УДК 519.624

И. Ф. Соловьёва, доц., канд. физ.-мат. наук (БГТУ, г. Минск)

ОСОБЕННОСТИ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ С ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ

Одним из распространённых классов задач вычислительной математики, благодаря их многочисленным приложениям, являются граничные задачи для о.д.у. второго порядка с пограничным слоем.Их решение может быстро изменяться вблизи граничных точек, т.е. мы имеем пограничный слой. Причина трудности решений задач заключается в неустойчивости численного процесса [1].

Исследуем двухточечные граничные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с малым параметром при старшей производной вида:

$$\begin{cases} \varepsilon y''(x) + a(x)y'(x) - b(x)y(x) = f(x), \ 0 < x < 1, \\ y(0) = A, \quad y(1) = B, \quad a(x) > 0, \quad b(x) > 0. \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} -\varepsilon y''(x) + b(x)y(x) = f(x), \ 0 < x < 1, \\ y(0) = A, \quad y(1) = B, \quad b(x) > 0, \quad \varepsilon > 0, \end{cases} \tag{2}$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр при старшей производной. Задача вида (1) имеет один пограничный слой, а задача вида (2) – два пограничных слоя [2].

Численное решение задач вида (1)-(2) сопряжено с рядом существенных трудностей, проявления которых неочевидны и многообразны, в частности, наблюдается понижение порядка сходимости разностных схем и неравномерная сходимость их на равномерных сетках.

Для решения предложенных выше задач с пограничным слоем предлагается метод дифференциальной ортогональной прогонки. Сильной стороной данного метода является переход от исходной граничной задачи к совокупности задач Коши, для решения которых в настоящее время может быть применён широкий и разнообразный арсенал методов их решения, в том числе, например, и методы, обладающие B- устойчивостью и D- устойчивостью. В зависимости от того, где находится пограничный слой: на левом конце отрезка или на правом, могут строиться вычислительные схемы метода дифференциальной ортогональной прогонки, кроме того, они могут предусматривать и наличие двух пограничных слоёв.

Представим обыкновенные дифференциальные уравнения (1)-(2) в виде системы о.д.у. вида

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + f_1(x), \quad 0 < x < 1, \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + f_2(x) \end{cases} \qquad (3)$$

с граничными условиями:

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(a) + \beta_1 y_2(a) = \gamma_1, \quad \alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1, \\ \alpha_2 y_1(b) + \beta_2 y_2(b) = \gamma_2, \quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 = 1, \end{cases} \qquad (4)$$

где $a_{ik}(x)$, $(i,k = 1,2)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ – непрерывные функции на отрезке $[a,b]$, α_i, β_i, γ_i – заданные постоянные. Предположим, что существует, и, причем единственное искомое решение задачи (3), (4). Обозначим это решение: $y_1(x)$ и $y_2(x)$.

В виде системы (3) можно представить любое линейное о.д.у., причем коэффициенты $a_{ik}(x)$ в этом случае будут зависеть от ε, т.е. $a_{ik}(x) \equiv a_{ik}(x,\varepsilon)$. Введем вспомогательную функцию $\Theta(x)$ и новые неизвестные функции

$$\begin{cases} u = m_1(x,\varepsilon)y_1(x)\sin\Theta(x) + m_2(x,\varepsilon)y_2(x)\cos\Theta(x), \\ v = m_1(x,\varepsilon)y_1(x)\cos\Theta(x) - m_2(x,\varepsilon)y_2(x)\sin\Theta(x), \end{cases} \qquad (5)$$

где $\varepsilon > 0$, $m_1(x,\varepsilon) > 0$ и $m_2(x,\varepsilon) > 0$ функции, в известной мере моделирующие профили пограничных слоев. В зонах пограничных слоев их выбор должен быть строго согласован с поведением функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$. Регулирующие множители $m_1(x,\varepsilon)$ и $m_2(x,\varepsilon)$ нужно выбирать таким образом, чтобы произведения $m_1(x,\varepsilon)y_1(x)$ и $m_2(x,\varepsilon)y_2(x)$ были в необходимой мере стабилизированы. Выражения для искомого решения и его производной получаются из последних соотношений.

$$\begin{cases} m_1(x,\varepsilon)y_1(x) = \sin\Theta(x)u(x) + \cos\Theta(x)v(x), \\ m_2(x,\varepsilon)y_2(x) = \cos\Theta(x)u(x) - \sin\Theta(x)v(x), \end{cases} \qquad (6)$$

Приведенный метод дает возможность применять единый подход к решению граничных задач с малым параметром при старшей производной и с одним или двумя пограничными слоями.

