УДК 519.624

И.Ф. Соловьева, доц., канд. физ.-мат. наук (БГТУ, Минск)

НЕЛИНЕЙНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ С ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

Проблема численного решения нелинейных граничных задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (о.д.у.) по-прежнему остается актуальной. Одно из важных мест в этой проблеме принадлежит методам пристрелки, реализуемых в различных модификациях и формах. Это объясняется тем, что методы пристрелки достаточно универсальны и обладают вычислительными достоинствами, гибкостью, способностью к адаптации, ориентированной на свойства граничной задачи, выявляемые в процессе вычислительного эксперимента, и простотой численной реализации методов на ЭВМ

Рассмотрим граничную задачу с неразделенными граничными условиями для системы о.д.у. первого порядка вида:

$$y' = f(t,y), \quad a \le t \le b \tag{1}$$

$$g(y(a), y(b)) = 0, \tag{2}$$

где $y:[a,b] \to R^n$, $f:[a,b]\times R^n \to R^n$, $g: R^n \times R^n \to R^n$.

Более точные результаты получаются в тех случаях, когда полнее и правильнее учитываются свойства отображений f и g и сама область $[a,b]$. Рассмотрим три метода получения решений исходной задачи: метод прямой пристрелки, двусторонней пристрелки и множественной двусторонней пристрелки. В смысле общности и универсальности методы пристрелки для граничных задач в случае нелинейных систем о.д.у. первого порядка вида (1,2) сопоставимы лишь с методом сеток.

В методе прямой пристрелки вычислительная схема имеет вид:

$$u' = f(t, y), \quad a \le t \le b, \tag{3}$$

$$u(t, y_0^{(k)})\big|_{t=a} = y_0^{(k)}, \quad y_0^{(k)} \in R^n, \tag{4}$$

где $y_0^{(k)}$ – некоторое приближение к значению искомого решения $y^*(t)$, взятому при $t = a$. Будем считать, что $y_0^k \approx y_0^* = y^*(a)$.

Для нахождения y_0^k составим замыкающую систему уравнений вида

$$g(y_0^{(k)}, u(b, y_0^{(k)})) = 0 \quad \text{или} \quad H(y_0^{(k)}) = 0. \tag{5}$$

Для численного решения последней системы можно применить соответствующий метод, например, метод Ньютона.

Рассмотрим метод двусторонней пристрелки. Его вычислительная схема представлена следующими формулами:

$$\begin{cases} u' = f(t,u), \quad t_1 \ge t \ge a, \\ u(t, y_1^{(k)})\big|_{t=t_1} = y_1^{(k)}, \quad y_1^{(k)} \in R^n, \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} v' = f(t,v), \quad t_1 \ge t \ge b, \\ v(t, y_1^{(k)})\big|_{t=t_1} = y_1^{(k)}, \quad y_1^{(k)} \in R^n, \end{cases} \tag{7}$$

Замыкающая система уравнений имеет вид:

$$g(u(a, y_1^{(k)}), v(b, y_1^{(k)})) = 0 \qquad \text{или} \qquad H(y_1^{(k)}) = 0, \tag{8}$$

где $y_1^{(k)}$ – начальное приближение к решению $y_1 = y^*(t_1)$. Системы уравнений (5) и (8) имеют решения, и этими решениями будут значения: $y_0^{(k)} = y_0^*, \quad y_1^{(k)} = y_1^*$.

Рассмотрим метод множественной двусторонней пристрелки. Этот метод является обобщением метода двусторонней пристрелки. Исходную задачу (1,2) представим в виде совокупности задач Коши, для которых в настоящее время существует много хорошо работающих и благоприятных в вычислительном отношении методов [1].

$$\begin{cases} u' = f(t,u), \quad t \in J_{2j-1}^{(-)} = \{t \mid t_{2j-1} \ge t \ge t_{2j-2}\}, \\ u(t, y_{2j-1}^{(k)})\big|_{t=t_{2j-1}} = y_{2j-1}^{(k)}, \quad y_{2j-1}^{(k)} \in R^n, \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} v' = f(t,v), \quad t \in J_{2j-1}^{(+)} = \{t \mid t_{2j-1} \le t \le t_{2j}\}, \\ v(t, y_{2j-1}^{(k)})\big|_{t=t_{2j-1}} = y_{2j-1}^{(k)}, \quad y_{2j-1}^{(k)} \in R^n, \quad j = \overline{1,m}, \end{cases} \tag{10}$$

где $\quad a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{2m} = b.$

Замыкающая система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} v(t_{2j}, y_{2j-1}^{(k)}) - u(t_{2j}, y_{2j+1}^{(k)}) = 0, \quad j = \overline{1, m-1}, \\ g(u(t_0, y_1^{(k)}), v(t_{2m}, y_{2m-1}^{(k)})) = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Отметим, что порядок этой системы определяется выбранным числом точек пристрелки и порядком системы о.д.у., а сама система учитывает одновременно прямое и обратное направление метода множественной двусторонней пристрелки.

Замыкающая система уравнений (11) в операторном виде выглядит следующим образом

$$H(z^{(k)}) = 0,$$

где $\quad z^{((k)} = (y_1^{(k)T}, y_3^{(k)T}, \ldots, y_{2m-1}^{(k)T})^T \in R^S, \quad S = n \times (m-1), \quad H : R^S \to R^S.$

Для решения замыкающей системы уравнений достаточно удобно применять модифицированный метод Ньютона.

Очевидно, что уравнение (11) будет иметь решение $z^{(k)} = z^*$, где

$$z^* = (y_1^{*T}, y_3^{*T}, \dots, y_{2m-1}^{*T})^T, \quad y_{2j-1}^* = y^*(t_{2j-1}), \quad j = \overline{1, m-1}.$$

Свойства замыкающих систем уравнений [2] методов пристрелки (5), двусторонней пристрелки (8) и множественной двусторонней пристрелки (м.м.д.п.) (11) зависят от правой части f исходного уравнения (1), от формы заданных граничных условий g (2), от области интегрирования $[a,b]$, точек пристрелки t_{2j-1} и траекторий пристрелки $u(t, y_{2j-1})$, $v(t, y_{2j-1})$. Указанные свойства наиболее полно характеризуются матрицами Якоби для соответствующих отображений [3].

Практическая реализация м.м.д.п. и его качества зависят главным образом от того, какие имеются возможности влияния на вычислительные свойства метода на следующих его основных этапах: 1) выбор числа подынтервалов пристрелки; 2) определение длин подынтервалов пристрелки; определение параметров пристрелки и их локализация; 4) регулировка свойств замыкающей системы уравнений вида (11) и ее оптимизация по числу уравнений; 5) определение пристрелочных траекторий; 6) организация итерационных процессов и их оптимизация.

ЛИТЕРАТУРА

1. Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге-Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений / Пер. с англ. М., 1983. С. 200.

2. Кулешова И.Ф., Монастырный П.И. К теории метода множественной двусторонней пристрелки для линейных задач с пограничным слоем. // ДАН БССР, 1989.,Т.33, №2, С.106–109.

3. Соловьева И.Ф. Получение границ спектра матриц Якоби в методе множественной двусторонней пристрелки. // Труды БГТУ, Сер. Физико-матем. науки и информ. Минск, 1995. № 2. С. 44–49.

УДК 512.812.4

Н.П. Можей, доц., канд. физ.-мат. наук (БГТУ, г. Минск)

ГЕОМЕТРИЯ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Решения дифференциальных уравнений определяют аффинные связности на расслоении, сечения которого играют роль неизвестных функций в задачах минимизации в теории управления. Поле экстре-