

Ба 248064 ✓

АКАДЕМИЯ НАУК БЕЛАРУСИ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукописи

КУЛЕШОВА ИРИНА ФЕДОРОВНА

ПОСТРОЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ
РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ С ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ
(01.01.07 - вычислительная математика)

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

МИНСК - 1991

Работа выполнена на кафедре численных методов и программирования механико-математического факультета Белорусского государственного университета им. В.И.Ленина.

- Научный руководитель — доктор физико-математических наук,
профессор
Монастырный Пётр Ильич
- Официальные оппоненты — доктор физико-математических наук,
член-корреспондент АН Беларуси
Янович Леонид Александрович
- кандидат физико-математических наук,
доцент
Самусенко Анатолий Васильевич
- Ведущая организация — Киевский государственный университет
имени Т.Г.Шевченко

Защита диссертации состоится "24" января 1992 года
в ____ часов на заседании специализированного совета К 006.19.01
в Институте математики АН Беларуси по адресу: Минск, ул.Сурганова,
дом 11, Институт математики АН Беларуси, к. 79.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института
математики АН Беларуси.

Автореферат разослан "___" _____ 1991 года.

Учёный секретарь
специализированного совета
кандидат физ.-мат.наук

А.И. Астровский — А.И. Астровский

I. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Математическими моделями задач о вычислениях сопротивления, возникающего при обтекании тела, о вычислении сопротивления трения корабля, задач, описывающих всевозможные диффузионно-конвективные процессы или родственные явления в физике, механике, технике и других областях современной науки, являются во многих случаях прикладными граничными задачами с малым параметром при старшей производной и возникающими при этом в решении граничных задач пограничными либо внутренними переходными слоями. Такого рода задачи постоянно вызвали и вызывают устойчивый интерес. Вопросам их численного решения посвящено большое число монографий, книг и журнальных статей. Здесь можно отметить, например, работы следующих авторов: На Ц., Холл Дж., Уатт Дж., Робертс С., Шипмен Дж., Дулан Э., Миллер Дж., Шилдерс У. и др. Круг методов, специально предназначенных для решения задач с пограничным слоем, является достаточно широким и разнообразным, к их числу, в первую очередь, можно отнести различные сеточные методы (работы Самарского А.А., Лисейкина В.Д., Ильина А.М., Емельянова К.Р., Шишкина Г.И. и др.), итерационные (работы Марчука Г.И., Ильина В.П., Шаманского В.Е. и др.), асимптотические (работы Бахвалова Н.С., Лидского В.В. и др.), методы возмущений, возникшие в связи с решением задач небесной механики (работы Ляпунова А.М., Васильевой А.Б., Бутузова В.Ф., Вишика М.И., Люстерника Л.А., Ван Дэйка, Найфа А.Х. и др.), методы прогонки (работы Абрамова А.А., Годунова С.К., Гельфанда И.М., Локутиевского О.В., Монастырного П.И. и др.).

Наверное, близкой к идеальной в случае решения вышеназванных задач можно было бы назвать вычислительную процедуру, соединяющую в себе две разновидности перечисленных выше методов: непосредственно вблизи пограничных слоёв применялись бы экспоненциальные разностные схемы, а на остальном участке — классические, однако, опыт показывает, что практически это обеспечить с выгодой в общем случае трудно или невозможно.

Актуальность рассматриваемой тематики объясняется в основном следующими причинами: в связи с потребностями приложений и математического моделирования нередко возникают

новые классы граничных задач, к которым применение существующих методов невозможно или является недостаточно эффективным. В связи с этим появляется необходимость распространения существующих методов на более общие дифференциальные задачи и построение новых вычислительных алгоритмов, которые охватывали бы более широкие классы задач с пограничным слоем. Такие методы должны обладать большой универсальностью, гибкими вычислительными свойствами, должны предоставлять вычислителя разнообразные возможности выбора подходящих схем, которые помогли бы обойти или ослабить трудности решения систем численных уравнений высокого порядка и, следовательно, давали бы возможность, в частности, избежать многих трудных вопросов, связанных с организацией итерационных процессов и обеспечением их сходимости.

Цель работы. Построение и исследование численных методов для решения граничных задач в случае дифференциальных уравнений и систем с пограничным слоем, обладающих такими основными качествами, как устойчивость, достаточно высокая точность, универсальность и удобная реализуемость на ЭВМ. Проведение вычислительных экспериментов по решению ряда прикладных и модельных задач в области физики плазмы, гидродинамики, теории упругости.

