

ISSN 2520-6141



ТРУДЫ БГТУ

Научный журнал



Серия 3

**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
НАУКИ И ИНФОРМАТИКА**

№ 2 (296) 2025 год

Рубрики номера:

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

Математика

Теоретическая механика

Физика

ИНФОРМАТИКА И ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

Моделирование процессов

и управление в технических системах

Обработка и передача информации

Алгоритмизация и программирование



БГТУ

Минск 2025

Учреждение образования
«Белорусский государственный
технологический университет»

ТРУДЫ БГТУ

Научный журнал

Издается с июля 1993 года

Серия 3

**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
И ИНФОРМАТИКА**

№ 2 (296) 2025 год

Выходит два раза в год

Минск 2025

Учредитель – учреждение образования «Белорусский государственный технологический университет»

Главный редактор журнала – Войтов Игорь Витальевич, доктор технических наук, профессор, Республика Беларусь

Редакционная коллегия журнала:

Флейшер В. Л., доктор технических наук, доцент (заместитель главного редактора), Республика Беларусь;
Жарский И. М., кандидат химических наук, профессор, Республика Беларусь;
Флюрик Е. А., кандидат биологических наук, доцент (секретарь), Республика Беларусь;
Водопьянов П. А., член-корреспондент НАН Беларуси, доктор философских наук, профессор, Республика Беларусь;
Прокопчук Н. Р., член-корреспондент НАН Беларуси, доктор химических наук, профессор, Республика Беларусь;
Наркевич И. И., доктор физико-математических наук, профессор, Республика Беларусь;
Новикова И. В., доктор экономических наук, профессор, Республика Беларусь;
Черная Н. В., доктор технических наук, профессор, Республика Беларусь;
Куликович В. И., кандидат филологических наук, доцент, Республика Беларусь;
Торчик В. И., доктор биологических наук, Республика Беларусь;
Щекин А. К., член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Российская Федерация;
Башкиров В. Н., доктор технических наук, профессор, Российская Федерация;
Каухова И. Е., доктор фармацевтических наук, профессор, Российская Федерация;
Жантасов К. Т., доктор технических наук, профессор, Республика Казахстан;
Эркаев А. У., доктор технических наук, профессор, Республика Узбекистан;
Горинштейн Ш., доктор наук, профессор, Государство Израиль;
Маес Воутер, доктор наук, профессор, Королевство Бельгия.

Редакционная коллегия серии:

Наркевич И. И., доктор физико-математических наук, профессор (главный редактор серии), Республика Беларусь;
Урбанович П. П., доктор технических наук, профессор (заместитель главного редактора серии), Республика Беларусь;
Соловьева И. Ф., кандидат физико-математических наук, доцент (ответственный секретарь), Республика Беларусь;
Крук Н. Н. доктор физико-математических наук, профессор, Республика Беларусь;
Асмыкович И. К., кандидат физико-математических наук, доцент, Республика Беларусь;
Карпович Д. С., кандидат технических наук, доцент, Республика Беларусь;
Романенко Д. М., кандидат технических наук, доцент, Республика Беларусь;
Калинин А. И., доктор физико-математических наук, профессор, Республика Беларусь;
Леваков А. А., доктор физико-математических наук, профессор, Республика Беларусь;
Листопад Н. И., доктор технических наук, профессор, Республика Беларусь.
Мазаник С. А., доктор физико-математических наук, профессор, Республика Беларусь;
Прихожий А. А., доктор технических наук, профессор, Республика Беларусь;
Сайко А. П., доктор физико-математических наук, Республика Беларусь;
Фурс А. Н. доктор физико-математических наук, профессор, Республика Беларусь;
Щекин А. К., член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Российская Федерация;
Жумаев Одил, доктор технических наук, Республика Узбекистан;
Маес Воутер, доктор наук, профессор, Королевство Бельгия.

Адрес редакции: ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск.

