подход к исследованию проблемы управляемости и наблюдаемости систем с последействием, в основе которого лежит понятие состояния, аккумулирующее минимальную информацию о предыстории системы, необходимую для однозначного вычисления движения системы в будущем. Индуцированные этим понятием состояния свойства управляемости и наблюдаемости имеют много общих черт с управляемостью и наблюдаемостью по Калману систем без запаздывания.

## § 1. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ И НАБЛЮДЕНИЯ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим систему дифференциально-разностных уравнений:

$$\dot{x}(t)=f(x_{[t-h,\,t]},\ \dot{x}_{[t-h,\,t]},\ u(t),\ t),\ t>t_0, \tag{1.1}$$

с начальными условиями:

$$x_{[t_0-h,\ t_0]} = \varphi, \ x(t_0+0) = \varphi_0 \in R^n. \tag{1.2}$$

Здесь символ $\gamma_{[a,\ b]}$ означает сужение вектора-функции $\gamma$ на промежуток $[a, b]$; $\varphi \in C$, $C = C([t_0-h, t_0], R^n)$; $C([a, b], R^m)$ — пространство непрерывных на $[a, b]$ $m$-векторов-функций; $u$ — кусочно-непрерывная $r$-вектор-функция (управление); $h$ — величина промежутка запаздывания, $h \geqslant 0$.

Относительно уравнения (1.1) предположим, что решение $x(\tau, t_0, \{\varphi\}, u)$, $\tau > t_0$, системы (1.1) с начальными условиями (1.2), где $\{\varphi\} = (\varphi, \varphi_0) \in C \times R^n$, при каждой кусочно-непрерывной вектор-функции $u$ существует и единственно.

Пусть $\mu$ — неотрицательное число. Начальные условия $\{\varphi\} \in C \times R^n$, $\{\psi\} \in C \times R^n$ отнесем к одному $\mu$-классу: $\{\varphi\} L_\mu \{\psi\}$, если соответствующие решения системы (1.1) «слипаются» при $t > t_0 + \mu$ для каждого кусочно-непрерывного управления $u$, т. е.:

$$\{\varphi\} L_\mu \{\psi\} \Longleftrightarrow \forall u, \ \forall \tau > t_0 + \mu \Rightarrow x(\tau, t_0, \{\varphi\}, u) = x(\tau, t_0, \{\psi\}, u).$$

Аналогично

$$\{\varphi\} L_\infty \{\psi\} \Longleftrightarrow \forall u, \ \exists t_1(u), \ \forall \tau \geqslant t_1(u) > t_0 \Rightarrow x(\tau, t_0, \{\varphi\}, u) = x(\tau, t_0, \{\psi\}, u).$$

Нетрудно видеть, что бинарное отношение $L_\mu (0 \leqslant \mu \leqslant \infty)$ есть соотношение эквивалентности и множество $C \times R^n$ начальных условий системы (1.1) разбивается на непересекающиеся классы эквивалентностей, множество которых обозначим через $C \times R^n / L_\mu$ и назовем множеством возможных начальных $\mu$-состояний системы (1.1).

Множество $n$-векторов-функций $x(\cdot, t_0, {}_\mu\{\varphi\}, u) = \{x(\cdot, t_0, \{\varphi\}, u) \mid \varphi \in {}_\mu\{\varphi\} \in C \times R^n / L_\mu\}$ со значениями $x(\tau, t_0, {}_\mu\{\varphi\}, u)$, $\tau \geqslant t_0 - h$, будем называть $\mu$-решением системы (1.1), соответствующим начальному $\mu$-состоянию ${}_\mu\{\varphi\}$ и управлению $u$. Здесь $x(\cdot, t_0, \{\varphi\}, u)$ — вектор-функция со значениями $x(\tau, t_0, \{\varphi\}, u)$, $\tau \geqslant t_0 - h$; $x(\tau, t_0, \{\varphi\}, u) = \varphi(\tau)$, $\tau \in [t_0 - h, t_0]$; $x(t_0 + 0, t_0, \{\varphi\}, u) = \varphi_0$; ${}_\mu\{\varphi\} = \{\{\psi\} \mid \{\psi\} L_\mu \{\varphi\}\}$.

В случае $\mu = +\infty$ $\mu$ — решение будем называть слабым, в случае $\mu = 0$ — сильным.

Введем обозначения $(\tau \geqslant 0)$: ${}_\mu\{\varphi\}_{\tau,\ u} = (x_{[t_0+\tau-h,\ t_0+\tau]}(\cdot, t_0, {}_\mu\{\varphi\}, u), x(t_0 + \tau + 0, t_0, {}_\mu\{\varphi\}, u))$, где $x_{[t_0+\tau-h,\ t_0+\tau]}(\cdot, t_0, {}_\mu\{\varphi\}, u)$ — сужение $\mu$-решения $x(\cdot, t_0, {}_\mu\{\varphi\}, u)$ на промежуток $[t_0 + \tau - h, t_0 + \tau]$;

$${}_\mu X_\tau = \{{}_\mu\{\varphi\}_{\tau,\ u} \mid \forall u_{[t_0,\ +\infty[}, \ {}_\mu\{\varphi\} \in C \times R^n / L_\mu\}.$$

Множество ${}_\mu X_\tau$ назовем множеством возможных $\mu$-состояний системы (1.1) в момент $\tau$, его элементы—возможными $\mu$-состояниями в момент $\tau$. Ясно, что ${}_\mu X_0 = C \times R^n / L_\mu$.

Определение 1.1. Систему (1.1) назовем $\mu$-управляемой ($\mu > 0$), если для произвольного начального ${}_\mu\{\varphi\} \in {}_\mu X_0$ и конечного $(\psi, \psi_0) \in {}_\mu X_{\mu+h}$ $\mu$-состояний системы (1.1) найдется кусочно-непрерывное управление $u$ такое, что

$$x(\tau, t_0, {}_\mu\{\varphi\}, u) \equiv \psi(\tau), \quad \tau \in [t_0 + \mu, t_0 + \mu + h],$$

$$x(t_0 + \mu + h + 0, t_0, {}_\mu\{\varphi\}, u) = \psi_0.$$

Систему (1.1) будем называть слабо управляемой, если для любых начальных $\infty$-состояний ${}_\infty\{\varphi\}$, ${}_\infty\{\psi\}$, кусочно-непрерывного управления $v_{[t_0, +\infty[}$ найдутся момент времени $t_1$, $t_1 > t_0$, и кусочно-непрерывное управление $u_{[t_0, +\infty[}$ такое, что

$$x(\tau, t_0, {}_\infty\{\varphi\}, u) \equiv x(\tau, t_0, {}_\infty\{\psi\}, v), \quad \tau \geqslant t_1.$$

Таким образом, смысл $\mu$-управляемости заключается в возможности перевода за время $\mu$ $\mu$-решения системы (1.1) из произвольного начального $\mu$-состояния в произвольное конечное $\mu$-состояние; слабая управляемость означает возможность перевода за конечное время воздействием управления каждого слабого решения на произвольное наперед заданное слабое решение.

Рассмотрим теперь систему (1.1) с выходом:

$$y(t, t_0, \{\varphi\}, u) = c(x_{[t-h, t]}, u(t), t), \quad t > t_0. \tag{1.3}$$

Определение 1.2. Систему (1.1), (1.3) назовем $\mu$-наблюдаемой ($\mu \geqslant 0$), если для каждых начальных условий $\{\varphi\}$, $\{\psi\}$ и кусочно-непрерывного управления $u_{[t_0, +\infty[}$ из того, что $y(t, t_0, \{\varphi\}, u) \equiv y(t, t_0, \{\psi\}, u)$, $t \geqslant t_0 + \mu$, вытекает $\{\varphi\} L_\mu \{\psi\}$. Систему будем называть слабо наблюдаемой, если

$$\forall \{\varphi\}, \ \forall \{\psi\}, \ \forall u, \ \exists t_1 (t_1 > t_0); \ \forall t (t \geqslant t_1),$$

$$y(t, t_0, \{\varphi\}, u) \equiv y(t, t_0, \{\varphi\}, u) \Rightarrow \{\varphi\} L_\infty \{\psi\}.$$

**2. Линейные стационарные системы со многими запаздыв а ниями по состоянию.** Пусть дана система управления:

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=0}^{l} A_j x(t - h_j) + Bu(t), \quad t > t_0 = 0, \tag{1.4}$$

с выходом

$$y(t) = Cx(t). \tag{1.5}$$

Здесь $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^r$, $y(t) \in R^m$, $t > 0$; $B$, $C$, $A_j$, $j = 0$ $1, \ldots, l$, —постоянные матрицы соответствующих размеров; $h_i$,

$i=0,\ 1,\ \ldots,\ l,$ — постоянные запаздывания, $0=h_0<\cdots$ $\cdots<h_l=h$.

