читання». Киев, 2003. С.199.

4. Крахотко В.В., Размыслович Г.М. Линейные сингулярные системы с запаздыванием // Вестн. БГУ. Сер.I.- 1988.- №2. - С.76-77.

5. Марченко В.М. Вполне регулярные системы с последействием // Труды Института математики. 2001. №7.

6. Марченко В.М., Поддубная О.Н. Представление решений управляемых гибридных систем // Проблемы управления и информатики. Киев, 2002. № 6. С. 17-25

7. Campbell S.L. Singular systems of differential equations with delays //Applicable analysis.-1980.- Vol.11, № 2.-P.129-136.

8. Li Y., Liu Y. Basic theory of singular systems of linear differential difference equations // Preprints of the 13th World Congress IFAC 30th June-5th Jule 1996, San Francisco, USA. P. 79-84.

9. Dai L. Singular Control Systems. Lecture Notes in Control and information Sciences. Berlin, Springer-Verlag, 1989. Vol. 118.

УДК 681.3

ВЫЧИСЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКИХ ДЛИН В ЛИНЕЙНЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧАХ

И.Ф. Соловьева
(БГТУ, г.Минск)

Рассмотрим линейную граничную задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(t)y_1 + a_{12}(t)y_2 + f_1(t), \\ y_2' = a_{21}(t)y_1 + a_{22}(t)y_2 + f_2(t), \end{cases} \tag{1}$$

с граничными условиями вида:

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(0) + \beta_1 y_2(0) = \gamma_1, & \alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1, \\ \alpha_2 y_1(x) + \beta_2 y_2(x) = \gamma_2, & \alpha_2^2 + \beta_2^2 = 1, \end{cases} \tag{2}$$

где $0 \le t \le x$ и $x > 0$ – правая подвижная граница отрезка интегрирования.

Обозначим через $z(t)$ фундаментальную матрицу для системы уравнений (1). Легко показать, что задача (1,2) имеет единственное решение для $\forall x$, если выполняется условие

$$D(x) = \alpha_1(z_{12}(x)\alpha_2 + z_{22}(x)\beta_2) - \beta_1(z_{11}(x)\alpha_2 + z_{21}(x)\beta_2) \neq 0, \tag{3}$$

где $z_{ij}(x)$ - элементы матрицы $z(x)$.

Определение. Критической длиной линейной граничной задачи вида (1, 2) называется минимальное положительное значение x^*, удовлетворяющее условию $D(x) = 0$.

Все остальные значения x, удовлетворяющие условию $D(x) = 0$, называются псевдокритическими длинами граничной задачи вида (1, 2).

Будем предполагать, что множество таких длин существует. Это будет осуществляться, например, в случае когда матрица

$$A(z) = (a_{ij}(z))_1^2$$

будет аналитической, в частности, когда матрица $A(z) = const$. В дальнейшем при определении критических длин будем полагать, что

$$f_1(t) \equiv f_2(t) \equiv 0, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = 0.$$

Во всех вычислительных процедурах критическая длина определяется как точка, в которой специальным образом построенное уравнение Риккати терпит разрыв первого рода. В рассматриваемом здесь методе дифференциальной ортогональной прогонки уравнение Риккати вообще не будет использовано. Идея метода будет состоять в переформулировке исходной граничной задачи в совокупность задач Коши, выполненных с помощью ортогональных преобразований. Изложим алгоритм метода.

Для $t>0$ решается задача Коши вида:

1. $\theta' + [a_{11}(t) - a_{22}(t)]\sin\theta\cos\theta + a_{21}(t)\cos^2\theta - a_{12}(t)\sin^2\theta = 0$

с начальными условиями

$$\sin\theta(0) = \alpha_1, \qquad \cos\theta(0) = \beta_1.$$

Итак, функция $\theta(t)$ будет определена для $t > 0$.

2. Вычисляется наименьшее положительное решение уравнения

$$\Delta(x) = 0, \tag{4}$$

где $\Delta(x) = \alpha_2\cos\theta(x) - \beta_1\sin\theta(x)$.

