

**К ВОПРОСУ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ОБЩЕГО ВИДА
С ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ**

Граничные задачи с пограничным слоем применяются в механике, акустике, динамике жидкостей, физике и других областях науки и техники. Они являются математическими моделями, решения которых отличаются сложным характером поведения, в частности, им присуще развитие пограничных либо внутренних переходных слоев с большими градиентами решений. Это значительно усложняет решение такого рода задач [1].

Причина трудности решений задач с пограничным слоем заключается в неустойчивости численного процесса [2]. Для решения названных выше задач предлагается модификация метода множественной двусторонней пристрелки, приводящая исходную граничную задачу к совокупности нескольких задач Коши.

Рассмотрим двухточечные граничные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с малым параметром при старшей производной

$$y' = A(x, \varepsilon)y + f(x, \varepsilon), 0 \leq x \leq 1 \quad (1)$$

с разделенными граничными условиями

$$\begin{cases} B y(0) = \beta, \\ C y(1) = \gamma, \end{cases} \quad (2)$$

где $y: [0, 1] \rightarrow R^n$; $A(x, \varepsilon) = (a_{ij}(x, \varepsilon))_i^n$; $f(x, \varepsilon) = (f_1(x, \varepsilon), \dots, f_n(x, \varepsilon))^T$; $\varepsilon > 0$ — малый параметр; $B = (b_{ij})_{i=1, \bar{n}}^{j=1, \bar{k}}$, $C = (c_{ij})_{i=1, \bar{l}}^{j=1, \bar{n}}$; $\beta \in R^k$; $\gamma \in R^l$; $\text{rang} B = k$; $\text{rang} C = l$; $k + l = n$; функции $a_{ij}(x, \varepsilon)$ и $f_i(x, \varepsilon)$ имеют зависимость от ε , характерную для задач с малым параметром при старшей производной [3].

Рассмотрим вычислительную схему метода множественной двусторонней пристрелки при общих предположениях относительно параметров, определяющих задачу (1)-(2), причем положение пограничных слоев в данной схеме жестко не учитывается.

Выберем точки пристрелки $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{2m} = 1$ и рассмотрим пристрелочные задачи Коши:

$$\begin{cases} u' = A(x, \varepsilon)u + f(x, \varepsilon), & x \in J_{2j-1}^{(*)} = \{x_{2j-1} \leq x \leq x_{2j}\}, \\ u(x, y_{2j-1})|_{x=x_{2j-1}} = y_{2j-1}, \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} v' = A(x, \varepsilon)v + f(x, \varepsilon), & x \in J_{2j-1}^{(-)} = \{x_{2j-1} \geq x \geq x_{2j-2}\}, \\ v(x, y_{2j-1})|_{x=x_{2j-1}} = y_{2j-1}, & y_{2j-1} \in R^n, \end{cases} \quad (4)$$

где $y_1, y_3, \dots, y_{2m-1}$ – параметры пристрелки. Для их определения легко получить систему уравнений

$$\begin{cases} u(x_{2j}, y_{2j-1}) - v(x_{2j}, y_{2j+1}) = 0, & j = \overline{1, m-1}, \\ Bv(x_0, y_1) - \beta = 0, & Cu(x_{2m}, y_{2m-1}) - \gamma = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Систему вида (5) запишем операторном виде:

$$H(z) = 0, \quad (6)$$

где $H: R^N \rightarrow R^N$, $N = mn$, $z = (y_1^T, y_2^T, \dots, y_{2m-1}^T)^T$.

Более сложно обстоит дело непосредственно в зонах пограничных слоев. Здесь решение и особенно его градиент начинают неограниченно расти, поэтому нужно достаточно точно проследивать пристрелочные траектории. Для этого необходимо регулировать выбор пристрелочных параметров y_{2j-1} , гибко определять длину положительных $J_{2j-1}^{(+)}$ и отрицательных $J_{2j-1}^{(-)}$ подинтервалов пристрелки и правильно выбирать соответствующие методы для решения задач Коши, к которым сводится исходная граничная задача. Эти требования также относятся и к жестким задачам [4].

Вектор-функции $u(x, y_{2j-1})$ представим следующим образом:

$$u(x, y_{2j-1}) = U_{2j-1}(x)y_{2j-1} + u_{2j-1}^{(0)}(x), \quad (7)$$

где матрица $U_{2j-1}(x)$ – решение задачи Коши

$$\begin{cases} U'_{2j-1} = A(x, \varepsilon)U_{2j-1}, & x_{2j-1} \leq x \leq x_{2j}, \\ U_{2j-1}(x_{2j-1}) = E \end{cases}, \quad (8)$$

а $u_{2j-1}^{(0)}(x)$ – частное решение неоднородного уравнения:

$$\begin{cases} u_{2j-1}^{(0)'} = A(x, \varepsilon)u_{2j-1}^{(0)} + f(x), & x_{2j-1} \leq x \leq x_{2j}, \\ u_{2j-1}^{(0)}(x_{2j-1}) = 0, \end{cases}$$

Аналогично получаются и вектор-функции $v(x, y_{2j-1})$

$$v(x, y_{2j-1}) = V_{2j-1}(x)y_{2j-1} + v_{2j-1}^{(0)}(x),$$

где матрица $V_{2j-1}(x)$ – решение задачи Коши:

$$\begin{cases} V'_{2j-1} = A(x, \varepsilon)V_{2j-1}, & x_{2j-1} \geq x \geq x_{2j-2}, \\ V_{2j-1}(x_{2j-1}) = E \end{cases},$$

а $v_{2j-1}^{(0)}(x)$ – частное решение неоднородного уравнения

$$\begin{cases} v_{2j-1}^{(0)'} = A(x, \varepsilon) v_{2j-1}^{(0)} + f(x), & x_{2j-1} \geq x \geq x_{2j-2}, \\ v^{(0)}(x_{2j-1}) = 0, \end{cases}$$

Форма представления решений $u(x, y_{2j-1})$ и $v(x, y_{2j-1})$ такого рода позволяет более наглядно судить о роли начальных значений y_{2j-1} и подинтервалов пристрелки.