Телефоны: главного редактора журнала – (+375 17) 343-94-32;

главного редактора серии – (+375 17) 399-49-60.

E-mail: root@belstu.by, <http://www.belstu.by>

Свидетельство о государственной регистрации средств массовой информации

№ 1329 от 23.04.2010, выданное Министерством информации Республики Беларусь.

Журнал включен в «Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований»

Educational institution
“Belarusian State Technological University”

PROCEEDINGS OF BSTU

Scientific Journal

Published monthly since July 1993

Issue 3

**PHYSICS AND MATHEMATICS.
INFORMATICS**

No. 2 (296) 2025

Published biannually

Minsk 2025

Publisher – educational institution “Belarusian State Technological University”

Editor-in-chief – Voitau Ihar Vital’evich, DSc (Engineering), Professor, Republic of Belarus

Editorial (Journal):

Fleisher V. L., DSc (Engineering), Associate Professor (deputy editor-in-chief), Republic of Belarus;
Zharskiy I. M., PhD (Chemistry), Professor, Republic of Belarus;
Flyurik E. A., PhD (Biology), Associate Professor (secretary), Republic of Belarus;
Vodop’yanov P. A., Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Belarus, DSc (Philosophy), Professor, Republic of Belarus;
Prokopchuk N. R., Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Belarus, DSc (Chemistry), Professor, Republic of Belarus;
Narkevich I. I., DSc (Physics and Mathematics), Professor, Republic of Belarus;
Novikova I. V., DSc (Economics), Professor, Republic of Belarus;
Chernaya N. V., DSc (Engineering), Professor, Republic of Belarus;
Kulikovich V. I., PhD (Philology), Associate Professor, Republic of Belarus;
Torchik V. I., DSc (Biology), Republic of Belarus;
Shchekin A. K., Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, DSc (Physics and Mathematics), Professor, Russian Federation;
Bashkurov V. N., DSc (Engineering), Professor, Russian Federation;
Kaukhova I. E., DSc (Pharmaceutics), Professor, Russian Federation;
Zhantasov K. T., DSc (Engineering), Professor, Republic of Kazakhstan;
Erkayev A. U., DSc (Engineering), Professor, Republic of Uzbekistan;
Gorinshteyn Sh., DSc, Professor, State of Israel;
Maes Wouter, DSc, Professor, Kingdom of Belgium.

Editorial (Issue):

Narkevich I. I., DSc (Physics and Mathematics), Professor (editor-in-chief of the series), Republic of Belarus;
Urbanovich P.P., DSc (Engineering), Professor (deputy editor-in-chief of the series), Republic of Belarus;
Solov’yeva I. F., PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor (executive editor), Republic of Belarus.
Kruk N. N., DSc (Physics and Mathematics), Professor, Republic of Belarus;
Asmykovich I. K., PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Republic of Belarus;
Karpovich D. S., PhD (Engineering), Associate Professor, Republic of Belarus;
Romanenko D. M., PhD (Engineering), Associate Professor, Republic of Belarus;
Kalinin A. I., DSc (Physics and Mathematics), Professor, Republic of Belarus;
Levakov A. A., DSc (Physics and Mathematics), Professor, Republic of Belarus;
Listopad N. I., DSc (Engineering), Professor, Republic of Belarus.
Mazanik S. A., DSc (Physics and Mathematics), Professor, Republic of Belarus;
Prihozhiiy A. A., DSc (Engineering), Professor, Republic of Belarus;
Saiko A. P., DSc (Physics and Mathematics), Republic of Belarus;
Furs A. N., DSc (Physics and Mathematics), Professor, Republic of Belarus;
Shchekin A. K., Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, DSc (Physics and Mathematics), Professor, Russian Federation;
Jumaev Odil, DSc (Engineering), Republic of Uzbekistan;
Maes Wouter, DSc, Professor, Kingdom of Belgium.