Научная новизна. Для решения граничных задач с пограничным слоем разработан вариант метода дифференциальной ортогональной прогонки с введением регулирующих множителей, моделирующих поведение решений в зонах пограничных слоёв. Выполнены численные эксперименты по решению типичных задач с погранслоем. Даны сравнительные характеристики полученных результатов с существующими. Доказана устойчивость в малом для варианта метода дифференциальной ортогональной прогонки и получены оценки погрешностей. Предложен новый класс вычислительных алгоритмов для решения систем линейных о.д.у. второго порядка с погранслоем, основанный на методе унитарной прогонки. Для регулирования роста градиентов решений в зонах погранслоёв построены специальные алгоритмы, основанные на введении в областях погранслоев регулирующих матриц-множителей, обеспечивающих нормальный рост решений и градиентов решений. Для решения системы линейных о.д.у. первого порядка с пограничным слоем

исследован алгоритм метода множественной двусторонней пристрелки. Изучены свойства матрицы Якоби и возможности их регулирования. Исследован ряд важных вычислительных характеристик, определяющих качественную сторону вычислений. Дано обобщение результатов на некоторые нелинейные граничные задачи с пограничным слоем. Даны сравнительные характеристики вычислительных свойств предлагаемых методов с другими родственными методами. Проведено изучение спектральных свойств матриц замыкающих систем, полученных при применении метода множественной двусторонней пристрелки. При этом проведён анализ чисел обусловленности матрицы Якоби для различных разбиений области интегрирования. Выполнено численное решение задачи, описывающей модель удержания плазменного столба с применением множественной двусторонней пристрелки, задачи о расчёте критической нагрузки колонны, задачи о движении жидкости между двумя цилиндрами с проницаемыми стенками бесконечной длины и нескольких типичных задач с одним и двумя пограничными слоями с применением различных вычислительных алгоритмов, предлагаемых в диссертации.

Практическая ценность. Проведённые в диссертации исследования и разработанные на их основе алгоритмы позволяют достаточно эффективно решать широкие классы задач с пограничными или внутренними переходными слоями. Кроме того, методика, предложенная в диссертации, позволяет решать ряд жёстких задач в случае линейных и нелинейных дифференциальных уравнений. Эффективность полученных модификаций подтверждена рядом вычислительных экспериментов. Полученные алгоритмы и программы могут быть использованы для практического решения подобных задач, а также в спецкурсах и спецсеминарах по теории решения граничных задач с пограничным слоем.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на научных конференциях профессорско-преподавательского состава БГУ им. В.И.Ленина, БТИ им. С.М.Кирова, на семинарах по вычислительной математике в БГУ им. В.И.Ленина, Института математики АН БССР, на республиканской научной конференции "Математическое моделирование и вычислительная математика" в г. Гродно.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1-14].

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, четырёх глав и заключения, содержит 184 страницы машинописного текста (без списка литературы). Полный объём диссертации, включая 38 таблиц, 9 рисунков и список литературы из 117 наименований, составляет 196 страниц.

II. СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении приводится обзор основных работ по исследуемой теме, обоснована актуальность темы и дано краткое содержание диссертации.

Первая глава посвящена изучению линейных граничных задач с малым параметром при старшей производной и с возникающими при этом пограничными либо внутренними переходными слоями.

В наиболее общей форме такие задачи имеют вид:

$$\varepsilon y''(x) + a(x)y'(x) - b(x)y(x) = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad (1)$$

$$\alpha y(0) + \beta y'(0) = A, \quad (2)$$

$$\gamma y(1) + \delta y'(1) = B, \quad \varepsilon > 0, \quad (3)$$

где a, b, f — гладкие на $[0, 1]$ функции, $A \geq a(x) \geq a^* > 0$, $B \geq b(x) \geq b^*$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$, $\alpha + \beta > 0$, $\gamma + \delta > 0$, $\gamma + b^* > 0$.

Эти условия являются типичными, если иметь в виду приложение к такого рода задачам метода подгоночных коэффициентов и родственных методик.

В §1 предложен вариант метода дифференциальной ортогональной прогонки (м.д.о.п.) с введением регулирующих множителей.

Суть м.д.о.п. для решения граничных задач вида (1-3) состоит в следующем.

Рассматривается граничная задача для системы о.д.у.

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + f_1(x), \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + f_2(x) \end{cases} \quad (4)$$

с граничными условиями:

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(a) + \beta_1 y_2(a) = \gamma_1, & \alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1, \\ \alpha_2 y_1(b) + \beta_2 y_2(b) = \gamma_2, & \alpha_2^2 + \beta_2^2 = 1, \end{cases} \quad (5)$$

где $a_{ik}(x)$, $i, k = 1, 2$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ непрерывны на $[a, b]$, при этом $a_{ik}(x)$ и $f_i(x)$, $i = 1, 2$ могут зависеть от ε ; $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ — заданные постоянные. Предполагается, что существует и единст-

еонно искомое решение $y_1(x)$, $y_2(x)$ задачи (4,5). Введём вспомогательную функцию $\theta(x)$ и новые неизвестные функции $u(x)$ и $v(x)$ по формулам:

$$u = m_1(x, \varepsilon) y_1(x) \sin \theta(x) + m_2(x, \varepsilon) y_2(x) \cos \theta(x), \quad (6)$$

$$v = m_1(x, \varepsilon) y_1(x) \cos \theta(x) - m_2(x, \varepsilon) y_2(x) \sin \theta(x), \quad (7)$$

