

УДК 519.624

И. Ф. КУЛЕШОВА, П. И. МОНАСТЫРНЫЙ, В. А. РАДАЕВА

К ТЕОРИИ МЕТОДА МНОЖЕСТВЕННОЙ ДВУСТОРОННЕЙ ПРИСТРЕЛКИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ С ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ

(Представлено академиком АН БССР В. И. Крыловым)

1. В решении граничных задач для линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений (о. д. у.) первого порядка с малым параметром при старшей производной могут возникать пограничные слои либо внутренние переходные слои с большими градиентами решений. Численное решение таких задач [1—5] сопряжено с рядом существенных трудностей, которые проявляются в понижении порядка сходимости разностных схем и неравномерной сходимости их на равномерных сетках. Эти отрицательные последствия пограничных или внутренних переходных слоев в ряде алгоритмов удается нейтрализовать или ослабить путем использования информации о решении исходной задачи и его свойствах [1—4, 6]. Такая информация в большинстве случаев может быть получена только при довольно жестких ограничениях на параметры рассматриваемых задач [1, 2], что сильно сужает классы такого рода задач, эффективное численное решение которых возможно в рамках существующих методик.

Важным является построение и исследование таких вычислительных алгоритмов, которые были бы применимы при довольно общих предположениях на входные данные граничных задач, обладали бы свойством адаптивности и имели бы хорошие возможности регулировки и настройки вычислений. Подобными свойствами могут обладать алгоритмы, использующие идею метода множественной двусторонней пристрелки (м. м. д. п.) [5, 7].

2. Рассматривается система линейных о. д. у. первого порядка

$$y' = A(x, \varepsilon)y + f(x, \varepsilon), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (1)$$

с разделенными граничными условиями

$$By(0) = \beta, \quad (2)$$

$$Cy(1) = \gamma, \quad (3)$$

где $y: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $A(x, \varepsilon) = (a_{ij}(x, \varepsilon))_{i,j=1}^n$, $f(x, \varepsilon) = (f_1(x, \varepsilon), \dots, f_n(x, \varepsilon))^T$, $\varepsilon \geq \varepsilon_0 > 0$ — малый параметр, $B = (b_{ij})_{i=1, n}^{j=1, n}$, $C = (c_{ij})_{i=1, n}^{j=1, n}$, $\beta \in \mathbb{R}^n$, $\gamma \in \mathbb{R}^l$, $\text{rang } B = k$, $\text{rang } C = l$, $l + k = n$, функции $a_{ij}(x, \varepsilon)$, $f_i(x, \varepsilon)$ имеют зависимость от ε , характерную для задач с малым параметром при старшей производной и с пограничными слоями.

Выберем точки пристрелки $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{2m} = 1$ и рассмотрим пристрелочные задачи Коши [5, 7]:

$$u' = A(x, \varepsilon)u + f, \quad x \in J_{2j-1}^{(+)} = \{x_{2j-1} \leq x \leq x_{2j}\}, \quad (4)$$

$$u(x, y_{2j-1})|_{x=x_{2j-1}} = y_{2j-1},$$

$$v' = A(x, \varepsilon)v + f, \quad x \in J_{2j-1}^{(-)} = \{x_{2j-1} \geq x \geq x_{2j-2}\},$$

$$v(x, y_{2j-1})|_{x=x_{2j-1}} = y_{2j-1}, \quad y_{2j-1} \in \mathbb{R}^n, \quad (5)$$

где $y_1, y_3, \dots, y_{2m-1}$ — параметры пристрелки, для определения которых обычным путем может быть получена система уравнений

$$u(x_{2j}, y_{2j-1}) - v(x_{2j}, y_{2j+1}) = 0, \quad j = \overline{1, m-1}, \\ Bv(x_0, y_1) - \beta = 0, \quad Cu(x_{2m}, y_{2m-1}) - \gamma = 0. \quad (6)$$

Запишем (6) в операторной форме

$$H(z) = 0, \quad (7)$$

где $H: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$, $N = mn$, $z = (y_1^T, y_3^T, \dots, y_{2m-1}^T)^T$.

В зонах пограничных или переходных слоев поведение решения сильно усложняется и, чтобы получить возможность точно проследивать пристрелочные траектории, необходимо регулировать выбор пристрелочных параметров y_{2j-1} , гибко определять длину положительных $J_{2j-1}^{(+)}$ и отрицательных $J_{2j-1}^{(-)}$ подынтервалов пристрелки и правильно выбирать подходящие методы для численного решения задач Коши, в том числе и жестких [6—8].