Обозначим $z^* = (y^{*T}(t_1), y^{*T}(t_2), \dots, y^{*T}(t_{2m-1}))^T$, где y^{*T} — решение исходной задачи (1)-(2). В этом случае будет выполняться условие

$$H(z^*) = 0.$$

Предположим, что $z^{(k)} = (y_1^{(k)T}, y_3^{(k)T}, \dots, y_{2m-1}^{(k)T})^T$ — k -ое приближение к z^* . Например, по методу Ньютона можно вычислить следующее $(k+1)$ -е приближение:

$$z^{(k+1)} = z^{(k)} + \Delta z^{(k)},$$

где

$$\frac{\partial H(z^k)}{\partial z} \Delta z^{(k)} = -H(z^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{и} \quad \Delta z^{(k)} = \begin{bmatrix} \Delta z_1^{(k)} \\ \Delta z_3^{(k)} \\ \dots \\ \Delta z_{2m-1}^{(k)} \end{bmatrix}, \text{ матрица Якоби } \frac{\partial H(z^k)}{\partial z} \in L(R^N, R^N).$$

Для сходимости $\{z^{(k)}\}$ важное значение имеет условие невырожденности матрицы $\frac{\partial H(z^k)}{\partial z}$. Для этого нужно указать ограничения на $A(x, \varepsilon)$, x_j , B , C , при которых выполняется:

$$\det \frac{\partial H(z^k)}{\partial z} \neq 0, \quad \forall z^{(k)} \in R^N$$

Вычисляемое в данном методе решение будет представлено в виде формулы:

$$w(x, y_{2j-1}) = \begin{cases} v(x, y_{2j-1}), & x \in J_{2j-1}^{(-)}, \\ u(x, y_{2j-1}), & x \in J_{2j-1}^{(+)}, \quad j = \overline{1, m}. \end{cases}$$

Определение 1. Метод множественной двусторонней пристрелки называется сходящимся, если сходится итерационная последовательность $\{z^{(k)}\}_0^\infty$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} z^{(k)} = z^*$.

Обозначим через $\delta(x)$ вариацию для точного решения задачи (1)-(2).

$$\delta'(x) = A(x, \varepsilon) \delta(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad B\delta(0) = 0, \quad C\delta(1) = 0.$$

Определение 2. Решение задачи (1)-(2) будет изолированным тогда и только тогда, когда выполняется условие $\delta(x) \equiv 0$.

Для рассматриваемых задач (1)-(2) данное требование означает их однозначную разрешимость.

Свойства матрицы $\frac{\partial H(z)}{\partial z}$ можно регулировать путем выбора числа m положительных $J_{2j-1}^{(+)}$ и отрицательных $J_{2j-1}^{(-)}$ подинтервалов пристрелки.

Теорема. Если решение задачи (1)-(2) изолированное, то $H(z)|_{z=z^*} = 0$ и $\det \frac{\partial H(z^*)}{\partial z} \neq 0, \forall z^{(k)} \in R^n$.

Доказательство. Если $y_{2j-1} = y(x_{2j-1})$, то $u(x_{2j}, y(x_{2j-1})) = v(x_{2j}, y(x_{2j+1}))$, $j = \overline{1, m-1}$, $v(x_0, y(x_1)) = y(0)$ и $u(x_{2m}, y(x_{2m-1})) = y(1)$. Значит, $H(z^*) = 0$. Изолированность решения имеет место при выполнении условия

$$D_m^{(0)} = \det \left[\frac{B}{C\Phi(1)} \right] \neq 0,$$

где $\Phi(x)$ – матричное решение задачи Коши:

$$\Phi'(x) = A(x, \varepsilon)\Phi(x), \quad \Phi(0) = E, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Обычными вычислениями показывается, что $\det \frac{\partial H(z^*)}{\partial z} = D_m^{(0)} \Lambda_m^{(0)}$, где $\Lambda_m^{(0)}$ – определитель матрицы, невырожденность которой легко обеспечить путем выбора достаточно малой длины отрицательного подинтервала $J_{2j-1}^{(-)}$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя / М. Наука. 1974.
2. Холл, Д. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений / Д. Холл, Д. Уатт; пер. с англ. – М.: Мир, 1979. – 312
3. Соловьева, И. Ф. О решении систем линейных о. д. у. второго порядка с пограничным слоем / И.Ф. Соловьева Труды БГТУ. Сер./физ.-мат. науки и информ. – 2001. – Вып. IX – С. 7-11.
4. Дулан Э., Миллер Дж., Шилдерс У. Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем / пер. с англ. М., 1983. С. 200.