Будем говорить, что система (1.4) $\mu$-достижима из нуля, если она $\mu$-управляема в смысле определения 1.1, где начальное состояние ${}_\mu\{\varphi\}$ равно нулевому элементу из ${}_\mu X_0$; если $(\psi,\ \psi_0)$ есть нуль из ${}_\mu X_{\mu+h}$, то такую $\mu$-управляемую систему будем называть нуль-$\mu$-управляемой.

Систему (1.4), (1.5) назовем линейно $\mu$-наблюдаемой $(\mu>0)$, если для любой непрерывной $n$-вектор-функции $p$ и $g\in R^n$ соотношение

$$\int\limits_0^\mu \nu'(t)\,y(t)\,dt=g'x(\mu)+\sum_{i=0}^{l}\int\limits_{\mu}^{\mu+h_i}\rho'(\tau)\,A_i x(\tau-h_i)\,d\tau \quad (1.6)$$

выполняется при некоторой кусочно-непрерывной $m$-вектор-функции $\nu_{[0,\ \mu]}$ вдоль любого решения $x(\tau)=x(\tau,\ 0,\ \{\varphi\},\ 0)$, $\tau\in[0,\ \mu]$, системы (1.4).

Лемма 1.1. *Предложение «система (1.4) $\mu$-управляема» эквивалентно каждому из следующих положений:*

*1) система (1.4) нуль-$\mu$-управляема;*

*2) система (1.4) $\mu$-достижима из нуля;*

*3) для любых ${}_\mu\{\varphi\}$, $\beta\in{}_\mu X_\mu$ найдутся $\{\hat\varphi\}\in{}_\mu\{\varphi\}$, $(\psi,\ \psi_\mu)\in\beta$ и кусочно-непрерывное управление $u_{[0,\ +\infty[}$ такие, что сужение на $[\mu-h,\ \mu]$ соответствующего решения $x(\cdot,\ 0,\ \{\hat\varphi\},\ u)$ совпадает с $\psi$;*

*4)* $\forall\,{}_\mu\{\varphi\}\in{}_\mu X_0,\ \forall\,\beta\in{}_\mu X_\mu,\ \forall\,\{\hat\varphi\}\in{}_\mu\{\varphi\},\ \exists\,(\psi,\ \psi_\mu)\in\beta,\ \exists\,u\Rightarrow$ $\Rightarrow x_{[\mu-h,\ \mu]}(\cdot,\ 0,\ \{\hat\varphi\},\ u)=\psi.$

Доказательство. Решение системы (1.4) запишем в виде [12]:

$$x(t,\ 0,\ \{\varphi\},\ u)=s(t,\ \{\varphi\})+\int\limits_0^t K(t-\tau)\,Bu(\tau)\,d\tau, \quad (1.7)$$

где матрица-функция $K(t)$, $t>0$, удовлетворяет уравнению

$$\frac{dK(t)}{dt}=\sum_{j=0}^{l}A_jK(t-h_j)$$

с начальными условиями: $K(+0)=I_n$, $K(\tau)\equiv 0$, $\tau\leqslant 0$ ($I_n$ — единичная $(n\times n)$-матрица); $s(t,\ \{\varphi\})=K(t)\,\varphi_0+\sum\limits_{i=0}^{l}\int\limits_{h-h_i}^{h}K(t+h-$ $-h_i-\tau)\,A_i\varphi(\tau-h)\,d\tau,\ t>0.$

Из определения (1.1) вытекает, что система (1.4) $\mu$-управляема тогда и только тогда, когда для любых ${}_\mu\{\varphi\}\in{}_\mu X_0$, ${}_\mu\{\psi\}\in$

$\ni_\mu X_0$, $v_{[0,+\infty[}$ существует кусочно-непрерывное управление $u_{[0,+\infty[}$ такое, что $x(\tau, 0, {}_\mu\{\varphi\}, u) \equiv x(\tau, 0, {}_\mu\{\psi\}, v)$, $\tau \in [\mu, \mu+h]$; отсюда, учитывая (1.7), имеем: $x(\tau, 0, {}_\mu\{\varphi-\psi\}, u-v) \equiv 0$, $\tau \in [\mu, \mu+h]$, или $x(\tau, 0, 0, u) \equiv x(\tau, 0, {}_\mu\{\psi-\varphi\}, v)$, $\tau \in [\mu, \mu+h]$, откуда следует справедливость свойств 1), 2) леммы 1.1. Справедливость свойств 3), 4) является следствием интегрального представления (1.7) и того факта, что $\mu$-решение системы (1.4) «слипается» при $\tau \geqslant \mu$ в одну вектор-функцию. Лемма 1.1 доказана.

Замечание 1.1. При доказательстве леммы 1.1. использовано лишь то обстоятельство, что решение (1.7) системы (1.4) линейно зависит от $\{\varphi\}$ и $u$. Поэтому лемма 1.1 может быть обобщена на более общие по сравнению с (1.4) системы (1.1), обладающие указанной линейностью.

Теорема 1.1 (принцип двойственности). *Система (1.4), (1.5) линейно $\mu$-наблюдаема тогда и только тогда, когда система*

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=0}^{l} A_j' x(t-h_j) + C'v(t), \quad t > 0, \tag{1.8}$$

*$\mu$-достижима из нуля.*

Доказательство. Преобразуем левую и правую части соотношения (1.6), используя (1.7). Имеем:

$$\int_0^\mu \nu'(t)\, y(t)\, dt = \int_0^\mu \nu'(t)\, Cx(t)\, dt = \int_0^\mu \nu'(t)\, C \Big(K(t)\varphi_0 +$$

$$+ \sum_{i=0}^{l} \int_{h-h_i}^{h} K(t+h-h_i-\tau) A_i \varphi(\tau-h)\, d\tau\Big)\, dt =$$

$$= \int_0^\mu \nu'(t)\, CK(t)\, dt\varphi_0 + \sum_{s=1}^{l} \int_{h-h_s}^{h-h_{s-1}} \sum_{i=s}^{l} \int_0^\mu \nu'(t) \times$$

$$\times CK(t+h-h_i-\tau) A_i dt \varphi(\tau-h)\, d\tau, \tag{1.9}$$

$$g'x(\mu) + \sum_{i=0}^{l} \int_\mu^{\mu+h_i} p'(t) A_i x(t-h_i)\, dt =$$

$$= g'\Big(K(\mu)\varphi_0 + \sum_{i=0}^{l} \int_{h-h_i}^{h} K(\mu+h-h_i-\tau) A_i \varphi(\tau-h)\, d\tau\Big) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{l} \int_\mu^{\mu+h_i} p'(t) A_i \Big(K(t-h_i)\varphi_0 + \sum_{j=0}^{l} \int_{h-h_j}^{h} K(t+h-h_i-h_j-\tau) \times$$

$$\times A_j\varphi(\tau-h)\,d\tau\Big)\,dt=\Big(g'K(\mu)+\sum_{i=0}^{l}\int_{\mu}^{\mu+h_i}p'(t)\times$$

$$\times A_iK(t-h_i)\,dt\Big)\varphi_0+\sum_{s=1}^{l}\int_{h-h_s}^{h-h_{s-1}}\Big(\sum_{j=s}^{l}g'K(\mu+h-h_j-\tau)\,A_j+$$

$$+\sum_{j=s}^{l}\sum_{i=0}^{l}\int_{\mu}^{\mu+h_i}p'(t)\,A_iK(t+h-h_i-h_j-\tau)\times$$

$$\times A_jdt)\,\varphi(\tau-h)\,d\tau\Big)\,dt. \tag{1.10}$$

Поскольку равенство (1.6) справедливо для любых $\varphi_0\in R^n$, $\varphi\in C$, то из (1.6) с учетом (1.9), (1.10) получаем:

$$\int_0^{\mu}\nu'(t)\,CK(t)\,dt=g'K(\mu)+\sum_{i=0}^{l}\int_{\mu}^{\mu+h_i}p'(t)\,A_iK(t-h_i)\,dt,$$

$$\sum_{i=s}^{l}\int_0^{\mu}\nu'(t)\,CK(t+h-h_i-\tau)\,A_idt=$$

$$=\sum_{j=s}^{l}\Big(g'K(\mu+h-h_j-\tau)\,A_j+\sum_{i=0}^{l}\int_{\mu}^{\mu+h_i}p'(t)\times$$

$$\times A_iK(t+h-h_i-h_j-\tau)\,A_jdt\Big),\quad t\in[h-h_s,\ h-h_{s-1}],$$

$s=1,\ \ldots,\ l$. Вводя обозначения $\psi(\tau-h)=p(\mu+h-\tau)$, $\nu(\tau)=v(\mu-\tau)$, имеем:

$$\int_0^{\mu}K'(\mu-\tau)\,C'v(\tau)\,d\tau=K'(\mu)\,g+$$

$$+\sum_{i=0}^{l}\int_{h-h_i}^{h}K'(\mu+h-h_i-\tau)\,A_i'\,\psi(\tau-h)\,d\tau=$$

$$=\gamma(\mu,\ 0,\ (\psi,\ g),\ 0), \tag{1.11}$$

$$\sum_{i=s}^{l}A_i'\gamma(t-h_i,\ 0,\ 0,\ v)\equiv\sum_{i=s}^{l}A_i'\,\gamma(t-h_i,0,\ (\psi,\ g),0), \tag{1.12}$$

$t\in[\mu+h_{s-1},\ \mu+h_s]$, $s=1,\ \ldots,\ l$, где $\gamma(\cdot,0,(\psi,g),\ v)$ — решение системы

$$\dot{\gamma}(t) = \sum_{j=0}^{l} A_j' \gamma(t-h_j) + C'v(t), \quad t > 0, \tag{1.13}$$

с начальными условиями: $\gamma_{[-h,\,0]} = \psi$, $\gamma(+0) = g$.