где $\varepsilon > 0$, $m_1(x, \varepsilon) > 0$, $m_2(x, \varepsilon) > 0$ — функции-множители, в известной мере моделирующие профили пограничных слоёв. Их выбор в зонах погранслоёв должен быть согласован с поведением функций $y_1(x)$, $y_2(x)$ и должен быть таким, чтобы произведения $m_1(x, \varepsilon) y_1(x)$ и $m_2(x, \varepsilon) y_2(x)$ были в необходимой мере стабилизированы. Их можно, например, подобрать таким образом, чтобы выполнялись условия $m_1(x, \varepsilon) y_1(x) \approx \text{const}$, $m_2(x, \varepsilon) y_2(x) \approx \text{const}$ или $|m_1(x, \varepsilon) y_1(x)| \leq C$, $|m_2(x, \varepsilon) y_2(x)| \leq C$, $i = 1, 2$, где $C > 0$ — некоторая константа. Из соотношений (6,7) получим:

$$y_1(x) = \frac{1}{m_1(x, \varepsilon)} (u \sin \theta(x) + \cos \theta(x) v), \quad (8)$$

$$y_2(x) = \frac{1}{m_2(x, \varepsilon)} (\cos \theta(x) u(x) - \sin \theta(x) v(x)). \quad (9)$$

Для $u(x)$ и $v(x)$ имеют место следующие уравнения:

$$u' = b_{11}(x)u + b_{12}(x)v + c_1(x), \quad (10)$$

$$v' = b_{21}(x)u + b_{22}(x)v + c_2(x). \quad (11)$$

Эти уравнения можно разделить, если положить равным нулю $b_{12}(x)$ тогда получим следующее уравнение для $\theta(x)$:

$$\theta' + \left[a_{11} - a_{12} + \frac{m_1'}{m_1} - \frac{m_2'}{m_2} \right] \sin \theta \cos \theta + \frac{m_2'}{m_1} a_{21} \cos^2 \theta - \frac{m_1'}{m_2} a_{12} \sin^2 \theta = 0. \quad (12)$$

Дифференциальные уравнения для функций $\theta(x)$, $u(x)$, $v(x)$ таковы, что их можно численно решать последовательно, сначала (12), затем (10) и, наконец, (11). Начальные значения при этом будут иметь вид:

$$\sin \theta(a) = \frac{\beta_1}{\omega_1}, \quad \cos \theta(a) = \frac{\beta_2}{\omega_1}, \quad (13)$$

$$u(a) = \frac{\alpha_1}{\omega_1}, \quad v(a) = \frac{\alpha_2}{\omega_1}, \quad (14)$$

где $\beta_1 = \frac{\alpha_1}{m_1(a, \varepsilon)}$, $\beta_2 = \frac{\alpha_2}{m_2(a, \varepsilon)}$, $\omega_1 = \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}$.

Для уравнения (11), предназначенного для обратной прогонки, начальное условие определим следующим образом:

$$v(\beta) = \frac{1}{\Delta} \left[\gamma_2 - \left(\frac{\alpha_2}{m_1(\beta, \varepsilon)} \sin \theta(\beta) + \frac{\beta_2}{m_2(\beta, \varepsilon)} \cos \theta(\beta) \right) u(\beta) \right] \quad (15).$$

в предположении, что

$$\Delta = \frac{\alpha_2}{m_1(\beta, \varepsilon)} \cos \theta(\beta) - \frac{\beta_2}{m_2(\beta, \varepsilon)} \sin \theta(\beta) \neq 0.$$

После определения функций $\theta(x)$, $u(x)$, $v(x)$ искомое решение — функции $y_1(x)$, $y_2(x)$ находятся по формулам (8, 9).

Здесь же описан вариант м.д.о.п. в случае, когда пограничный слой находится на левом конце отрезка. Рассмотрен также случай, когда граничная задача имеет два пограничных слоя, и построена форма двусторонней ортогональной прегонки, в которой компромиссно соединяются правая и левая ортогональные прегонки в некоторой внутренней точке $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Дано приложение этой модификации м.д.о.п. к численному решению граничной задачи с двумя пограничными слоями на концах интервала с введением в зонах обоих пограничных слоев регулирующих множителей $m_1^{(i)}(x, \varepsilon) > 0$, $m_2^{(i)}(x, \varepsilon) > 0$, $i = 1, 2$.

Исследования, проведенные в §2, связаны с устойчивостью в малом варианта м.д.о.п. Доказана теорема.

Теорема I. Если граничная задача (1,3) устойчива относительно малых изменений величин, определяющих её, то устойчиве и рассматриваемый вариант м.д.о.п.