Contact: 13a, Sverdlova str., 220006, Minsk.
Telephones: editor-in-chief (+375 17) 343-94-32;
editor-in-chief of the series (+375 17) 399-49-60.
E-mail: root@belstu.by, <http://www.belstu.by>

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

МАТЕМАТИКА MATHEMATICS

УДК 517.977

А. А. Якименко

Белорусский государственный технологический университет

МОДАЛЬНАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ ОДНОЙ ДВУМЕРНОЙ СИСТЕМЫ ЗАПАЗДЫВЮЩЕГО ТИПА С ЧЕТЫРЬМЯ СОИЗМЕРИМЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

В публикации рассмотрено решение задачи модального управления для двумерной стационарной динамической системы с запаздывающим аргументом с одним входом и четырьмя соизмеримыми запаздываниями в одном выделенном случае. Приведено определение задачи модального управления для исследуемой системы. Задача модального управления является одной из основных задач теории управления. Она заключается в приведении коэффициентов характеристического квазиполинома замкнутой системы к заданному виду, что позволяет, например, стабилизировать систему. Задача модального управления хорошо изучена для систем без запаздывания. Для систем с запаздывающим аргументом и систем нейтрального типа решение задачи модального управления значительно сложнее. В статье получено решение поставленной задачи при определенных условиях на значения параметров исследуемой системы с запаздыванием. Также получены регуляторы по типу обратной связи, решающие задачу модального управления для рассматриваемой системы. Эти регуляторы найдены в частотной области как элементарные функции коэффициентов исходной системы. Также приведены правила, согласно которым полученные регуляторы переводятся из частотной области в регуляторы по типу обратной связи для исследуемой системы. Рассмотрен иллюстративный пример решения задачи модального управления для изучаемой системы. Приведен список литературы, в которой задача модального управления решается для других систем с запаздыванием и систем нейтрального типа.

Ключевые слова: запаздывающие системы, модальное управление, регуляторы, обратная связь, запаздывание, соизмеримые запаздывания.

Для цитирования: Якименко А. А. Модальная управляемость одной двумерной системы запаздывающего типа с четырьмя соизмеримыми запаздываниями // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2025. № 2 (296). С. 5–10.

DOI: 10.52065/2520-6141-2025-296-1.

A. A. Yakimenka

Belarusian State Technological University

MODAL CONTROLLABILITY OF ONE TWO-DIMENSIONAL DELAYED SYSTEM WITH FOUR COMMENSURATE DELAYS

The publication considers the solution of the modal control problem for a two-dimensional stationary dynamic system with a retarded argument with one input and four commensurate delays in one selected case. The definition of the modal control problem for the system under study is given.

The modal control problem is one of the main problems of control theory. It consists in reducing the coefficients of the characteristic quasi-polynomial of a closed system to a given form, which allows, for example, to stabilize the system. The modal control problem has been well studied for systems without delay. For systems with a retarded argument and neutral type systems, the solution of the modal control problem is much more complicated. In the article, a solution to the problem is obtained under certain conditions on the values of the parameters of the system with delay. Feedback-type controllers are also obtained that solve the modal control problem for the system under study. These controllers are found in the frequency domain as elementary functions of the coefficients of the original system. The rules according to which the obtained regulators are transferred from the frequency domain to the feedback type regulators for the system under study are also given. An illustrative example of solving the modal control problem for the system under study is considered. A list of literature is given in which the modal control problem is solved for other systems with delay and neutral type systems.

Keywords: delayed systems, modal control, regulators, feedback control, delay, commensurate delays.

For citation: Yakimenka A. A. Modal controllability of one two-dimensional delayed system with four commensurate delays. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2025, no. 2 (296), pp. 5–10 (In Russian).

DOI: 10.52065/2520-6141-2025-296-1.