Поскольку $\psi$ и $g$ произвольны, то справедливость соотношений (1.11), (1.12) равносильна $\mu$-достижимости системы (1.13), с одной стороны, а с другой (на основании (1.9), (1.10)) — линейной $\mu$-наблюдаемости системы (1.4), (1.5), что и завершает доказательство теоремы 1.1.

Лемма 1.2. $L_\infty \sim L_{nh}$.

Для доказательства утверждения достаточно проверить, что $\{\varphi\} L_\infty \{\psi\} \Rightarrow \{\varphi\} L_{nh} \{\psi\}$. Если $\{\varphi\} L_\infty \{\psi\}$, то, как следует из (1.7), существует число $t_1$, $t_1 > 0$, такое, что $x(t, 0, \{\varphi - \psi\}, 0) \equiv 0$, $t \geqslant t_1$. Отсюда, переходя к изображениям по Лапласу, заключаем, что $(\hat{\varphi} = \varphi - \psi)$

$$X(p) = \left(pI_n - \sum_{j=0}^{l} A_j \exp(-ph_j)\right)^{-1} \hat{s}(p) \tag{1.14}$$

— целая функция конечной степени [13] $\left(\hat{s}(p) = \int\limits_0^{+\infty} \exp(-pt) \times \right.$ $\times\, s(t, \{\hat{\varphi}\})\, dt$. Нетрудно видеть, что тип целой функции (1.14) не превосходит $nh$. Отсюда на основании теоремы Винера—Пэли для целых функций конечной степени имеем: $x(t, 0, \{\varphi - \psi\}, 0) \equiv 0$, $t \geqslant nh$, откуда $\{\varphi\} L_{nh} \{\psi\}$. Лемма 1.2 доказана.

Пусть $K$ — множество комплексных чисел.

Лемма 1.3. *Для слабой наблюдаемости системы (1.4), (1.5) необходимо и достаточно, чтобы*

$$\operatorname{rank}\left[\lambda I_n - \sum_{j=0}^{l} A_j' \exp(-\lambda h_j) \vdots C'\right] = n$$

*для любого* $\lambda \in K$.

Доказательство. *Необходимость.* Допустим противное: существует комплексное число $\lambda_1$ и вектор $g \neq 0$ такие, что $g'C' = 0$, $g'\left[\lambda_1 I_n - \sum_{j=0}^{l} A_j \exp(-\lambda_1 h_j)\right] = 0$. Тогда вектор-функция $x(t) = g \exp(\lambda_1 t)$, $t > 0$, будет решением системы (1.4). Имеем: $y(t) = Cx(t) = Cg \exp(\lambda_1 t) \equiv 0$, $t \geqslant 0$. Отсюда $\operatorname{Re}(g \exp \times$ $\times (\lambda_1 t))$ и $\operatorname{Im}(g \exp(\lambda_1 t))$, $t \geqslant 0$, являются решениями системы (1.4) при $u(t) \equiv 0$, $t \geqslant 0$, с выходом $y(t) \equiv 0$, $t \geqslant 0$. В силу слабой наблюдаемости системы (1.4) $(\operatorname{Re}(g \exp(\lambda_1 t), t \in [-h, 0]; \operatorname{Re} g)$ и $(\operatorname{Im}(g \exp(\lambda_1 t), \operatorname{Im} g)$ принадлежат нулевому слабому начальному состоянию, т. е. $\exists\, t_1 > 0$ такое, что $g \exp(\lambda_1 t) \equiv 0$, $t \geqslant t_1$, что невозможно, так как $g \neq 0$. Полученное противоречие доказывает необходимую часть утверждения.

*Достаточность*. Пусть $y(t, 0, \{\varphi\}, u) \equiv y(t, 0, \{\psi\}, u)$, $t \geqslant t_1 > 0$. Тогда $y(t, 0, \{\varphi - \psi\}, 0) \equiv 0$, $t \geqslant t_1$. Отсюда, переходя к изображениям по Лапласу, с учетом теоремы Винера — Пэли заключаем, что вектор-функция

$$Y(p) = \int_0^{+\infty} \exp(-pt)\, y(t, 0, \{\varphi - \psi\}, 0)\, dt =$$

$$= C\left(pI_n - \sum_{j=0}^{l} A_j \exp(-ph_j)\right)^{-1} \hat{s}(p), \quad p \in K, \tag{1.15}$$

есть целая функция конечной степени ($\hat{s}(p)$ — Лаплас-образ начальных условий $\{\varphi - \psi\}$). Поскольку по условию

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} pI_n - \sum\limits_{j=0}^{l} A_j \exp(-ph_j) \\ C \end{bmatrix} = n$$

для любого $p \in K$, то найдется $n \times (n+m)$-матрица $D(p)$ ($\det \times \times D(p) \neq 0$ для любого комплексного $p$) такая, что

$$D(p)\begin{bmatrix} pI_n - \sum\limits_{j=0}^{l} A_j \exp(-ph_j) \\ C \end{bmatrix} = I_n, \quad p \in K,$$

или

$$D(p)\begin{bmatrix} I_n \\ C\left(pI_n - \sum\limits_{j=0}^{l} A_j \exp(-ph_j)\right)^{-1} \end{bmatrix} \hat{s}(p) =$$

$$= \left(pI_n - \sum_{j=0}^{l} A_j \exp(-ph_j)\right)^{-1} \hat{s}(p)$$

при каждом комплексном числе $p$. Отсюда, учитывая (1.15), получаем, что $\left(pI_n - \sum\limits_{j=0}^{l} A_j \exp(-ph_j)\right)^{-1} \hat{s}(p)$, $p \in K$, — целая функция конечной степени. Возвращаясь к оригиналам, на основании теоремы Винера—Пэли имеем: $\exists\, t_2 > 0$, $t \geqslant t_2 \Rightarrow x(t, 0, \{\varphi - \psi\}, 0) \equiv 0$, т. е. $\{\varphi\}\, L_\infty \{\psi\}$. Лемма 1.3 доказана.

Лемма 1.4. *Если система (1.4), (1.5) $\mu_1$-наблюдаема, то она и $\mu_2$-наблюдаема при $\mu_2 > \mu_1$.*

Доказательство. Пусть $y(t, 0, \{\varphi\}, u) \equiv y(t, 0, \{\psi\}, u)$, $t \geqslant \mu_2$, $\forall u$. Тогда $y(t, t_0, \mu_1\{\varphi\}_{t_0, u}, u) \equiv y(t, t_0, \mu_1\{\psi\}_{t_0, u}, u)$, $\forall u$, $t \geqslant t_0 + \mu_1$, где $t_0 = \mu_2 - \mu_1$. Поскольку по условию система $\mu_1$-управляема при $t_0 = 0$, то она в силу стационарности $\mu_1$-управляема и при $t_0 = \mu_2 - \mu_1$.

Поэтому из последнего соотношения вытекает, что при каждом $u_{[0, +\infty[}$ $x(t, 0, \{\varphi\}, u) \equiv x(t, 0, \{\psi\}, u)$, $t \geqslant t_0 + \mu_1 = \mu_2 - \mu_1 + \mu_1 = \mu_2$, т. е. $\{\varphi\} L_\infty \{\psi\}$. Таким образом, $y(t, 0, \{\varphi\}, u) \equiv y(t, 0, \{\psi\}, u)$, $\forall u$, $t \geqslant \mu_2$, $\Rightarrow \{\varphi\} L_{\mu_2} \{\psi\}$, что и доказывает лемму 1.4.