Здесь же получены оценки погрешностей по схеме предлагаемого м.д.о.п. Окончательные оценки погрешностей имеют вид:

$$\begin{aligned} E_{1n} &= \tilde{y}_n - y(x_n) = 2 \sin \frac{\tilde{\lambda}_n}{2} \left(y(x_n) \sin \frac{\tilde{\lambda}_n}{2} + y'(x_n) \cos \frac{\tilde{\lambda}_n}{2} \right) + \\ &\quad + \Gamma_n \sin \tilde{\theta}_n + \Delta_n \cos \tilde{\theta}_n + \rho_n, \\ E'_{1n} &= \tilde{y}'_n - y'(x_n) = -2 \sin \frac{\tilde{\lambda}_n}{2} \left(y(x_n) \cos \frac{\tilde{\lambda}_n}{2} + y'(x_n) \sin \frac{\tilde{\lambda}_n}{2} \right) + \\ &\quad + \Gamma_n \cos \tilde{\theta}_n - \Delta_n \sin \tilde{\theta}_n + \rho'_n, \end{aligned}$$

где ρ_n и ρ'_n — погрешности округлений при вычислении $\tilde{y}_{1n}$, $\tilde{y}'_{1n}$.

В §3 на основе м.д.о.п. строится алгоритм для решения задачи о критических длинах в специальных линейных граничных задачах с подвижным правым концом. Дано численное решение задачи о расчёте критической нагрузки колонны с шарнирным концом, на которую действует сила P .

Для целей иллюстрации возможностей метода приведём таблицу 1.1, где $\tilde{x}^*$ — приближённое значение критической длины.

Таблица I.I

t_k	$O(t_k)$	критическая длина	точн. знач.	$\frac{h}{2} + \pi h$
.99	4.70238583775			
1.00	4.71238879537	1.00000098	1.01	4.712388980
1.01	4.72239175266			
1.99	7.34397930621			
2.00	7.85398126399	2.00000174	2.01	7.853981634
2.01	7.86398422111			
2.99	10.9855707734			
3.00	10.9955737313	3.0000029131	3.01	10.995574287
3.01	11.0055766882			

В §4 выполнен ряд численных экспериментов по решению типичных граничных задач с пограничным, проведён их анализ и получено решение задачи о движении жидкости между двумя цилиндрами с проницаемыми стенками бесконечной длины.

Во второй главе исследуются методы решения граничных задач для линейных систем о.д.у. первого порядка с малым параметром при производной, основанные на методе множественной двусторонней пристрелки (м.м.д.п.)

В §5 строятся вычислительные схемы м.м.д.п. для случая линейных задач общего вида с пограничным слоем, содержащие в себе процедуру решения задач Коши в прямом и обратном направлениях и решение замыкающей системы численных уравнений.

Рассматривается система линейных о.д.у. первого порядка:

$$y' = A(x, \varepsilon)y + f(x, \varepsilon), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (16)$$

с разделёнными граничными условиями

$$B y(0) = \beta, \quad (17)$$

$$C y(1) = \gamma. \quad (18)$$

где $y: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $A(x, \varepsilon) = (a_{ij}(x, \varepsilon))_{i,j}^n$, $f(x, \varepsilon) = (f_1(x, \varepsilon), \dots, f_n(x, \varepsilon))^T$, $\varepsilon > 0$ - малый параметр, $B = (b_{ij})_{i,j=1}^m \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $C = (c_{ij})_{i,j=1}^l \in \mathbb{R}^{l \times n}$, $\beta \in \mathbb{R}^m$, $\gamma \in \mathbb{R}^l$, $\text{rang } B = m$, $\text{rang } C = l$. функции $a_{ij}(x, \varepsilon)$, $f_i(x, \varepsilon)$ имеют зависимость от ε , характерную для задач с малым параметром при старшей производной и пограничным.

Вычислительная схема предлагаемого алгоритма состоит из следующих этапов.

Решаются пристрелочные задачи Коши:

$$u' = f(x, \varepsilon)u + f, \quad x \in J_{2j-1}^{(+)} = \{x_{2j-1} \leq x \leq x_{2j}\}, \quad (19)$$

$$u(x_{2j}, y_{2j-1})|_{x=x_{2j-1}} = y_{2j-1},$$

$$v' = g(x, \varepsilon)v + f, \quad x \in J_{2j-1}^{(-)} = \{x_{2j-1} \geq x \geq x_{2j-2}\},$$

$$v(x, y_{2j-1})|_{x=x_{2j-1}} = y_{2j-1}, \quad y_{2j-1} \in \mathbb{R}^n, \quad (20)$$

где $y_1, \dots, y_{2m-1}$ — параметры пристрелки, для определения которых обычным путём может быть получена система уравнений:

$$\left. \begin{aligned} u(x_{2j}, y_{2j-1}) - v(x_{2j}, y_{2j-1}) &= 0, \quad j = 1, m-1, \\ \beta v(x_0, y_1) - \beta = 0, \quad \alpha u(x_{2m}, y_{2m-1}) - \gamma = 0, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

которую можно записать в общем виде:

$$\mathcal{H}(z) = 0 \quad (22)$$

где $\mathcal{H}: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$, $N = m \cdot n$, $z = (y_1^T, y_3^T, \dots, y_{2m-1}^T)^T$

В зонах пограничных или переходных слоёв поведение решения сильно усложняется, и, чтобы получить возможность точно пролеживать пристрелочные траектории, необходимо регулировать выбор пристрелочных параметров y_{2j-1} , гибко определять длину положительных $J_{2j-1}^{(+)}$ и отрицательных $J_{2j-1}^{(-)}$ подынтервалов пристрелки и правильно выбирать подходящие методы для численного решения задач Коши, в том числе и жестких задач.

