

рица оператора $d\varphi_Y(p(Y))$ близка к матрице (8) и потому имеет $k-1(n-k-1)$ собственных значений с модулем меньшим (большим) 1.

При $f(Y)=0$ L_Y очевидно является замкнутой траекторией типа $H_k(1-, 1, 0)$.

Построение окрестности $U(L)$, о которой идет речь в теореме, мы опустим.

5. Бифуркации смены типа $H_k(m, m, 0) \rightarrow H_k(m-1, m-1, 0)$. Замкнутую траекторию типа $H_k(m-, m-, 0)$ при $m > 1$ определим теми же условиями, что и замкнутую траекторию типа $H_k(m, m, 0)$, со следующими изменениями: $t_{2m-1} = t_{2m}$, $p = x(t_{2m}) \in \partial S_{IX} \cap \text{int } S_{jX}$, а отображение φ определяется так же, как для типа $H_k(1-, 1, 0)$.

Теорема 2. Пусть векторное поле X имеет замкнутую траекторию L типа $H_k(m-, m-, 0)$. Тогда существуют окрестность $U(L)$ траектории L , окрестность $U(X)$ поля X и C^1 -функция $f: U(X) \rightarrow \mathbf{R}$, $df(X) \neq 0$ такие, что поле X имеет в $U(L)$ единственную замкнутую траекторию, имеющую при $f(Y) < 0$ тип $H_k(m, m, 0)$, при $f(Y) = 0$ тип $H_k(m-, m-, 0)$, при $f(Y) > 0$ тип $H_k(m-1, m-1, 0)$.

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
2. Ройтенберг В.Ш. О бифуркациях петель сепаратрис особых точек на линии разрыва. 1987. 25 с. Деп. в ВИНТИ, № 2795-В 87.
3. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.

УДК 519.624

И.Ф. Соловьева

Белорусский государственный технологический университет

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ

В статье получено решение граничной задачи с пограничным слоем и с малым параметром при старшей производной на концах заданного отрезка с использованием метода множественной двусторонней пристрелки.

Многие прикладные задачи, с которыми сталкиваются физики, инженеры и специалисты по вычислительной математике, описываются математическими моделями. В основе этих моделей лежат о.д.у. с малым параметром при старшей производной и с возникающими при этом в их решении пограничными или внутренними переходными слоями. Дифференциальным уравнениям с малым параметром при старшей производной присуще явление жесткости. В вычислительной математике этим свойством обладают, как правило, наиболее сложные задачи [1]. Они представляют собой такую математическую модель, построение и реализация для которой соответствующей дискретной модели является по-прежнему трудной и далекой от завершенности проблемой.

В задачах Коши и в граничных задачах роль жесткости различна, кроме этого, в них различен и механизм проявления жесткости. В связи с этим представляет интерес изучение взаимодействия этих двух сторон проявления жесткости в вычислительных схемах метода множественной двусторонней пристрелки [2].

Рассмотрим граничную задачу с пограничным слоем и фиксированным малым параметром $\epsilon > 0$ при старшей производной вида

$$Ly(x) = \epsilon y''(x) + a(x)y'(x) - b(x)y(x) = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad (1)$$

$$y(0) = A, \quad y(1) = B, \quad a(x) \geq \alpha > 0, \quad b(x) \geq 0. \quad (2)$$

Рассмотрим некоторые аспекты проблемы жесткости на примере жесткой граничной задачи вида (1,2) с одним пограничным слоем вблизи точки $x = 0$ и выясним, в какой мере переход от граничной задачи к задачам Коши может оказаться эффективным.

В задаче (1,2) будем "замораживать" коэффициенты, предполагая при этом, что $a(x) = \text{const}$, $b(x) = \text{const}$. В уравнении (1) будем полагать $f(x) = 0$.

Тогда решение граничной задачи вида (1,2) запишется в виде

$$y(x) = C_1 \exp(\lambda_1 x) + C_2 \exp(\lambda_2 x), \quad \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0. \quad (3)$$

Используя граничные условия, определим C_1, C_2 .

$$C_1 = (B - A \exp(\lambda_1)) / (\exp(\lambda_1) - \exp(\lambda_2)),$$

$$C_2 = (B - A \exp(\lambda_1)) / (\exp(\lambda_2) - \exp(\lambda_1)).$$

Решение $y(x)$ представим в таком виде, чтобы в нем явно выделялось влияние величин A, B :

$$y(x) = AG_1(x) + BG_2(x),$$

где $G_1(x) = (\exp(\lambda_1 + \lambda_2 x) - \exp(\lambda_2 + \lambda_1 x)) / (\exp(\lambda_1) - \exp(\lambda_2)),$

$$G_2(x) = (\exp(\lambda_1 x) - \exp(\lambda_2 x)) / (\exp(\lambda_1) - \exp(\lambda_2)).$$