Суммируя сказанное, приходим к утверждению:

Теорема 1.2. *Пусть $\mu > nh$. Предложение «система (1.8) $\mu$-управляема» эквивалентно каждому из следующих утверждений:*

*1) система (1.8) слабо управляема;*

*2)* $\operatorname{rank}\left[\lambda I_n - \sum\limits_{j=0}^{l} A_j' \exp(-\lambda h_j) \vdots C'\right] = n, \ \forall \lambda \in K;$

*3) система (1.4), (1.5) слабо наблюдаема;*

*4) система (1.4), (1.5) $nh$-наблюдаема;*

*5) система (1.4), (1.5) линейно $\mu$-наблюдаема;*

*6) для каждых $\{\varphi\} \in {}_\mu X_0$, $\{\psi\} \in {}_\mu X_0$ из соотношения $y(t, 0, \{\varphi\}, 0) \equiv y(t, 0, \{\psi\}, 0)$, $t > 0$, вытекает $\{\varphi\} L_\infty \{\psi\}$.*

Доказательство. Нетрудно видеть, что система (1.8) слабо управляема в том и только в том случае, когда она полностью управляема [1, 2]. В работе [10] показано, что если эта система обладает свойством полной управляемости, то она вполне управляема за время $nh + \varepsilon$, где $\varepsilon$ — произвольное наперед заданное положительное число, что и доказывает утверждение 1). Утверждение 2) вытекает из утверждения 1) и результатов работы [10]; 3) следует из леммы 1.3 с учетом результатов работы [10]; 4) является следствием леммы 1.2; 5) вытекает из утверждения 4) с учетом теоремы 1.1 и леммы 1.4; 6) доказывается по аналогии с доказательством достаточности утверждения леммы 1.4 с учетом утверждения 1).

## § 2. ПОТОЧЕЧНАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ И НАБЛЮДАЕМОСТЬ

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим линейную стационарную систему со многими запаздываниями:

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=0}^{l} A_j x(t - h_j), \quad t > 0. \tag{2.1}$$

Предположим, что непосредственным измерениям доступна величина (выход)

$$y(t)=\sum_{j=0}^{l} C_j x(t-h_j),\ t>0. \qquad (2.2)$$

Здесь $C_j$ $(j=0,\ 1,\ \ldots,\ l)$ — постоянные $(q\times n)$-матрицы; смысл остальных обозначений тот же, что и в системе (1.4).

Пусть $0=\beta_0<\ \ldots\ <\beta_\gamma$, $\gamma$ — фиксированное натуральное число. На каждом из промежутков $[\beta_j-h,\ \beta_j]$ зададим для системы (2.1) начальные условия в виде:

$$x(\tau)=\varphi_j(\tau),\ \tau\in[\beta_j-h,\ \beta_j],\ x(\beta_j+0)]=x_j\in R^n, \qquad (2.3)$$

где $\varphi_j$ — кусочно-непрерывная на $[\beta_j-h,\ \beta_j]$ $n$-вектор-функция, $j=0,\ 1,\ \ldots,\ \gamma$. Решение системы (2.1) при начальных условиях (2.3) обозначим через $x_j(\tau)$, $\tau>\beta_j$. Пусть далее

$$y_j(t)=\begin{cases}\sum\limits_{i=0}^{l} C_i x_j(t-h_i),\ t\geqslant 0;\\ x_j(t)=\sum\limits_{i=0}^{l}\int\limits_{\beta_j-h}^{\beta_j} K(t-\tau-h_i)\,A_i\varphi_j(\tau)\,d\tau,\ t<\beta_j,\end{cases}$$

$K(t)$ — матрица из формулы (1.7).

Введем в рассмотрение линейный функционал $\Phi_{t_1}$: $C([0,\ t_1],$ $R^q)\times C([-h,\ \beta_\gamma],\ R^n)\to R^1$, $\Phi_{t_1}(y_j,\ \varphi_j)=\int\limits_0^{t_1}\nu(t)\,y_j(t)\,dt+$ $+\sum\limits_{s=0}^{l}\int\limits_{\beta_j-h_s}^{\beta_j}\omega_s(t)\,\varphi_j(t)\,dt$, где компоненты векторов-строк $\nu$ и $\omega$ будем считать кусочно-непрерывными функциями.

Определение 2.1. При заданных $(n\times\xi)$-матрицах $H_j$, $j=0,\ 1,\ \ldots,\ \gamma$, систему (2.1), (2.2) назовем $H_j(j=0,\ \overline{\gamma})$-наблюдаемой в точках $\beta_0,\ \ldots,\ \beta_\gamma$, если существует число $t_1$, $\beta_\gamma<t_1<+\infty$, такое, что для любых $n$-векторов $p_j$, $j=0,$ $1,\ \ldots,\ \gamma$, найдутся векторы-функции $\nu'(t)$, $t\in[0,\ t_1]$; $\omega_s'(\tau)$, $\tau\in[-h,\ \beta_\gamma]$, такие, что

$$\Phi_{t_1}(y_j,\ \varphi_j)=p_j' x_j$$

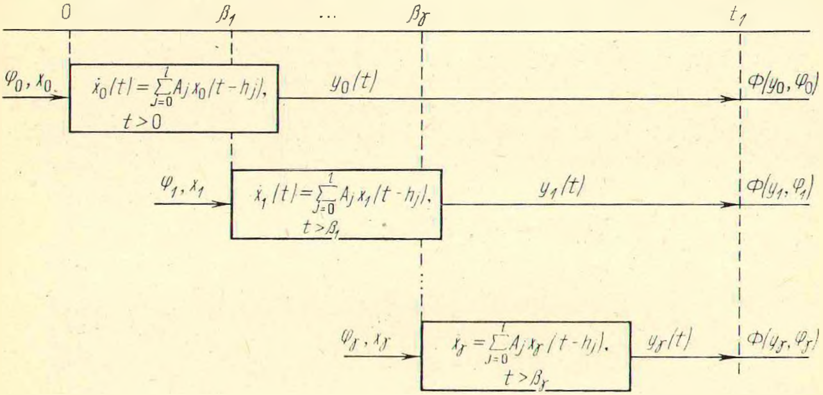
(где $x_j=x(\beta_j+0)=H_j z_j$) для любых $z_j\in R^\xi$, $\varphi_j\in C([\beta_j-h,$ $\beta_j],\ R^n)$, $j=0,\ 1,\ \ldots,\ \gamma$.

Если $H_j=I_n$, $j=0,\ \ldots,\ \gamma$, то такую $H_j(j=0,\ \overline{\gamma})$-наблюдаемую в точках $\beta_0,\ \ldots,\ \beta_\gamma$ систему (2.1) будем называть системой, наблюдаемой в точках $\beta_0,\ \ldots,\ \beta_\gamma$.

Определение 2.2. Систему (2.1), (2.2) назовем $\alpha$-поточечно наблюдаемой, если она наблюдаема в любых точках $\beta_0, \ldots, \beta_\gamma$, $0=\beta_0<\ldots<\beta_\gamma\leqslant\alpha$, при любом натуральном числе $\gamma$.

Определение 2.3. Систему (2.1), (2.2) назовем поточечно наблюдаемой, если она $\alpha$-поточечно наблюдаема при каждом $\alpha$, $\alpha\geqslant 0$.

Схематично процесс наблюдения можно изобразить следующим образом (см. рисунок).




Если эту схему наделить физическим содержанием, интерпретируя векторы-функции $y_j$, $j=0, \ldots, \gamma$, как выходы конкретных физических реализаций (серийных моделей) системы (2.1), то смысл процесса поточечного наблюдения заключается в построении однотипных моделей $\Phi_{t_1}(\cdot, \cdot)$ наблюдающего устройства, восстанавливающих (в некоторый одинаковый для всех моделей момент времени $t_1$) по известным векторам-функциям $y_j$ (выходам) и $\varphi_j$ (начальным условиям) неизвестное начальное условие $x_j$, $j=0, 1, \ldots, \gamma$.

**2. Исследование поточечной наблюдаемости системы (2.1), (2.2).** Пусть $X_k(t)$ ($k\geqslant 1$, $t\geqslant 0$)—решение определяющего уравнения [4]:

$$X_{k+1}(t)=\sum_{j=0}^{l}X_k(t-h_j)A_j+\sum_{j=0}^{l}C_jU_k(t-h_j)$$

с начальными условиями: $X_k(t)=0$, $k<0$ или $t<0$; $U_k(t)=0$, если $k^2+t^2\neq 0$; $U_0(0)=I_r$.