Обозначим $z^* = (y_1^{*T}, \dots, y_{2m-1}^{*T})^T$, где $y^*(t)$ — решение задачи (16–18), тогда будет выполняться условие $\mathcal{H}(z^*) = 0$. Пусть $z^{(k)} = (y_1^{(k)T}, \dots, y_{2m-1}^{(k)T})^T$ — k -ое приближение к z^* , $(k+1)$ -е приближение вычисляется по методу Ньютона:

$$z^{(k+1)} = z^{(k)} + \Delta z^{(k)} \quad (23)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}(z^{(k)})}{\partial z} \Delta z^{(k)} = -\mathcal{H}(z^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (24)$$

$$\Delta z^{(k)} = \begin{bmatrix} \Delta z_1^{(k)} \\ \vdots \\ \Delta z_{2m-1}^{(k)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^N, \quad \frac{\partial \mathcal{H}(z^{(k)})}{\partial z} \in L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N).$$

Определение 5.1. М.м.д.п. называется сходящимся, если сходится итерационная последовательность $\{z^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} z^{(k)} = z^*$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 5.1. Если решение задачи (16–18) изолированное, то $\det(\partial \mathcal{H}(z)/\partial z) \neq 0$ и $\mathcal{H}(z)|_{z=z^*} = 0$ при $\forall z \in \mathbb{R}^N$.

В §6 изучаются свойства матрицы Якоби для замыкающей системы уравнений и свойства пристрелочных задач Коши.

В §7 на примере исходной граничной задачи поясняется механизм проявления жёсткости в рамках вычислительных схем методов редукции граничных задач к задачам Коши, в том числе и в вычислительной схеме м.м.д.п.

В третьей главе в случае граничных задач для линейных систем о.д.у. второго порядка с погранслоем построены и исследованы модификации метода унитарной прогонки (м.у.п.).

В §8 представлена модификация м.у.п. для решения задач вида

$$L y(x) = -E y''(x) + A(x) y'(x) + B(x) y(x) = f(x), \quad \alpha \leq x \leq \beta, \quad (25)$$

$$A_1 y'(\alpha) + A_2 y(\alpha) = a, \quad (26)$$

$$B_1 y'(\beta) + B_2 y(\beta) = b \quad (27)$$

в предположении, что $A(x), B(x)$ — произвольные квадратные матрицы порядка $(n \times n)$, элементы которых кусочно-непрерывные функции x , $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}^n$, A_1, A_2, B_1, B_2 — известные квадратные матрицы порядка $(n \times n)$, такие, что прямоугольные матрицы (A_1, A_2) и (B_1, B_2) имеют $\text{rang}[A_1, A_2] = n$, $\text{rang}[B_1, B_2] = n$, $\varepsilon > 0$ — малый параметр при старшей производной.

Вычислительная схема предлагаемого алгоритма для решения задач вида (25–27) состоит в следующем.

Вводятся регулирующие матрицы-множители $M_1(x, \varepsilon)$ и $M_2(x, \varepsilon)$ и рассматриваются далее преобразованные вектор-функции $M_1(x, \varepsilon) y(x)$ и $M_2(x, \varepsilon) y'(x)$.

Вводятся в рассмотрение вспомогательные вектор-функции $\gamma(x), \xi(x)$, определённые на $[\alpha, \beta]$ и матрицы $W_i(x)$, $i = \overline{1, 4}$ по правилу:

$$\gamma(x) = W_1^*(x) [M_2(x, \varepsilon) y'(x)] + W_3^*(x) [M_1(x, \varepsilon) y(x)], \quad (28)$$

$$\xi(x) = W_2^*(x) [M_2(x, \varepsilon) y'(x)] + W_4^*(x) [M_1(x, \varepsilon) y(x)], \quad (29)$$

где "звёздочкой" помечен переход к транспонированной и комплексно-сопряжённой матрице. Ограничения на матрицы W_i , $i = \overline{1, 4}$ определим таким образом, чтобы квадратная матрица

$$W(x) = \begin{bmatrix} W_1(x) & W_2(x) \\ W_3(x) & W_4(x) \end{bmatrix}$$

для $\forall x \in [\alpha, \beta]$ обладала свойством унитарности.