Введем следующие обозначения:

$$C^{(0)} = A, C^{(1)} = y'(0) = AG_1'(0) + BG_2'(0) = \\ (A(\lambda_2 \exp(\lambda_1) - \lambda_1 \exp(\lambda_2)) + B(\lambda_1 - \lambda_2)) / (\exp(\lambda_1) - \exp(\lambda_2))$$

и запишем решение граничной задачи (1,2) в виде

$$y_1(x) = G^{(0)}H_1(x) + G^{(1)}H_2(x), \quad x \in J^{(+)} = \{0 < x < 1\}, \quad (4)$$

где

$$H_1(x) = (\lambda_1 \exp(\lambda_2 x) - \lambda_2 \exp(\lambda_1 x)) / (\lambda_1 - \lambda_2),$$

$$H_2(x) = (\lambda_2 \exp(\lambda_1 x) - \lambda_1 \exp(\lambda_2 x)) / (\lambda_2 - \lambda_1).$$

Легко заметить, что $y_1(x) = y(x)$.

Таким же образом получается решение граничной задачи вида (1,2) и на правом конце отрезка.

Введем обозначения $y(1) = D(0) = B$ и $y'(1) = D(1) = A G_1'(1) + B G_2'(1)$. Тогда решение граничной задачи с пограничным слоем вида (1,2) запишется в следующем виде:

$$y_2(x) = D^{(0)}P_1(x) + D^{(1)}P_2(x), \quad x \in J^{(-)} = \{1 > x > 0\}, \quad (5)$$

где

$$P_1(x) = (\lambda_1 \exp(-\lambda_2(1-x)) - \lambda_2 \exp(-\lambda_1(1-x))) / (\lambda_1 - \lambda_2),$$

$$P_2(x) = (\exp(-\lambda_2(1-x)) - \exp(-\lambda_1(1-x))) / (\lambda_1 - \lambda_2).$$

Легко заметить, что $y_2(x) = y(x)$.

Проведем анализ поведения функций влияния $G_i(x)$, $H_i(x)$, $P_i(x)$, $i=1,2$. Особое внимание уделим этим функциям на концах отрезка $[0;1]$.

1. Рассмотрим поведение функций $G_1(x)$ и $G_2(x)$ на концах отрезка.

Если $x \rightarrow 0$, то $G_1(x) \rightarrow 1$; если $x \rightarrow 1$, то $G_1(x) \rightarrow 0$. Для $G_2(x)$ справедлива обратная картина: $G_2(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$ и $G_2(x) \rightarrow 1$ при $x \rightarrow 1$.

Схематично проиллюстрируем поведение функций $G_1(x)$ и $G_2(x)$ следующими графиками (рис. 1).

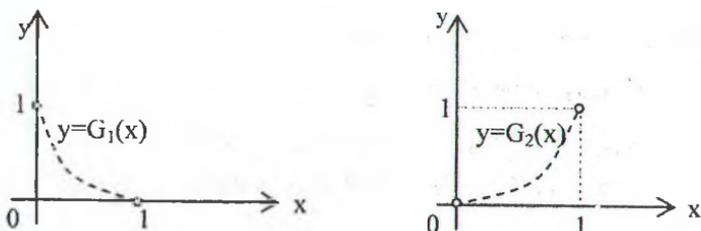


Рис. 1

2. Рассмотрим поведение функций $H_1(x)$ и $H_2(x)$ на концах отрезка.

Если $H_1(x) \rightarrow 1$ при $x \rightarrow 0$ и $H_1(x) \rightarrow M_1$ при $x \rightarrow 1$, то $M_1 = (\lambda_1 \exp(\lambda_2) - \lambda_2 \exp(\lambda_1)) / (\lambda_1 - \lambda_2) > 1$.

Если $H_2(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$ и $H_2(x) \rightarrow M_2$ при $x \rightarrow 1$, то $M_2 = (\exp(\lambda_1) - \exp(\lambda_2)) / (\lambda_1 - \lambda_2) > 1$.

Схематично проиллюстрируем поведение функций $H_1(x)$ и $H_2(x)$ следующими графиками (рис. 2).

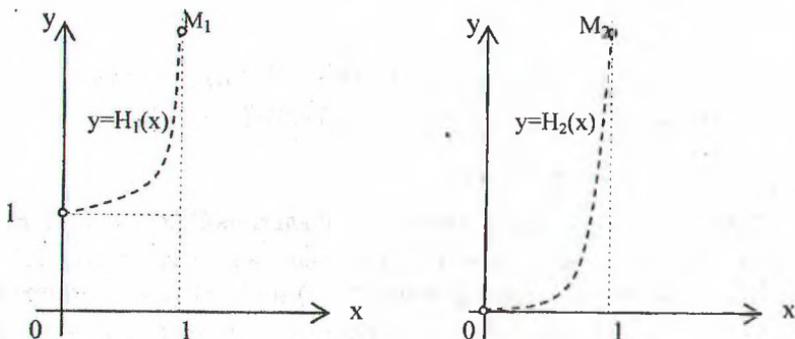


Рис. 2

3. Рассмотрим поведение функций $P_1(x)$ и $P_2(x)$ на концах интервала.

