

К вопросу о распределении корней квазиполиномов

При исследовании вопросов стабилизации и устойчивости систем неавтономного типа часто полезно знать, как распределены корни характеристического квазиполинома в зависимости от коэффициентов исходной системы. В частности, для двумерной системы один из случаев приводит к изучению следующего уравнения:

$$\lambda + a_1 + a_2 e^{-\lambda h} + a_3 \lambda e^{-\lambda h} = 0, \quad (1)$$

где $a_1, a_2, a_3, h \in \mathbb{R}, h > 0, \lambda \in \mathbb{C}$.

Имеют место следующие утверждения.

Лемма 1. Все простые корни уравнения (1) могут быть описаны непрерывными функциями коэффициентов a_1, a_2, a_3 .

Лемма 2. Все кратные корни уравнения (1) действительны.

Лемма 3. При фиксированном $a_3 \in \mathbb{R}, |a_3| \leq 1$, неотрицательные действительные корни уравнения (1) могут лежать, разве лишь, вне открытой области, ограниченной снизу прямой $a_2 = -a_1$ и слева — прямой $a_1 = -\frac{1}{h}$ в пространстве коэффициентов a_1, a_2 .

Для исследования распределения комплексных корней уравнения (1) можно применить так называемый метод D - разбиений. Леммы 1-3 дают его строгое обоснование. Результат этого исследования можно объединить в следующей теореме:

Теорема. Для того, чтобы корни уравнения (1) имели только отрицательные действительные части необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$1) |a_3| \leq 1,$$

2) точка (a_1, a_2) принадлежит области, ограниченной линиями:

$$a_2 = -a_1$$

$$L_{a_3}: \begin{cases} a_1 = -\frac{y}{\sin y h} (a_3 + \cos y h) \\ a_2 = \frac{y}{\sin y h} (1 + a_3 \cos y h) \end{cases}, \quad y \in \left(0, \frac{\pi}{h}\right), \text{ при } |a_3| < 1$$

$$\text{и } |a_1| = a_2 \text{ при } |a_3| = 1.$$