УДК 519.624

И.Ф. Соловьёва, доц., канд. физ.-мат. наук (БГТУ, г. Минск)

ПОСТРОЕНИЕ РЕГУЛИРУЮЩИХ МНОЖИТЕЛЕЙ ДЛЯ ЗАДАЧ С ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ

Двухточечные граничные задачи являются математическими моделями диффузионно-конвективных процессов или родственных им физических явлений. Диффузионным членом является слагаемое, включающее производные второго порядка, а конвективный член уравнения включает производные первого порядка. Задачи такого вида называются сингулярно возмущенными задачами. Их решение может быстро изменяться вблизи граничных точек, т.е. мы имеем пограничный слой. Причина трудности решений задач заключается в неустойчивости численного процесса [1]. Исследуем двухточечные граничные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с малым параметром при старшей производной вида:

$$\begin{cases} \varepsilon y''(x) + a(x)y'(x) - b(x)y(x) = f(x), \ 0 < x < 1, \\ y(0) = A, \quad y(1) = B, \quad a(x) > 0, \quad b(x) > 0. \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} -\varepsilon y''(x) + b(x)y(x) = f(x), \ 0 < x < 1, \\ y(0) = A, \quad y(1) = B, \quad b(x) > 0, \quad \varepsilon > 0, \end{cases} \tag{2}$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр при старшей производной. Задача вида (1) имеет один пограничный слой, а задача вида (2) – два пограничных слоя [2]. Представим обыкновенные дифференциальные уравнения (1)-(2) в виде системы о.д.у. вида

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + f_1(x), \quad 0 < x < 1, \\ y_2' &= a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + f_2(x) \end{aligned} \tag{3}$$

с граничными условиями:

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(a) + \beta_1 y_2(a) = \gamma_1, \quad \alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1, \\ \alpha_2 y_1(b) + \beta_2 y_2(b) = \gamma_2 \quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 = 1, \end{cases} \tag{4}$$

где $a_{ik}(x)$, $(i,k = 1,2)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ – непрерывны на отрезке $[a,b]$, α_i, β_i, γ_i – заданные постоянные. Предположим, что существует и причем единственное искомое решение задачи (3), (4). Обозначим его через $y_1(x)$ и $y_2(x)$.

В виде системы (3) можно представить любое линейное о.д.у., причем коэффициенты $a_{ik}(x)$ в этом случае будут зависеть от ε, т.е. $a_{ik}(x) \equiv a_{ik}(x,\varepsilon)$. В свою очередь, граничные условия (4) являются весьма общими, что позволяет рассматривать более широкий класс задач. Введем вспомогательную функцию $\Theta(x)$ и новые неизвестные функции

$$\begin{cases} u = m_1(x,\varepsilon)y_1(x)\sin\Theta(x) + m_2(x,\varepsilon)y_2(x)\cos\Theta(x), \\ v = m_1(x,\varepsilon)y_1(x)\cos\Theta(x) - m_2(x,\varepsilon)y_2(x)\sin\Theta(x), \end{cases} \qquad (5)$$

где $\varepsilon > 0$, $m_1(x,\varepsilon) > 0$ и $m_2(x,\varepsilon) > 0$ функции, в известной мере моделирующие профили пограничных слоев. В зонах пограничных слоев их выбор должен быть строго согласован с поведением функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$. Регулирующие множители $m_1(x,\varepsilon)$ и $m_2(x,\varepsilon)$ нужно выбирать таким образом, чтобы произведения $m_1(x,\varepsilon)y_1(x)$ и $m_2(x,\varepsilon)y_2(x)$ были в необходимой мере стабилизированы. Выражения для искомого решения и его производной получаются из последних соотношений.

$$\begin{cases} m_1(x,\varepsilon)y_1(x) = \sin\Theta(x)u(x) + \cos\Theta(x)v(x), \\ m_2(x,\varepsilon)y_2(x) = \cos\Theta(x)u(x) - \sin\Theta(x)v(x), \end{cases} \qquad (6)$$

Во многих случаях можно полагать $m_1(x,\varepsilon) \equiv 1$. В зонах пограничных слоев, вблизи точки $x = 0$ наблюдается быстрый рост производной. Для его нейтрализации введем регулирующий множитель для задачи (1)

$$m_2(x,\varepsilon) = -2\varepsilon\left(cth\frac{\sqrt{a^2(x) + 4b(x)\varepsilon}}{2\varepsilon}\right)^{-1}$$

Для задачи вида (2) регулирующий множитель будет иметь вид:

$$m_2(x,\varepsilon) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{b(x)} th\sqrt{\frac{b(x)}{\varepsilon}}} .$$

Полученные множители регулируют поведение функции $y(x)$ и его производной $y'(x)$ вблизи зон пограничных слоев. Приведенный метод дает возможность применять единый подход к решению граничных задач с малым параметром при старшей производной.

ЛИТЕРАТУРА

1 Холл, Д. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений /Д. Холл, Д. Уатт; пер. с англ. М.: Мир, 1979. – 312

2 Соловьева, И. Ф. О решении систем линейных о.д.у. второго порядка с пограничным слоем / И.Ф. Соловьева. // Труды БГТУ. Сер. Физ.-мат. науки и информ. – 2001. – Вып. IX. – С.7-11.