Если $P_1(x) \rightarrow K_1$ при $x \rightarrow 0$, то

$$K_1 = (\lambda_1 \exp(-\lambda_2) - \lambda_2 \exp(-\lambda_1)) / (\lambda_1 - \lambda_2) > 1.$$

Если $P_1(x) \rightarrow 1$ при $x \rightarrow 1$; $P_2(x) \rightarrow K_2$ при $x \rightarrow 0$; то

$$K_2 = (\exp(-\lambda_2) - \exp(-\lambda_1)) / (\lambda_1 - \lambda_2) > 1.$$

Схематично проиллюстрируем поведение функций $P_1(x)$ и $P_2(x)$ следующими графиками (рис. 3).

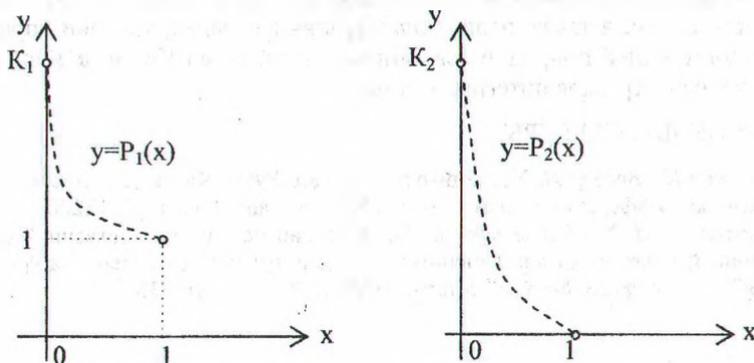


Рис. 3

Рассмотрев все возможности поведения функций на отрезке $[0;1]$, видим, что функции $P_1(x)$ и $P_2(x)$ имеют пограничный слой в точке $x=0$, а функции $G_1(x)$, $G_2(x)$, $H_1(x)$ и $H_2(x)$ имеют пограничный слой в точке $x=1$. При этом изменение производных для всех этих функций в соответствующих зонах пограничного слоя является равносильным. Поэтому не следует однозначно отдавать предпочтение форме (3), которая представляет решение исходной граничной задачи, перед соответствующими формами вида (4) и (5). И, кроме этого, нужно учитывать, что функции $G_1(x)$ и $G_2(x)$ сами имеют пограничные слои в обеих точках: $x=0$ и $x=1$, что создает в представлении решения определенную дополнительную сложность.

Учитывая поведение функций $H_1(x)$, $H_2(x)$ и $P_1(x)$, $P_2(x)$, заметим, что можно указать такую внутреннюю точку $x_0 \in (0,1)$ вблизи точки $x=0$ и такую внутреннюю точку $x_1 \in (0,1)$ вблизи точки $x=1$, что

поведение функций $H_1(x)$, $H_2(x)$ на $[0: x_0)$, и функций $P_1(x)$, $P_2(x)$ на $[x_1, 1)$ будет благоприятным в том смысле, что на этих отрезках отрицательное влияние пограничных слоев будет нейтрализовано. Эту возможность можно использовать для того, чтобы отрезок $[0; 1]$ покрыть совокупностью положительных $J^{(+)}$ и отрицательных $J^{(-)}$ подинтервалов пристрелки, причем таких, на которых будет нейтрализовано отрицательное влияние пограничных слоев.

Этот механизм четко прослеживается в методе множественной двусторонней пристрелки [2]. Обнаруженные здесь закономерности имеют место в случае линейных граничных задач общего вида с пограничным слоем, а также нелинейных граничных задач, т.к. они определяются внутренней природой граничной задачи, задач Коши, длиной и направлением отрезков интегрирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге-Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений / Пер. с англ. М., 1983. С.200.
2. Кулешова И.Ф., Монастырский П.И. К теории метода множественной двусторонней пристрелки для линейных задач с пограничным слоем // Журн. ДАН БССР. Сер. физико-матем. Минск. 1989. Т.33, №2. С.106-109

УДК 512.55

З.Я. Якупов

Казанский государственный технический университет
им. А.Н.Туполева

F-ЛОКАЛЬНОСТЬ И ПЕРВИЧНЫЕ КОЛЬЦА

Доминирующий подход в современной теории формальных языков – алгебраический, в котором существенно используется аппарат, базирующийся на понятиях алгебраических структур колец и полуколец. В статье рассматривается взаимосвязь понятия первичного кольца и свойства f -локальности, возникающего в конструкции локализации некоммутативных колец.

Пусть R – ассоциативное кольцо, не обязательно с 1. Для правого R – модуля M обозначим через $(0:M)R$ множество всех элементов $x \in R$ таких, что $Mx=0$. Это множество является аннулятором R -модуля M .

R -модуль M называется точным, если $(0:M)R=0$.