Обозначим $z^* = (y^T(t_1), y^T(t_3), \dots, y^T(t_{2m-1}))^T$, где $z(t)$ — решение задачи (1) — (3), тогда $H(z^*) = 0$. Пусть $z^{(k)} = (y_1^{(k)T}, y_3^{(k)T}, \dots, y_{2m-1}^{(k)T})^T$ — k -е приближение к z^* , $(k+1)$ -е приближение вычислим по правилу $z^{(k+1)} = z^{(k)} + \Delta z^{(k)}$, где

$$\frac{\partial H(z^{(k)})}{\partial z} \Delta z^{(k)} = -H(z^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots \\ \dots, \quad \frac{\partial H(z^{(k)})}{\partial z} = \left(\frac{\partial H_i(z^{(k)})}{\partial z_j} \right)_i^N. \quad (8)$$

3. Для сходимости $\{z^{(k)}\}_0^\infty$ важное значение наряду с локализацией $z^{(0)}$ имеет условие невырожденности $\frac{\partial H(z^{(k)})}{\partial z}$. По этой причине необходимо выявить ограничения на $A(x, \varepsilon)$, x_j , B и C , при которых

$$\det \frac{\partial H(z^{(k)})}{\partial z} \neq 0, \quad \forall z^{(k)} \in \mathbb{R}^N. \quad (9)$$

Вычисляемое в м.м.д.п. решение представимо формулой

$$w(x, y_{2j-1}) = \begin{cases} v(x, y_{2j-1}), & x \in J_{2j-1}^{(-)}, \\ u(x, y_{2j-1}), & x \in J_{2j-1}^{(+)}, \quad j = \overline{1, m}. \end{cases}$$

М.м.д.п. называется сходящимся, если сходится итерационная последовательность $\{z^{(k)}\}_0^\infty$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} z^{(k)} = z^*$. Обозначим через $\delta(x)$ вариацию для точного решения задачи (1) — (3):

$$\delta'(x) = A(x, \varepsilon) \delta(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad B\delta(0) = 0, \quad C\delta(1) = 0. \quad (10)$$

Решение задачи (1) — (3) называется изолированным тогда и только тогда, когда выполняется условие $\delta(x) \equiv 0, 0 \leq x \leq 1$. Для линейных задач вида (1) — (3) это требование означает их однозначную разрешимость.

Изучим свойства матрицы $\frac{\partial H(z)}{\partial z}$. Имеем

$$\frac{\partial H(z)}{\partial z} = \begin{bmatrix} U_1^{(2)}, & -V_3^{(2)}, & 0, & 0, & \dots, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0, & 0, & 0, & \dots, & 0, & 0, & U_{2m-3}^{(2m-2)}, & -V_{2m-1}^{(2m-2)} \\ BV_1^{(0)}, & 0, & 0, & 0, & \dots, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0 & 0, & 0, & 0, & \dots, & 0, & 0, & 0, & CU_{2m-1}^{(2m)} \end{bmatrix}, \quad (11)$$

где $V_{2j-1}^{(2j-2)} = V_{2j-1}(x_{2j-2})$, $U_{2j-1}^{(2j)} = U_{2j-1}(x_{2j})$.

$$U_{2j-1}(x) = A(x, \varepsilon) U_{2j-1}(x), \quad x \in J_{2j-1}^{(+)}, \quad U_{2j-1}(x_{2j-1}) = E, \quad (12)$$

$$V_{2j-1}(x) = A(x, \varepsilon) V_{2j-1}(x), \quad x \in J_{2j-1}^{(-)}, \quad V_{2j-1}(x_{2j-1}) = E, \quad j = \overline{1, m}. \quad (13)$$

Свойства матрицы $\frac{\partial H(z)}{\partial z}$ можно регулировать путем выбора числа m подынтервалов пристрелки $J_{2j-1}^{(+)}$, $J_{2j-1}^{(-)}$ и их длин. Верна следующая Теорема. Если решение задачи (1) — (3) изолированное, то $H(z)|_{z=z^*} = 0$ и $\det \frac{\partial H(z)}{\partial z} \neq 0$ при $\forall z \in R^N$.