Решаются задачи Коши:

$$W_1' + \left[\frac{H}{\varepsilon} + (M_2^{-1})^* (M_2')^* \right] W_1 + (M_2^{-1})^* M_2^* W_3 = W_1 G^*, \quad (30)$$

$$W_3' + (M_1^{-1})^* \frac{\beta}{\varepsilon} M_2^* W_1 + (M_1^{-1})^* (M_1')^* W_3 = W_3 G^*, \quad (31)$$

$$W_1(\alpha) = V_1^*, \quad (32)$$

$$W_3(\alpha) = V_3^*, \quad \alpha \leq x \leq \beta, \quad (33)$$

$$z' = Gz + W_1^* M_2' \frac{f}{\varepsilon}, \quad (34)$$

$$z(\alpha) = \gamma^*, \quad \alpha \leq x \leq \beta. \quad (35)$$

Матрицы $G(x)$, $H(x)$, $J(x)$ выбираются таким образом, чтобы выполнялись следующие условия, индуцирующие унитарность $W(x)$:

$$\frac{d}{dx} (W_1^* W_1 + W_3^* W_3) = 0,$$

$$\frac{d}{dx} (W_2^* W_2 + W_4^* W_4) = 0,$$

$$\frac{d}{dx} (W_1^* W_2 + W_3^* W_4) = 0.$$

В обратном ходе метода прогонки решаются следующие задачи Коши:

$$W_2' + \left[\frac{H}{\varepsilon} + (M_2^{-1})^* (M_2')^* \right] W_2 + (M_2^{-1})^* M_2^* W_4 = W_2 H^* + W_2 J^*, \quad (36)$$

$$W_4' + (M_1^{-1})^* \frac{\beta}{\varepsilon} M_2^* W_2 + (M_1^{-1})^* (M_1')^* W_4 = W_4 H^* + W_4 J^*, \quad (37)$$

$$W_2(\beta) = V_2^*, \quad (38)$$

$$W_4(\beta) = V_4^*, \quad \beta \geq x \geq \alpha, \quad (39)$$

$$S' = H(x)z + J(x)S + W_1^* M_2' \frac{f}{\varepsilon}, \quad (40)$$

$$S(\beta) = \hat{\varepsilon}, \quad \beta \geq x \geq \alpha. \quad (41)$$

Искомое решение $y(x)$, $y'(x)$ исходной системы о.д.у. с пограничным условием находится по формулам:

$$M_1(x, \varepsilon) y(x) = W_3(x) z(x) + W_4(x) S(x), \quad (42)$$

$$M_2(x, \varepsilon) y'(x) = W_1(x) z(x) + W_2(x) S(x). \quad (43)$$

Построены вычислительная схема м.у.п. в случае, когда пограничный слой находится на левом конце отрезка, на правом,

а также при наличии погранслоя на обоих концах отрезка.

В §9 доказаны леммы 9.1 и 9.2 о свойствах решений задач Коши и теорема 9.1 об устойчивости в малом предлагаемой модификации м.у.п.

Теорема 9.1. Если задача (25-27) устойчива относительно малых изменений величин, определяющих её, то устойчив и рассматриваемый метод решения этой задачи.

Четвёртая заключительная глава посвящается изучению различных модификаций методов пристрелки для решения нелинейных граничных задач с пограничными слоями.

В §10 рассматривается нелинейная двухточечная граничная задача общего вида:

$$y' = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad (44)$$

$$g(y(a), y(b)) = 0, \quad (45)$$

где $y: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f: [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ при самых общих предположениях относительно отображений f , g и области $[a, b]$. Исследуется метод множественной двусторонней пристрелки для нелинейных задач вида (44-45). Формулы, характеризующие этот метод, имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} u' &= f(t, u), \quad t \in J_{2j-1}^{(k)} = \{t_{2j-1} \leq t \leq t_{2j}\}, \\ u(t, y_{2j-1})|_{t=t_{2j-1}} &= y_{2j-1}, \quad y_{2j-1} \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

$$\left. \begin{aligned} v' &= f(t, v), \quad t \in J_{2j-1}^{(k)} = \{t_{2j-1} \geq t \geq t_{2j-2}\}, \\ v(t, y_{2j-1})|_{t=t_{2j-1}} &= y_{2j-1}, \quad j = \overline{1, m}. \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{2m-1} < t_{2m} = b$, где t_{2j-1} - точки пристрелки, t_{2j} - точки сшива решений, y_{2j-1} - параметры пристрелки и замыкающей системы уравнений запишется в виде

$$\left. \begin{aligned} u(t_{2j}, y_{2j-1}) - v(t_{2j}, y_{2j-1}) &= 0, \quad j = \overline{1, m-1}, \\ g(v(t_0, y_1), u(t_{2m}, y_{2m-1})) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

или

$$g(z) = 0, \quad (49)$$

где $z: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^m$, $N = m \times n$, $z = (y_1^T, y_2^T, \dots, y_{2m-1}^T)^T$.