Для данной задачи уравнение (4) будем решать, например, по методу секущих. Тогда n – е приближение к корню на отрезке [a, b] вычисляется по правилу:

$$x_n = \frac{a\Delta(x_{n-1}) - x_{n-1}\Delta(a)}{\Delta(x_{n-1}) - \Delta(a)}, \qquad n = 1,2,3,...$$

при выполнении условия $\Delta(a)\Delta''(x) > 0$.

В этом случае за начальное приближение можно взять правый конец отрезка, т.е. $x_0 = b$.

Последовательность полученных значений x_n, $(n = 1,2,...)$ сходится к корню $\bar{x}$, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}.$$

3. Приближения x_n будем вычислять до тех пор, пока два последовательных приближения x_n и x_{n+1} не совпадут друг с другом на заданное в задаче число знаков.

4. В случае, когда функция $\Delta(x)$ имеет первую, отличную от 0 производную $\Delta'(x)$ на отрезке $[a,b]$, то оценка абсолютной погрешности будет вычисляться по формуле

$$|\ \bar{x} - x_n\ | \le \frac{|\ \Delta(x_n)\ |}{\mu}, \text{ где } \quad \mu = \min_{a\le x\le b} |\ \Delta'(x)\ |.$$

5. Искомое значение x^* и остальные неизвестные псевдо-критические длины определяются аналогичным образом.

6. Далее находится функция $u(t)$ для $t > 0$ как решение задачи Коши

$$u' = b_{11}(t)u + c_1(t), \qquad u(0) = \gamma_1.$$

Если $f_1(t) \equiv 0$ и $\gamma_1 = 0$, то $u(t) = 0$.

7. Вычислим решение системы уравнений

$$\begin{cases} \sin\theta(x)y_1(x) + \cos\theta(x)y_2(x) = 0, \\ \alpha_2 y_1(x) + \beta_2 y_2(x) = 0. \end{cases}$$

Полученные из этой системы решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ будем нормировать, например, по правилу:

$|y_1(x)\ | + |\ y_2(x)\ | = 1$.

8. Значения $v(x)$ определим по формуле

$$v(x) = \cos\theta(x)y_1(x) - \sin\theta(x)y_2(x). \qquad (5)$$

9. Значения функции $v(t)$ на отрезке $[0,\ x]$ получим как

решение задачи Коши для уравнения

$$v' = b_{21}(t)u + b_{22}(t)v + c_2(t)$$

с начальным условием (5). Коэффициенты $b_{ij}(t)$ и $c_i(t)$, где i, j=1,2 определяются по методу дифференциальной ортогональной прогонки [1].

10. Критическое решение исходной граничной задачи вида (1, 2) вычисляем по правилу:

$$y_1(t) = v(t)\cos\theta(t), \quad y_2(t) = v(t)(-\sin\theta(t)).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Кулешова И.Ф. Построение и исследование варианта метода дифференциальной ортогональной прогонки для граничных задач с пограничным слоем. // Труды БГТУ. Сер. Физ.-мат.наук. 1993. С. 40-42.

УДК 62.505

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ НАИЛУЧШИМИ РАЦИОНАЛЬНЫМИ ПРИБЛИЖЕНИЯМИ В ПРОСТРАНСТВАХ E_p И L_p

А.А. Пекарский
(БГТУ, г. Минск)

В комплексной плоскости C рассмотрим ограниченную односвязную область G со спрямляемой границей ∂G. Для $p \in (0,\infty)$ через $E_p = E_p(G)$ и $L_p = L_p(\partial G)$ обозначим соответственно пространства функций В.И.Смирнова и Лебега. В этих пространствах вводятся стандартные квазинормы

$$\|\cdot\|_{E_p} \text{ и } \|\cdot\|_{L_p}.$$

Через R_n, $n \geq 0$, обозначим множество рациональных функций степени не выше n. Пусть X означает E_p и L_p. Для $f \in X$ введем наилучшее рациональное приближение:

$$R_n(f,X) = \inf\{\|f-r\|_X : r \in R_n \cap X\}$$

Функцию $f \in E_p$ можно рассматривать также как элемент