Введем обозначения:

$$S=\{s_0, s_1, s_2, \ldots \mid 0=s_0<s_1<\ldots, s=\sum_{\tau=1}^{l_1}h_{j_\tau},$$

$$j_\tau \in \{0,\ 1,\ \ldots,\ l\},\ l_1 = 1,\ 2,\ \ldots\},$$

$$\check{S} = \{\check{s}_0,\ \check{s}_1,\ \check{s}_2,\ \ldots \mid 0 = \check{s}_0 < \check{s}_1 < \ldots,\ \check{s} = \sum_{\tau_1=1}^{l_1} h_{j_{\tau_1}} - \sum_{\tau_2=1}^{l_2} h_{j_{\tau_2}},$$

$$\check{s} \geqslant 0,\ j_{\tau_i} \in \{0,\ 1,\ \ldots,\ l\},\ i = 1,\ 2;\ l_1 = 1,\ 2,\ \ldots;\ l_2 = 1,\ 2,\ \ldots\}.$$

По аналогии с работой [15] справедлива

Лемма 2.1. *При каждом $i$, $i = 0,\ 1,\ \ldots$, справедливо тождество:*

$$\left(\sum_{j=0}^{l} m^{h_j} C_j\right) \left(\sum_{j=0}^{l} m^{h_j} A_j\right)^i \equiv \sum_{j_1=0}^{l} \sum_{j_2=0}^{j_1} \cdots \sum_{j_{i+1}=0}^{j_i} m^{\overset{\circ}{\sum}_{s=1}^{i+1} h_{j_s}} \times$$

$$\times X_{i+1}\left(\overset{\circ}{\sum_{s=1}^{i+1}} h_{j_s}\right) \equiv \sum_{j=0}^{+\infty} m^{s_j} X_{i+1}(s_j),\ m \geqslant 0;\ j_0 = l, \quad (2.4)$$

*где символ $^\circ\Sigma$ означает, что в соответствующую сумму подобные члены входят только однажды, например, если при некоторых $l_1$, $l_2$, $l_1 < l_2$, $\sum_{s=1}^{l_1} h_{j_s} = \sum_{s=1}^{l_2} h_{\tau_s}$, $j_1 \geqslant j_2 \geqslant \ldots \geqslant j_{l_1}$, $\tau_1 \geqslant \tau_2 \geqslant \ldots \geqslant \tau_{l_2}$, $j_s \in \{0,\ 1,\ \ldots,\ l\}$, $\tau_\eta \in \{0,\ 1,\ \ldots,\ l\}$, $s = 1,\ 2,\ \ldots,\ l_1$; $\eta = 1,\ 2,\ \ldots,\ l_2$, то $\sum_{s=1}^{l_2} h_{\tau_s}$ в правую часть первого из равенств (2.4) не входит, а ряд в (2.4) при каждом $i$ представляет собой конечную сумму, так как $X_i(s) = 0$, если $s > (i-1)h$.*

Доказательство. Проверим справедливость тождества при $i = 0$. Имеем

$$\left(\sum_{j=0}^{l} m^{h_j} C_j\right) \left(\sum_{j=0}^{l} m^{h_j} A_j\right)^0 \equiv \sum_{j=0}^{l} m^{h_j} X_1(h_j) \equiv \sum_{j=0}^{+\infty} m^{s_j} X_1(s_j).$$

Допустим теперь, что тождество имеет место для $i = k$. Тогда для $i = k + 1$ получаем

$$\left(\sum_{j=0}^{l} m^{h_j} C_j\right) \left(\sum_{j=0}^{l} m^{h_j} A_j\right)^{k+1} \equiv \left(\sum_{j=0}^{l} m^{h_j} C_j\right) \left(\sum_{j=0}^{l} m^{h_j} A_j\right)^{k} \times$$

$$\times\left(\sum_{j=0}^{l} m^{h_j} A_j\right) \equiv \left(\sum_{j_1=0}^{l} \sum_{j_2=0}^{j_1} \cdots \sum_{j_{k+1}=0}^{j_k} m^{\overset{\circ}{\sum}_{s=1}^{k+1} h_{j_s}} X_{k+1}\left(\overset{\circ}{\sum_{s=1}^{k+1}} h_{j_s}\right) \times\right.$$

$$\times\left(\sum_{j_{k+2}=0}^{l} m^{h_{j_{k+2}}} A_{j_{k+2}}\right) \equiv \sum_{j_1=0}^{l} \sum_{j_2=0}^{j_1} \cdots \sum_{j_{k+2}=0}^{j_{k+1}} m^{\overset{\circ}{\sum}_{s=1}^{k+2} h_{l_s}} \times$$

$$\times \sum_{\tau=0}^{l} X_{k+1}\left(\overset{\circ}{\sum_{s=1}^{k+2}} h_{j_s} - h_\tau\right) A_\tau \equiv$$

$$h_\tau = \overset{\circ}{\sum_{s=1}^{k+2}} h_{j_s} - \sum_{s=1}^{k+1} h_{\nu_s},$$

$$\nu_s \in \{0,\ 1,\ \ldots,\ l\},\ s=1,\ \ldots,\ k+1.$$

$$\equiv \sum_{j_1=0}^{l} \sum_{j_2=0}^{j_1} \cdots \sum_{j_{k+2}=0}^{j_{k+1}} m^{\overset{\circ}{\sum}_{s=1}^{k+2} h_{j_s}} X_{k+2}\left(\overset{\circ}{\sum_{s=1}^{k+2}} h_{j_s}\right) \equiv$$

$$\equiv \sum_{j=0}^{+\infty} m^{s_j} X_{k+2}(s_j).$$

Справедливость леммы 2.1 установлена.

Лемма 2.2 (обобщенная теорема Гамильтона—Кэли). *Имеют место соотношения*

$$X_{n+\gamma+1}(s_\eta) = -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j_1=0}^{l} \sum_{j_2=0}^{j_1} \cdots \sum_{j_i=0}^{j_{i-1}} r_{j_1,\ \ldots,\ j_i} X_{n+\gamma-i+1} \times$$

$$\times\left(s_\eta - \sum_{\tau=1}^{i} h_{j_\tau}\right),$$

$\gamma = 0,\ 1,\ \ldots,\ \eta = 0,\ 1,\ \ldots,$ *где* $r_{j_1,\ \ldots,\ j_i}$ *— коэффициенты характеристического уравнения:*

$$\Psi(\lambda,\ \exp(-\lambda)) = \det\left[\lambda I_n - \sum_{j=0}^{l} A_j \exp(-\lambda h_j)\right] =$$

$$= \lambda^n + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j_1=0}^{l} \sum_{j_2=0}^{j_1} \cdots \sum_{j_i=0}^{j_{i-1}} r_{j_1,\ \ldots,\ j_i} \lambda^{n-i} \times$$

$$\times \exp\left(-\lambda \sum_{s=1}^{i} h_{j_s}\right) = 0$$

*системы (2.1).*

Доказательство. На основании теоремы Гамильтона — Кэли имеем

$$\Psi\left(\left(\sum_{j=0}^{l} m^{h_j} A_j\right)^{\gamma},\ m\right) \equiv 0,\ m \geqslant 0,$$

откуда, умножая слева на $\sum_{j=0}^{l} m^{h_j} C_j$, получаем

$$\left(\sum_{j=0}^{l} m^{h_j} C_j\right)\left(\sum_{j=0}^{l} m^{h_j} A_j\right)^{n+\gamma} +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j_1=0}^{l}\sum_{j_2=0}^{j_1}\cdots\sum_{j_i=0}^{j_{i-1}} r_{j_1,\ \ldots,\ j_i}\left(\sum_{j=0}^{l} m^{h_j} C_j\right)\times$$

$$\times\left(\sum_{j=0}^{l} m^{h_j} A_j\right)^{n+\gamma-i} m^{\sum\limits_{s=1}^{i} h_{j_s}} \equiv 0,\ m \geqslant 0,$$

или, учитывая лемму 2.1, имеем

$$\sum_{j_1=0}^{l}\sum_{j_2=0}^{j_1}\cdots\sum_{j_{n+\gamma+1}=0}^{j_{n+\gamma}} m^{\overset{\circ}{\sum}\limits_{s=1}^{n+\gamma+1} h_{j_s}} X_{n+\gamma+1}\left(\overset{\circ}{\sum_{s=1}^{n+\gamma+1}} h_{j_s}\right) +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j_1=0}^{l}\sum_{j_2=0}^{j_1}\cdots\sum_{j_i=0}^{j_{i-1}} r_{j_1,\ \ldots,\ j_i}\sum_{\nu_1=0}^{l}\sum_{\nu_2=0}^{\nu_1}\cdots\sum_{\nu_{n+\gamma-i+1}=0}^{\nu_{n+\gamma-i}}\times$$

$$\times\, m^{\sum\limits_{s=1}^{i} h_{j_s}} X_{n+\gamma-i+1}\left(\sum_{s=1}^{n+\gamma-i+1} h_{j_s}\right) m^{\overset{\circ}{\sum}\limits_{s=1}^{n+\gamma-i+1} h_{j_s}} \equiv 0.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $m$ и учитывая равенство $X_k(t)=0,\ t>(k-1)h$, убеждаемся в справедливости леммы 2.2.