Доказательство. Если $y_{2j-1} = y(x_{2j-1})$, то, очевидно, что $u(x_{2j}, y(x_{2j-1})) = v(x_{2j}, y(x_{2j+1}))$, $j = \overline{1, m-1}$ и $v(x_0, y(x_1)) = y(0)$, $u(x_{2m}, y(x_{2m-1})) = y(1)$, значит, $H(z^*) = 0$. Изолированность решения возможна при выполнении условия $D_m^{(0)} = \det \left[\frac{B}{C\Phi(1)} \right] \neq 0$, где $\Phi(x)$ — матричное решение задачи Коши: $\Phi' = A(x, \varepsilon)\Phi$, $\Phi(0) = E$, $0 \leq x \leq 1$. Прямыми вычислениями устанавливается, что $\det \frac{\partial H(z)}{\partial z} = D_m^{(0)} \Lambda_m^{(0)}$, где

$\Lambda_m^{(0)}$ — определитель матрицы, невырожденность которой можно обеспечить всегда путем выбора достаточно малой длины подынтервала $J_1^{(-)}$. Теорема доказана.

4. Изучим качественную сторону м.м.д.п. на примере типичной задачи с пограничным слоем [2]. Положим $n = 2$, $a_{11}(x, \varepsilon) \equiv 0$, $a_{12}(x, \varepsilon) \equiv 1$, $a_{21}(x, \varepsilon) \equiv b/\varepsilon > 0$, $a_{22}(x, \varepsilon) \equiv -a/\varepsilon < 0$, $f_1(x, \varepsilon) \equiv 0$, $f_2(x, \varepsilon) \equiv f(x)/\varepsilon$, $B = C = E_0 = [1, 0]$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$. Тогда $A(x, \varepsilon) \equiv A(\varepsilon)$, $A(\varepsilon)\omega_i = \lambda_i(\varepsilon)\omega_i$, $i = 1, 2$, $\omega_i \in R^2$, $\lambda_1(\varepsilon) = 2b/(a + \sqrt{a^2 + 4b\varepsilon}) > 0$, $\lambda_2(\varepsilon) = -(a + \sqrt{a^2 + 4b\varepsilon})/2\varepsilon < 0$. В этом случае $U_{2j-1}(x) = w\Lambda(x - x_{2j-1}, \varepsilon)w^{-1}$, $x \in J_{2j-1}^{(+)}$, $V_{2j-1}(x) = w\Lambda(x - x_{2j-1}, \varepsilon)w^{-1}$, $x \in J_{2j-1}^{(-)}$, где

$$w = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix}, \quad \Lambda(x - x_{2j-1}, \varepsilon) = \begin{bmatrix} \exp \lambda_1(\varepsilon)(x - x_{2j-1}), & 0 \\ 0, & \exp \lambda_2(\varepsilon)(x - x_{2j-1}) \end{bmatrix}.$$

Система уравнений (8) для определения поправок $\Delta z_{2j-1}^{(h)}$ примет вид

$$U_1^{(2)}\Delta z_1^{(h)} - V_3^{(2)}\Delta z_3^{(h)} = -H_1, \dots, U_{2m-3}^{(2m-2)}\Delta z_{2m-3}^{(h)} - V_{2m-1}^{(2m-2)}\Delta z_{2m-1}^{(h)} = -H_{2m-3}, \\ E_0 V_1^{(0)}\Delta z_1^{(h)} = -H_{2m-1}^{(1)}, E_0 U_{2m-1}^{(2m)}\Delta z_{2m-1}^{(h)} = -H_{2m-1}^{(2)}, \quad (14)$$

где $H_{2m-1}^{(1)} = E_0 v(x_0, y_1^{(h)}) - 1$, $H_{2m-1}^{(2)} = E_0 u(x_{2m}, y_{2m-1}^{(h)})$.

Для $\Delta z_{2m-1}^{(h)}$ из (14) получим

$$\Delta z_{2m-1}^{(h)} = \Omega_m \Delta z_1^{(h)} + \omega_m, \quad (15)$$

где

$$\Omega_m = \prod_{1 \leq j \leq m-1} G_{2j+1}, \quad G_{2j+1} = [V_{2j+1}^{(2j)}]^{-1} U_{2j-1}^{(2j)}, \\ \omega_m = \sum_{j=1}^{m-1} \left(\prod_{i=m-1}^{3 \leq 2j+3 \leq m-1} G_{2i+1} \right) [V_{2j+1}^{(2j)}]^{-1} H_{2j-1}.$$