Пусть $y^*(t)$ - искомое решение граничной задачи (44-45). Обозначим $y_{2j-1}^* = y(t_{2j-1})$, тогда $z^{*m} = (y_1^{*T}, y_2^{*T}, \dots, y_{2m-1}^{*T})^T$ - решение замыкающей системы уравнений (48). Искомое решение $y(t)$ представляется формулой

$$y(t) = \begin{cases} v(t, y_{j-1}^{(i)}), & t \in J_{j-1}^{(i)}, \\ u(t, y_{j-1}^{(i)}), & t \in J_j^{(i)}, \quad j = \overline{1, m} \end{cases} \quad (50)$$

Практическая реализация м.м.д.п. и его качества зависят главным образом от того, какие имеются возможности влияния на вычислительные свойства метода на следующих его основных этапах: выбор числа подынтервалов пристрелки; определение длин подынтервалов пристрелки; определение параметров пристрелки и их локализация; регулировка свойств замыкающей системы уравнений и её оптимизация по числу уравнений; определению пристрелочных траекторий; организация итерационных процессов и их оптимизация.

Для решения замыкающей системы (49) использовался метод Ньютона. Матрицы Якоби $\frac{\partial \chi(z)}{\partial z}$ в случае системы (49) имеют вид:

$$\frac{\partial \chi(z)}{\partial z} = \begin{bmatrix} U_1^{(2)} & -V_3^{(2)} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & U_3^{(4)} & -V_5^{(4)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & U_{2m-3}^{(2m-2)} & -V_{2m-1}^{(2m-2)} \\ G_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & B_{2m-1} \end{bmatrix},$$

где $U_{2j-1}^{(2j)}$, $V_{2j-1}^{(2j)}$, G_1 , B_{2m-1} — соответствующие частные производные, блочные подматрицы Якоби. Здесь же даны сравнительные характеристики алгоритмов м.м.д.п. с некоторыми родственными методами.

В §11 представлены результаты вычислительных экспериментов по решению граничной задачи, лежащая в основе физической модели, описывающей процесс ограничения столба плазмы.

В §12 на основе вычислительных экспериментов по решению упомянутой выше задачи дано подробное изучение спектральных свойств матриц Якоби для замыкающей системы. Характер зависимости чисел обусловленности $V(\chi_0)$ замыкающей системы от выбора длин подынтервалов $J_{2j-1}^{(i)}$ и $J_{2j}^{(i)}$, от разбиений P подынтервалов пристрелки, а также возможность их регулирования можно проследить по таблицам 12.1 и 12.2 для случая $\lambda = 5$.

Таблица 12.1

i	P_i	$t^{(0)}$	$t^{(1)}$	$t^{(2)}$	$t^{(3)}$	$t^{(4)}$
1	P_1	0	.25	.50	.75	I
2	P_2	0	.50	.67	.84	I
3	P_3	0	.17	.34	.50	I
4	P_4	0	.10	.20	.25	I
5	P_5	0	.50	.80	.90	I
6	P_6	0	.65	.90	.95	I
7	P_7	0	.50	.75	.95	I

Таблица 12.2

i	$\beta(B)$	$\beta(C)$	$\beta(B)$	$\beta(A_0)$
1	117.612	147.099	.512802	16.9661
2	78.039	17.822	.217369	18.9480
3	69.636	69.465	.171486	20.1512
4	495.849	495.352	.497650	31.5660
5	173.254	173.109	.144516	34.6243
6	313.138	313.063	.075313	64.4790
7	469.099	469.031	.067596	83.3050

Изучались случаи, когда число точек пристрелки $0 < t^{(1)} < t^{(2)} < t^{(3)} < 1$ фиксировалось, и наиболее выгодная стратегия определялась, как компромисс между расположением точек пристрелки и внутренними свойствами замыкающих систем уравнений и их порядком.

Результаты экспериментов иллюстрируют высокую точность метода, возможность регулирования спектральных свойств матриц Якоби с помощью изменения положения точек пристрелки, некоторые закономерности их поведения.

В заключении приведены основные результаты диссертации.

III. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ.

I. Для линейных граничных задач второго порядка с погранслоем построены алгоритмы, основанные на м.д.о.п.. Предложены способы нахождения регулирующих множителей $m_1(x, \varepsilon)$ и $m_2(x, \varepsilon)$. Доказана устойчивость в малом варианта м.д.о.п. Получены оценки погрешностей, возникающих при решении задач

по м.д.о.п.

2. Для систем линейных о.д.у. первого порядка с малым параметром при производной предложен алгоритм, основанный на м.м.д.п., содержащий в себе процедуру решения задач Коши в прямом и обратном направлениях на подинтервалах пристрелки и замыкающие системы совсем невысокого порядка. Доказана теорема о связи изолированности решения с невырожденностью матрицы Якоби. Изучены свойства матрицы Якоби для замыкающих систем, свойства пристрелочных задач Коши и некоторые аспекты жесткости.

3. Для линейных систем о.д.у. второго порядка с малым параметром при старшей производной построен алгоритм, основанный на м.у.п., дающий возможность переформулировать исходную граничную задачу в виде нескольких задач Коши при соединении их с процессом ортонормирования векторов по Шмидту. Вычислительные схемы с введением регулирующих множителей-матриц $M_1(x, \varepsilon)$, $M_2(x, \varepsilon)$ получены для погранслоя на левом конце отрезка, на правом и на обоих концах отрезка. Доказан ряд лемм о свойствах решений задач Коши и теорема об устойчивости в малом вычислительной схемы м.у.п.