Следствие 2.1. Имеет место равенство:

$$\operatorname{rank}[X_k'(s_j),\ k=1,\ 2,\ \ldots;\ j=0,\ 1,\ \ldots] =$$

$$= \operatorname{rank}[X_k'(s_j),\ k=1,\ \ldots,\ n;\ j=0,\ 1,\ \ldots,\ j_1],$$

где $j_1$—наименьшее натуральное число такое, что $s_{j_1} \geqslant (n-1)h$.

Теорема 2.1. *Система (2.1), (2.2) $H_j$ ($j=0$, $\gamma$)-наблюдаема в точках $\beta_0, \ldots, \beta_\gamma$ в том и только в том случае, когда*

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} X_1(0)H_0 & X_1(-\beta_1)H_1 & \ldots & X_1(-\beta_\gamma)H_\gamma \\ X_1(\check{s}_1)H_0 & X_1(\check{s}_1-\beta_1)H_1 & \ldots & X_1(\check{s}_1-\beta_\gamma)H_\gamma \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_1(\check{s}_\eta)H_0 & X_1(\check{s}_\eta-\beta_1)H_1 & \ldots & X_1(\check{s}_\eta-\beta_\gamma)H_\gamma \\ X_2(0)H_0 & X_2(-\beta_1)H_1 & \ldots & X_2(-\beta_\gamma)H_\gamma \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_2(\check{s}_\eta)H_0 & X_2(\check{s}_\eta-\beta_1)H_1 & \ldots & X_2(\check{s}_\eta-\beta_\gamma)H_\gamma \\ & \vdots & & \vdots \\ X_n(\check{s}_\eta)H_0 & X_n(\check{s}_\eta-\beta_1)H_1 & \ldots & X_n(\check{s}_\eta-\beta_\gamma)H_\gamma \end{bmatrix} =$$

$$= \operatorname{rank}\operatorname{diag}\{H_0,\ \ldots,\ H_\gamma\}, \tag{2.5}$$

где $\eta$ — наименьшее натуральное число такое, что $\check{s}_\eta \geqslant \beta_\gamma + (n-1)h$.

Доказательство. Решение системы (2.1), (2.3) запишем по формуле Коши:

$$x_j(t) = K(t-\beta_j)x_j + \sum_{i=0}^{l} \int_{\beta_j-h_i}^{\beta_j} K(t-\tau-h_i)A_i\varphi_j(\tau)\,d\tau,\quad t>\beta_j.$$

Тогда при каждом $j$, $j=0,\ 1,\ \ldots,\ \gamma$, справедливо равенство

$$y_j(t) = \sum_{i=0}^{l} C_i\Big(K(t-\beta_j-h_i)H_jz_j + \\ + \sum_{s=0}^{l}\int_{\beta_j-h_s}^{\beta_j} K(t-\tau-h_i-h_s)A_s\varphi_j(\tau)\,d\tau\Big).$$

Имеем

$$\Phi_{t_1}(y_j,\ \varphi_j) = \int_0^{t_1}\nu(t)\Big(\sum_{i=0}^{l} C_i\Big(K(t-\beta_j-h_i)H_jz_j + \\ + \sum_{s=0}^{l}\int_{\beta_j-h_s}^{\beta_j} K(t-\tau-h_i-h_s)A_s\varphi_j(\tau)\,d\tau\Big)\Big)dt +$$

$$+\sum_{s=0}^{l}\int_{\beta_j-h_s}^{\beta_j}\omega_s(\tau)\varphi_j(\tau)\,d\tau=p_j'H_jz_j,\quad j=0,\ 1,\ \ldots,\ \gamma.$$

Нетрудно видеть, что это соотношение имеет место для всех $z_j$, $\varphi_j$, $j=0,\ 1,\ \ldots,\ \gamma$, тогда и только тогда, когда

$$\int_0^{t_1}\nu(t)\left(\sum_{i=0}^{l}C_iK(t-\beta_j-h_i)H_jz_j\right)dt=p_j'H_jz_j, \tag{2.6}$$

$$\sum_{s=0}^{l}\int_{\beta_j-h_s}^{\beta_j}\int_0^{t_1}\nu(t)\left(\sum_{i=0}^{l}C_iK(t-\tau-h_i-h_s)\right)A_s\varphi_j(\tau)\,dt\,d\tau=$$

$$=-\sum_{s=0}^{l}\int_{\beta_j-h_s}^{\beta_j}\omega_s(\tau)\varphi_j(\tau)\,d\tau,\quad j=0,\ 1,\ \ldots,\ \gamma. \tag{2.7}$$

Из (2.6), (2.7) получаем:

$$\omega_s(\tau)=-\int_0^{t_1}\nu(t)\left(\sum_{i=0}^{l}C_iK(t-\tau-h_i-h_s)\right)A_s\,dt,\ s=0,\ 1,\ \ldots,\ l;$$
$$\tag{2.8}$$
$$\int_0^{t_1}\nu(t)\left(\sum_{i=0}^{l}C_iK(t-\beta_j-h_i)\right)dt\,H_j=p_j'H_j,\ j=0,\ 1,\ \ldots,\ \gamma.$$

Применение техники работ [4], [14] к соотношениям (2.8) позволяет заключить, что система (2.8) разрешима тогда и только тогда, когда

$$\psi(g,\ t)\underset{\mathrm{def}}{=}g'\operatorname{diag}\{H_0',\ \ldots,\ H_\gamma'\}\operatorname{col}\left\{\sum_{i=0}^{l}K'(t-\beta_0-h_i)C_i',\ \ldots\right.$$

$$\left.\ldots,\ \sum_{i=0}^{l}K'(t-\beta_\gamma-h_i)C_i'\right\}\neq 0,\ t\in[0,\ t_1\,[, \tag{2.9}$$

для каждого $(\gamma+1)\,n$-вектора $g$ такого, что $g'\operatorname{diag}\{H_0',\ \ldots$ $\ldots,\ H_\gamma'\}\neq 0$, где $g=\operatorname{col}\{g_0,\ \ldots,\ g_\gamma\}$, $g_j\in\mathbf{R}^n$, $j=0,\ 1,\ \ldots,\ \gamma$.

Далее, по индукции легко установить, что

$$\frac{d^k}{dt^k}\psi(g,\ t)=\sum_{j_1=0}^{l}\sum_{j_2=0}^{j_1}\cdots\sum_{j_{k+1}=0}^{j_k}g'\operatorname{diag}\{H_0',\ \ldots,\ H_\gamma'\}\times$$

$$\times\operatorname{col}\left\{K'\left(t-\beta_0-\sum_{s=1}^{k+1}h_{j_s}\right)X_{k+1}'\left(\sum_{s=1}^{k+1}h_{j_s}\right),\ \ldots\right.$$

$$\ldots, K'\left(t-\beta_\gamma-\sum_{s=1}^{\overset{\circ}{k+1}} h_{j_s}\right) X'_{k+1}\left(\sum_{s=1}^{\overset{\circ}{k+1}} h_{j_s}\right)\Big\}, \quad k=1,\ 2,\ \ldots \tag{2.10}$$

Имеем

$$\frac{d^k}{dt^k}\,\psi(g,\ \beta_j+t+0)-\frac{d^k}{dt^k}\,\psi(g,\ \beta_j+t-0)=$$

$$=g'\operatorname{diag}\{H'_0,\ \ldots,\ H'_\gamma\}\operatorname{col}\{X'_{k+1}(t-\beta_0),\ \ldots$$

$$\ldots,\ X'_{k+1}(t-\beta_\gamma)\},\quad k=1,\ 2,\ \ldots \tag{2.11}$$

Используя обобщенную теорему Гамильтона — Кэли и учитывая (2.10), нетрудно показать, что вектор-функция $\psi(g,\tau)$, $\tau\in[0,\ t_1]$, удовлетворяет дифференциальному уравнению с запаздыванием, имеющему следующий операторный вид:

$$\det\left[pI_n-\sum_{j=0}^{l} A_j\exp(-ph_j)\right]\psi(g,\ t)=0,\quad p=\frac{d}{dt}. \tag{2.12}$$

Из (2.11), (2.12) вытекает, что (2.9) имеет место в том и только в том случае, когда

$$g'\operatorname{diag}\{H'_0,\ \ldots,\ H'_\gamma\}=0$$

для каждого вектора $g$ такого, что

$$g'\operatorname{diag}\{H'_0,\ \ldots,\ H'_\gamma\}\,[X_{k+1}(t-\beta_0)\,\vdots\,\ldots\,\vdots\,X_{k+1}(t-\beta_\gamma)]'=0,$$

$k=1,\ \ldots,\ n$; $t\in[0,\ \beta_\gamma+(n-1)h]$, что эквивалентно критерию $H_j\,(j=\overline{0,\ \gamma})$-наблюдаемости. Теорема 2.1 доказана.