Обозначим

$$D_m = \left[\frac{E_0 V_1^{(0)}}{E_0 U_{2m-1}^{(2m)} \Omega_m} \right]. \quad (16)$$

Если $\det D_m \neq 0$, то система уравнений (14) однозначно разрешима и

$$\Delta z_1^{(k)} = [D_m]^{-1} \begin{bmatrix} -H_{2m-1}^{(1)} \\ -H_{2m-1}^{(2)} + E_0 U_{2m-1}^{(2m)} \Omega_m \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Далее получим: $G_{2j-1} = [V_{2j-1}^{(2j-2)}]^{-1} U_{2j-3}^{(2j-2)} = \omega \Lambda (x_{2j-1} - x_{2j-3}, \varepsilon) \omega^{-1} = \mathcal{L}(x_{2j-1}, x_{2j-3}, \varepsilon)$ и $\Omega_m = G_{2m-1} G_{2m-3} \dots G_3 = \mathcal{L}(x_{2m-1}, x_1, \varepsilon)$, $V_1^{(0)} = \mathcal{L}(x_1, x_0, \varepsilon)$, $U_{2m-1}^{(2m)} = \mathcal{L}(x_{2m}, x_{2m-1}, \varepsilon)$. Поэтому справедлива формула $D_m = D_m^{(0)} \mathcal{L}(x_1, x_0, \varepsilon)$, где $D_m^{(0)} = \left[\frac{E_0}{E_0 \mathcal{L}(x_{2m}, x_0, \varepsilon)} \right]$. Очевидно,

что $\det \mathcal{L}(x_1, x_0, \varepsilon) \neq 0$ при достаточно малом $[x_0, x_1]$. Значит, (16) будет выполнено, если $\det D_m^{(0)} \neq 0$. Для $\det D_m^{(0)}$ прямые вычисления дают $\det D_m^{(0)} = w_{11} \alpha_{12} \rho_1 + w_{12} \alpha_{22} \rho_2$, где w_{ij} , α_{ij} — элементы соответственно матриц w , w^{-1} , $\rho_1 = \exp \lambda_1(\varepsilon) (x_{2m} - x_0)$, $\rho_2 = \exp \lambda_2(\varepsilon) (x_{2m} - x_0)$. Решение уравнения для $\delta(x)$ здесь дается формулой $\delta(x) = \Phi(x) C$, и условие $\delta(x) \equiv 0$ выполняется тогда и только тогда, когда

$$\det D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \neq 0, \quad (18)$$

где $d_{11} = 1$, $d_{12} = 0$, $d_{21} = w_{11} \alpha_{12} \rho_1 + w_{12} \alpha_{22} \rho_2$, $d_{22} = w_{11} \alpha_{12} \rho_1 + w_{12} \alpha_{22} \rho_2$. Если решение изолированное, то из (18) следует, что $d_{22} \neq 0$. Но легко видеть, что $\det D_m^{(0)} = d_{22} \neq 0$ и, значит, изолированность решения обеспечивает выполнение условия $\det \frac{\partial H(z)}{\partial z} \neq 0$ и, таким образом, схо-

димость последовательности $\{z^{(k)}\}_0^\infty$.

5. Выбором числа и длин подынтервалов пристрелки $J_{2j-1}^{(+)}$, $J_{2j-1}^{(-)}$ можно обеспечить необходимые качества пристрелочных задач Коши, а выбором соответствующих методов численного решения задач Коши [8] — высокую точность и экономичность вычисления пристрелочных траекторий. В зонах плавного изменения решения шаг интегрирования при этом может быть автоматически увеличен или соответствующим образом адаптирован к свойствам решения. Указанные факторы имеют положительное влияние и на регулирование свойств матрицы Якоби $\frac{\partial H}{\partial z}$.

Summary

New algorithms employing the idea of the multiple bilateral shooting method are suggested for the boundary-layer problems. They are justified and their calculation properties are studied.

Литература

1. Самарский А. А. Теория разностных схем. М., 1983.
2. Дулан Э., Миллер Дж., Шилдерс У. Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем. М., 1983.
3. Холл Дж., Уатт Дж. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1979.
4. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. М., 1987.
5. Монастырный П. И. // Докл. АН БССР. 1978. Т. 22, № 5. С. 393—396.
6. Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И. Вычислительные методы. М., 1977. Т. 2.
7. Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И. Начала теории вычислительных методов. Уравнения в частных производных. Минск, 1986.
8. Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге—Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. М., 1988.

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило 14.04.88