4. Для нелинейных граничных задач с погранслоем построены и исследованы алгоритмы, основанные на м.м.д.п., и выполнены соответствующие вычислительные эксперименты.

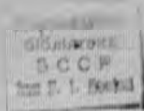
5. Решены задача о вычислении критических длин и критических нагрузок колонны и задача о движении жидкости между двумя цилиндрами с проницаемыми стенками бесконечной длины. Выполнено численное решение нескольких типичных граничных задач с одним и двумя пограничными слоями и даны сравнительные характеристики результатов. Проведён вычислительный эксперимент по решению задачи, лежащей в основе физической модели, описывающей процесс ограничения столба плазмы. Методом вычислительного эксперимента получены границы спектра матриц Якоби, и чисел обусловленности для различных разбиений области интегрирования.

IV. ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Кулешова И.Ф., Монастырный П.И. О вычислении критических длин для линейных граничных задач //Вестник Белорусского университета, серия мат., мех., физ., №3, Минск. 1984.С. 33-35.
2. Кулешова И.Ф. О численном решении граничных задач, обладающих сильной чувствительностью к изменению входных данных //Известия АН БССР, серия физико-матем. Минск, 1986. Деп. в ВИНТИ 11.04.86, №2618-В86.
3. Кулешова И.Ф., Монастырный П.И. О численном решении задач с пограничным слоем //Известия АН БССР, серия физико-матем. Минск, 1987. 24с. Деп. в ВИНТИ 11.1.87, №7933-87.
4. Кулешова И.Ф. О способах введения регулирующих множителей в методе прогонки для задач с пограничным слоем //Известия АН БССР, серия физико-матем. Минск, 1989, №4. С.16-19.
5. Кулешова И.Ф. Устойчивость и оценки погрешности метода дифференциальной ортогональной прогонки в случае задач с пограничным слоем //Известия АН БССР, серия физико-матем. Минск, 1988. 13с. Деп. в ВИНТИ 24.07.87, №5354-В87.
6. Монастырный П.И., Кулешова И.Ф. О модификациях метода унитарной прогонки для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с пограничным слоем I. //Известия АН БССР, серия физико-матем. Минск, 1988. 21с. Деп. в ВИНТИ 08.06.88, №4527-В88.
7. Монастырный П.И., Кулешова И.Ф. О модификациях метода унитарной прогонки для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с пограничным слоем II. //Известия АН БССР, серия физико-матем. Минск, 1988. 19с. Деп. в ВИНТИ 08.06.88, №4526-В88.
8. Кулешова И.Ф., Монастырный П.И., Радаева В.А. К теории метода множественной двусторонней пристрелки для линейных задач с пограничным слоем /ДАН БССР, 1989. Т.33, №2. С. 106-109.
9. Кулешова И.Ф., Монастырный П.И., Радаева В.А. О приложении метода множественной двусторонней пристрелки к решению линейных задач общего вида с пограничным слоем //Деп. в ВИНТИ 23.12.88, №8921-В88.
10. Волк А.М., Кулешова И.Ф., Монастырный П.И. Численное реше-

- ние задачи о движении жидкости между двумя цилиндрами с проницаемыми стенками бесконечной длины //Деп. в ВИНТИ 06.06.89, №3790-89.
11. Кулешова И.Ф., Монастырный П.И. Вариант метода дифференциальной ортогональной прогонки для задач с пограничным слоем //Вестник Белорусского университета, серия мат., мех., физ., №1, Минск, 1990. С.33.
12. Кулешова И.Ф., Монастырный П.И. О методе множественной двусторонней пристрелки для решения нелинейных граничных задач с пограничным слоем //Тезисы республиканской научной конференции, г.Гродно. 1990.С.72.
13. Кулешова И.Ф. О свойствах матриц Якоби для замыкающих систем уравнений в методах множественной двусторонней пристрелки //Тезисы 55-й научно-технической конференции г.Минск, БТИ им. С.М.Кирова, 1990. С.270.
14. Кулешова И.Ф. О методе множественной двусторонней пристрелки для линейных задач общего вида с пограничным слоем //Тезисы докладов республиканской конференции молодых учёных и специалистов "Применение информатики и вычислительной техники при решении народнохозяйственных задач", г. Минск, БГУ им. В.И.Ленина, 1989. С.106.

248064



Подписано в печать 16.12.91г. Формат 60х84/16.
Усл.печ.л. 0,93. Усл.кр. -отт. 1,05. Уч.-изд.л. 0,66.

Тираж 100 экз. Заказ 288 . Бесплатно.

Институт математики АН Беларуси.

220072, Минск, ул.Сурганова, 11.

Отпечатано на ротатристе Вычислительного центра АН Беларуси
220072, Минск, ул. Сурганова, 11.