Пусть далее символ

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} X_k(t)\,H_0\,\vdots\,\ldots\,\vdots\,X_k(t-\beta_\gamma)\,H_\gamma \\ 1\leqslant k\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant \eta \end{bmatrix}$$

обозначает левую часть в соотношении (2.5). Тогда имеет место утверждение

Следствие 2.1. Условие

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} X_k(t-\check{s}_0)\,\vdots\,X_k(t-\check{s}_1)\,\vdots\,\ldots\,\vdots\,X_k(t-\check{s}_\tau) \\ 1\leqslant k\leqslant n \\ t\in[0,\ \check{s}_\tau+(n-1)h]\cap\check{S} \end{bmatrix}=(\tau+1)n, \tag{2.13}$$

где $\check{s}_\tau\leqslant\alpha$, $\check{s}_{\tau+1}>\alpha$, необходимо и достаточно для $\alpha$-поточечной наблюдаемости системы (2.1), (2.2).

Действительно, если система (2.1), (2.2) $\alpha$-поточечно наблюдаема, то она наблюдаема и в точках $\check{s}_0$ ..., $\check{s}_\tau$. Поэтому условие (2.13) необходимо для $\alpha$-поточечной наблюдаемости системы (2.1), (2.2). С другой стороны, если требование (2.2) выполнено, то, учитывая соотношение $X_k(t)=0$, $t \in S$, нетрудно показать, что система (1.1), (2.2) наблюдаема в любых точках $\beta_0$, ..., $\beta_j$, $0=\beta_0<...<\beta_j \leqslant \alpha$, что и завершает доказательство следствия 2.1.

Замечание 2.1. Как следует из (2.8), векторы-функции $\omega_s$ не зависят от $\varphi_j$, $z_j$, что позволяет считать наблюдающие устройства однотипными.

Теорема 2.2 *Для поточечной наблюдаемости системы (2.1), (2.2) необходимо и достаточно, чтобы система*

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=0}^{l} A_j m^{h_j} x(t), \quad t > 0, \tag{2.14}$$

*была наблюдаемой (хотя бы при одном $m$, $m \geqslant 0$) в смысле Калмана по выходу*

$$y(t) = \sum_{j=0}^{l} C_j m^{h_j} x(t). \tag{2.15}$$

Схема доказательства. *Достаточность.* Допустим, что система (2.1), (2.2) не является поточечно наблюдаемой. Это означает, что найдутся числа $\beta_0, \ldots, \beta_\gamma$, $0=\beta_0<\ldots<\beta_\gamma$; $n$-векторы $g_j$, $j=0, 1, \ldots, \gamma$, $\|g_0\|+\ldots+\|g_\gamma\| \neq 0$, такие, что

$$\begin{gathered}
g_0' X_{k+1}'(0) = 0, \\
g_0' X_{k+1}'(\check{s}_1) + g_1' X_{k+1}'(\check{s}_1 - \beta_1) = 0, \\
g_0' X_{k+1}'(\check{s}_2) + g_1' X_{k+1}'(\check{s}_2 - \beta_1) + g_2' X_{k+1}(\check{s}_2 - \beta_2) = 0, \\
\vdots \\
g_0' X_{k+1}'(\check{s}_j) + g_1' X_{k+1}'(\check{s}_j - \beta_1) + \ldots + g_\gamma' X_{k+1}'(\check{s}_j - \beta_\gamma) = 0, \\
j = 3, 4, \ldots; \; k = 0, 1, \ldots, n-1.
\end{gathered} \tag{2.16}$$

Умножая $j$-е из соотношений (2.16) на $m^{\check{s}_j}$, суммируя левые и правые части полученных тождеств и учитывая лемму 2.1, получаем

$$g'(m) \Big(\sum_{j=0}^{l} m^{h_j} A_j'\Big)^k \Big(\sum_{j=0}^{l} m^{h_j} C_j'\Big) \equiv 0,$$

$$k = 0, 1, \ldots, n-1, \; \|g(m)\| \neq 0,$$

для каждого неотрицательного числа $m$. Следовательно, система (2.14), (2.15) не может быть наблюдаема по Калману ни при каком $m$, $m \geqslant 0$, если система (2.1), (2.2) не является поточечно наблюдаемой. Достаточность доказана.

*Необходимость*. Предположим, что система (2.14), (2.15) не является наблюдаемой по Калману ни при каком $m$, $m \geqslant 0$. В этом случае можно показать, что найдется $n$-вектор-функция $g(m)$, $m \geqslant 0$, $\|g(m)\| \not\equiv 0$, вида $g(m) = g_0 + m^{\tau_1} g_1 + \ldots + m^{\tau_\nu} g_\nu$, $\tau_i \in S$, такая, что

$$g'(m)\left(\sum_{j=0}^{l} m^{h_j} A_j'\right)^k \left(\sum_{j=0}^{l} m^{h_j} C_j'\right) \equiv 0, \quad m \geqslant 0, \quad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $m$, имеем

$$g_0' X_{k+1}'(\check{s}_j) + g_1' X_{k+1}'(\check{s}_j - \tau_1) + \ldots + g_\nu' X_{k+1}'(\check{s}_j - \tau_\nu) = 0,$$

$j = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\ k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$. Значит, система (2.1), (2.2) не является наблюдаемой в точках $0, \tau_1, \ldots, \tau_\nu$ и, следовательно, не может быть поточечно наблюдаемой. Полученное противоречие доказывает необходимость.

Следствие 2.3. Система (2.1), (2.2) поточечно наблюдаема тогда и только тогда, когда она $\alpha$-поточечно наблюдаема при

$$\alpha = h + \frac{(n-1)(n-2)}{2} h. \tag{2.17}$$

Следствие 2.3 может быть усилено. Ограничимся формулировкой усиленного результата в частном случае, когда $C_j = 0$, $j \neq 0$. В этой ситуации в качестве $\alpha$ из равенства (2.17) достаточно взять число $\dfrac{(n - \operatorname{rank} C_0)(n - \operatorname{rank} C_0 - 1)}{2} h$, что позволяет уточнить двойственный результат из работы [14].

При синтезе систем наблюдения может случиться так, что динамика системы (2.1), характеризуемая матрицами $A_j (j = 0, 1, \ldots, l)$, задана, а матрицы $C_j (j = 0, \ldots, l)$, задающие структуру наблюдающего устройства, разрешается выбирать произвольными. В этом случае представляет интерес задача вычисления минимального числа выходов: найти матрицы $C_j (j = 0, 1, \ldots, l)$, при которых размерность $q = q_0$ выхода $y(t)$ поточечно наблюдаемой системы (2.1), (2.2) будет минимальной. Применив результаты работы [16] к теореме 2.2, приходим к утверждению.

Следствие 2.4. Минимальное число $q_0$ выходов, при которых система (2.1), (2.2) поточечно наблюдаема, равно

$$q_0 = \min_{m \geqslant 0} \rho\left(\sum_{j=0}^{l} m^{h_j} A_j\right),$$

где через $\rho(X)$ обозначено число нетривиальных инвариантных полимеров $\lambda$-матрицы $\lambda I_n - X$; при этом достаточно ограничиться случаем $C_j = 0$, $j \neq 0$. Для вычисления матрицы $C_0$ можно воспользоваться алгоритмом из работы [17].

**3. Двойственные результаты.** Рассмотрим систему управления

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=0}^{l} [A_j' x(t - h_j) + C_j' u(t - h_j)], \quad t > 0, \tag{2.18}$$

начальными условиями:

$$x(\tau) \equiv 0, \quad u(\tau) \equiv 0, \quad \tau \leqslant 0. \tag{2.19}$$

Определение 2.4. Система (2.18) называется управляемой в точках $\beta_0, \ldots, \beta_\gamma$, $0 = \beta_0 < \ldots < \beta_\gamma$, если существует число $t_1$ такое, что для любых $x_j \in \mathbf{R}^n$, $j = 0, 1, \ldots, \gamma$, найдется кусочно-непрерывное управление $u(t)$, $t > 0$, при котором соответствующее решение $x(t)$, $t > 0$, системы (2.18), (2.19) обладает свойством: $x(t_1 - \beta_j) = x_j$, $j = 0, 1, \ldots, \gamma$.

Определение 2.5. Система (2.18) называется $\alpha$-поточечно управляемой, если она управляема в любых точках $\beta_0, \ldots, \beta_\gamma$, $0 = \beta_0 < \ldots < \beta_\gamma \leqslant \alpha$.