Для демонстрации возможностей метода дифференциальной ортогональной прогонки рассмотрим численное решение задач с пограничным слоем.Наиболее интересные моменты вычислительного эксперимента приведём в таблицах, а само решение – в виде рисунков.

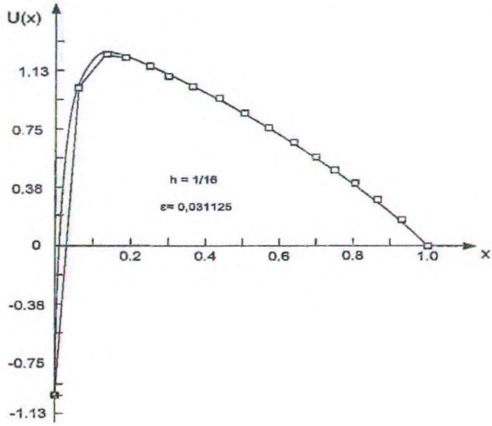
Пример 1. Рассмотрим задачу с одним пограничным слоем

$$\varepsilon y''(x) + (1+x^2)y'(x) - (x-1/2)^2 y(x) = -(e^x + x^2)$$

с граничными условиями вида $y(0) = -1;\ y(1) = 0$.

Таблица 1

x_i	$\Theta(x)$	u(x)	v(x)	y(x)
0 2/16	$\pi/2$ 2.51364	-1.000 0.35587	-104.285 -1.3341	-1.000 1.6886



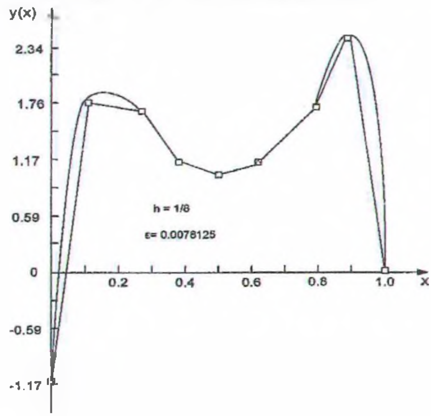
Пример 2. Рассмотрим задачу с двумя пограничными слоями

$-\varepsilon y''(x)+(1+x^2)y(x)=4(3x^4+3x^3-2x^2-x+1)$

с граничными условиями вида $y(0)=-1;\ y(1)=0.$

Таблица 2.

x_i	$\Theta(x)$	u(x)	v(x)	y(x)
2/16 15/16	1.6417 1.6173	1.3788 2.8621	-4.6845 1.6423	1.7175 2.0952



Имеет место следующее тождество:

$$u^2(x)+v^2(x) \equiv \left(m_1(x,\varepsilon)\, y_1(x)\right)^2 + \left(m_2(x,\varepsilon)\, y_2(x)\right)^2,$$

показывающее, что порядок роста функций $u(x)$ и $v(x)$ одинаков с порядком роста $m_1(x,\varepsilon)y_1(x)$ и $m_2(x,\varepsilon)y_2(x)$. Отметим, что в задаче (5) благоприятная в вычислительном отношении правая часть, в ней плавно изменяющаяся функция $\Theta(x)$ является аргументом.

Преимущество предлагаемого метода выражается в том, что он применим для задач с более естественными предположениями относительно начальных данных, не требует слишком мелкого измельчения сетки и позволяет избежать неустойчивости численного процесса.

ЛИТЕРАТУРА

1 Холл, Д. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений /Д. Холл, Д. Уатт; – М. : Мир, 1979 – 312с.

2 Соловьева, И. Ф. Построение регулирующих множителей для задач с пограничнымслоем/ И.Ф. Соловьева// Автомат.контроль и автоматизация произв. Процессов: материалы Междунар. научно-техн. конф. – Минск, 2009. – С. 275-276.

УДК 512.812.4

Н. П. Можей, доц., канд. физ.-мат. наук (БГТУ, г. Минск)

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

Хорошо известно, что наличие нетривиальной группы симметрий упрощает исследование управляемой системы. Исследование управляемости нелинейных систем является одной из центральных тем геометрической теории управления. Вопрос управляемости инвариантных систем на группах Ли тесно связан с управляемостью проекций этих систем на однородные пространства. Решения систем также определяют аффинные связности на расслоении, сечения которых играют роль неизвестных функций в задачах минимизации в теории управления. В частности, поле экстремалей существует, если кривизна такой связности равна нулю.

Одна из главных задач теории управления - задача управляемости - состоит в распознавании состояний, достижимых из начального. Множества достижимости теснейшим образом связаны с группой преобразований, порождённой динамическими системами, из которых состоит изучаемая управляемая. Правоинвариантные системы на группах Ли – управляемые системы, динамика которых описывается