Определение 2.6. Систему (2.18) назовем поточечно управляемой, если она $\alpha$-поточечно управляема при любом $\alpha$, $\alpha \geqslant 0$.

По аналогии с доказательством теорем 2.1, 2.2 можно получить соответствующие критерии поточечной управляемости. В качестве следствия этих критериев сформулируем следующие двойственные результаты:

1) система (2.18) управляема в точках $\beta_0, \ldots, \beta_\gamma$ тогда и только тогда, когда система (2.1), (2.2) наблюдаема в точках $\beta_0, \ldots, \beta_\gamma$;

2) для $\alpha$-поточечной управляемости системы (2.18) необходимо и достаточно, чтобы система (2.1), (2.2) была $\alpha$-поточечно наблюдаема;

3) система (2.18) поточечно управляема тогда и только тогда, когда система (2.1), (2.2) поточечно наблюдаема.

## § 3. ОБСУЖДЕНИЕ. ЗАДАЧИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ

1. При увеличении параметра $\tau$ классы эквивалентности $_\mu\{\varphi\}_{\tau, u}$ становятся беднее и состоят из одного элемента при $\tau \geqslant \mu + h$. Следовательно, каждому начальному $\mu$-состоянию $_\mu\{\varphi\}$ и управлению $u$ соответствует единственное решение системы (2.1) при $\tau \geqslant \mu$, т. е. все решения $x(\tau, 0, \{\varphi\}, u)$, $\tau > 0$, $\{\varphi\} \in {_\mu\{\varphi\}}$, «слипаются» при $\tau \geqslant \mu$. Поэтому в качестве $\mu$-состояний системы (2.1) можно рассматривать элементы множества

${}_{\mu}X_{\mu+h}$. Тогда множества ${}_{\mu}X_{\tau}$, $0 \leqslant \tau \leqslant \mu+h$, можно интерпретировать как множества $\mu$-предсостояний. На всем промежутке $[0, \mu+h]$ система накапливает информацию для своего $\mu$-состояния, образно говоря, система «$\mu$-разогревается». Множество $\mu$-состояний ${}_{\mu}X_{\mu+h}$ можно наделить различными структурами, в частности структурой предгильбертова пространства. В связи с этим представляет интерес строение этого пространства, в частности интересен вопрос о полных и замкнутых системах в нем. Особый интерес вызывает вопрос о структуре пространства ${}_{\infty}X_{nh}$ слабых состояний. Можно показать, что все пространства ${}_{\infty}X_{\tau}$ для системы (2.1) изоморфны и различным слабым состояниям соответствуют различные слабые решения, т. е. слабые решения «не слипаются». В этой связи заметим, что пространство слабых состояний системы (2.1) в случае конечного спектра является конечномерным. Это обстоятельство позволяет провести аналог между такими системами и системами, не содержащими запаздывания.

**2.** Систему (2.1) с $A_j = 0$, $j = 2, \ldots, l$, назовем сильно управляемой, если для $\forall \{\varphi\}, \{\psi\} \in C \times \mathbf{R}^n$, $\exists t_1 > h$, $\exists u_{[0,+\infty]} \Rightarrow$ $\Rightarrow x(t_1, 0, \{\varphi\}, u) = \psi_0$, $A_1 x(t_1+\tau, 0, \{\varphi\}, u) \equiv A_1 \psi(\tau)$, $\tau \in [-h, 0]$. Нетрудно видеть, что условия $\operatorname{rank}(A_1 B) = \operatorname{rank} A_1$, $\operatorname{rank}[X_k(jh)$, $1 \leqslant k \leqslant n$, $0 \leqslant j \leqslant n-1] = n$, необходимы для сильной управляемости такой системы. Здесь $X_k(t)\,(k \geqslant 1,\ t \geqslant 0)$ — решение определяющего уравнения [4]. Вопрос о необходимом и достаточном условии сильной управляемости в общем случае остается открытым.

**3.** Обозначим ${}_{t}Иx(\cdot, \{\varphi\}, u) = (\gamma_{[t, t+h]}, \ x(t+0, 0, \{\varphi\}, u))$,

$$\gamma(t+\tau) = \sum_{j=s}^{l} A_j x(t+\tau-h_j, 0, \{\varphi\}, u), \ \tau \in [h_{s-1}, h_s], \ s = 1, \ldots, l.$$

Величину ${}_{t}Иx(\cdot, \{\varphi\}, u)$ назовем $t$-информатором решения $x(\cdot, 0, \{\varphi\}, u)$ (начальное условие $\{\varphi\}$). Нетрудно видеть, что $\{\varphi\}\, L_{\mu}\, \{\psi\}$ тогда и только тогда, когда их $\mu$-информаторы совпадают. Отсюда, записывая правую часть равенства (1.6) в эквивалентной форме

$$\sum_{s=1}^{l} \int_{\mu+h_{s-1}}^{\mu+h_s} p'(\tau) \Big( \sum_{j=s}^{l} A_j x(\tau - h_j) \Big) d\tau,$$

заключаем, что задача $\mu$-наблюдаемости системы (2.1), (2.2) есть задача восстановления $\mu$-информатора каждого ее начального условия.

**4.** Как уже отмечалось, пространство состояний системы с запаздыванием в общем случае является бесконечномерным.

Целесообразно исследовать вопрос о наличии у системы свойства аппроксимативной управляемости, когда множество достижимости системы всюду плотно (в смысле рассматриваемой топологии) в пространстве состояний.

5. Представляет интерес теория управления и наблюдения систем с запаздыванием, если в качестве множества возможных $\mu$-состояний системы в момент $\tau \geqslant 0$ рассмотреть множество ${}_\infty X_0$. Естественным классом допустимых управлений в этом случае становится класс обобщенных функций.

## ЛИТЕРАТУРА


1. **Красовский Н. Н.** Оптимальные процессы в системах с запаздыванием: Оптимальные системы. Статистические методы.— Тр. 2-го Конгресса ИФАК. М.: Наука, 1965, т. 2, с. 201—210.

2. **Кириллова Ф. М., Чуракова С. В.** К проблеме управляемости линейных систем с последействием.— Дифференц. уравнения, 1967, т. 3, № 3, с. 436—445.

3. **Кириллова Ф. М., Чуракова С. В.** Относительная управляемость линейных динамических систем с запаздыванием.— Докл. АН СССР, 1967, т. 174, № 6, с. 1260—1263.

4. **Габасов Р., Кириллова Ф. М.** Качественная теория оптимальных процессов.— М.: Наука, 1971.— 508 с.

5. **Куржанский А. Б.** Управление и наблюдение в условиях неопределенности.— М.: Наука, 1977.— 392 с.

6. **Manitius A., Triggiani R.** Function space controllability of linear retarded systems: a derivation from abstract operator conditions.— SIAM J. Control and Optimization, 1978, v. 16, N 4, p. 599—645.

7. **Jacobs M. Q., Langenhop C. E.** Criteria for function space controllability of linear neutral systems.— SIAM J. Control and Optimization, 1976, v. 14, N 6, p. 1009—1048.

8. **Габасов Р., Кириллова Ф. М.** Математическая теория оптимального управления.— В сб.: Математический анализ. М., 1978, т. 16, с. 55—97.

9. **Калман Р., Фалб П., Арбиб М.** Очерки по математической теории систем.— М.: Мир, 1971.— 400 с.

10. **Марченко В. М.** К управляемости линейных систем с последействием.— Докл. АН СССР, 1977, т. 236, № 5, с. 1083—1086.

11. **Шкляр Б. Ш.** К наблюдаемости линейных стационарных систем с сосредоточенными параметрами.— Докл. АН СССР, 1979, т. 248, № 3, с. 549—552.

12. **Беллман Р., Кук К. Л.** Дифференциально-разностные уравнения.— М.: Мир, 1967.— 548 с.

13. **Шилов Г. Е.** Математический анализ: Специальный курс.— М.: Физматгиз, 1960.— 388 с.

14. **Марченко В. М., Московска Б. П., Симеонова Ю. С.** Поточечная управляемость систем с последействием.— Дифференц. уравнения, 1978, т. 14, № 7, с. 1324—1327.

15. **Марченко В. М.** Алгебраическое доказательство одного критерия управляемости систем со многими запаздываниями.— Вестн. БГУ, 1973, сер. 1, № 2, с. 66—68.

16. **Vogt M. G., Cullen C. G.** The minimum number of inputs required for the complete controllability of a linear stationary dynamical system.— IEEE Trans. Automat. Control, 1967, v. 12, N 3, p. 314.

17. **Марченко В. М.** Минимальное число входов линейных управляемых систем.— Дифференц. уравнения, 1974, т. 10, № 10, с. 1789—1796.