Введение. Задача модального управления является одной из основных задач теории управления. Такая задача достаточно хорошо изучена для систем без запаздывания. Для систем с запаздывающим аргументом и систем нейтрального типа [1–7] решение задачи модального управления значительно сложнее. Это обусловлено тем, что пространство состояний таких систем, как правило, бесконечномерно. В данной работе решается задача модального управления для двумерной стационарной динамической системы с одним входом и четырьмя соизмеримыми запаздываниями в одном специальном случае. Получены регуляторы по принципу обратной связи, решающие задачу модального управления. Такие регуляторы в частотной области являются элементарными функциями коэффициентов рассматриваемой системы. Приведен иллюстративный пример решения указанной задачи.

Основная часть. Рассмотрим линейную стационарную систему с запаздывающим аргументом с одним входом и четырьмя соизмеримыми запаздываниями:

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=0}^4 A_j x(t-jh) + bu(t), \quad (1)$$

где $A_j, j = 0, 1, 2, 3, 4$ – постоянные (2×2) -матрицы; $h > 0$ – постоянное запаздывание; b – постоянный 2-вектор; u – скалярное управление. Не ограничивая общности, можно считать, что $b' = (0 \ 1)$ (штрих $(\cdot)'$ означает транспонирование).

Характеристическое уравнение разомкнутой (с нулевым управлением) системы (1) имеет вид

$$\begin{aligned} \det[\lambda I_2 - A_0 - A_1 e^{-\lambda h} - A_2 e^{-2\lambda h} - A_3 e^{-3\lambda h} - A_4 e^{-4\lambda h}] &\equiv \\ &\equiv \lambda^2 + (\alpha_{10} + \alpha_{11} e^{-\lambda h} + \alpha_{12} e^{-2\lambda h} + \alpha_{13} e^{-3\lambda h} + \alpha_{14} e^{-4\lambda h}) \lambda + \\ &+ \alpha_{00} + \alpha_{01} e^{-\lambda h} + \alpha_{02} e^{-2\lambda h} + \alpha_{03} e^{-3\lambda h} + \alpha_{04} e^{-4\lambda h} + \\ &+ \alpha_{04} e^{-4\lambda h} + \alpha_{05} e^{-5\lambda h} + \alpha_{06} e^{-6\lambda h} + \\ &+ \alpha_{07} e^{-7\lambda h} + \alpha_{08} e^{-8\lambda h} = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$, $e^{-j\lambda h}$ – оператор сдвига ($e^{-j\lambda h} x(t) \equiv x(t-jh)$).

Присоединим к системе (1) регулятор вида

$$u(t) = \sum_{j=0}^M q'_j x(t-jh) + \int_{-lh}^0 g'(s) x(t+s) ds, \quad (3)$$

где $l, M \in \mathbb{N}$, $q_j, j = 0, 1, \dots, M-2$ – векторы; $g(s), s \in [-h, 0]$ – непрерывная 2-вектор-функция.

В частотной области регулятор (3) имеет вид

$$U(\lambda) = \sum_{j=0}^M q'_j e^{-j\lambda h} + G(\lambda), \quad (4)$$

где $G(\lambda)$ – целая функция, определяющая интегральную часть (3).

Определение. Система (1) модально управляема регулятором вида (3), если для наперед заданных чисел $\tilde{\alpha}_{ij}, i = 0, j = 0, 8; i = 1, j = 0, 1, 2, 3, 4$ найдется такой регулятор, при котором характеристическое уравнение замкнутой системы (1), (3) будет иметь вид (сравните с формулой (2)):

$$\det \left[\lambda I_2 - A_0 - A_1 e^{-\lambda h} - A_2 e^{-2\lambda h} - A_3 e^{-3\lambda h} - A_4 e^{-4\lambda h} - bU(\lambda) \right] \equiv \lambda^2 +$$

$$+ \left(\tilde{\alpha}_{10} + \tilde{\alpha}_{11} e^{-\lambda h} + \tilde{\alpha}_{12} e^{-2\lambda h} + \tilde{\alpha}_{13} e^{-3\lambda h} + \tilde{\alpha}_{14} e^{-4\lambda h} \right) \lambda +$$

$$+ \tilde{\alpha}_{00} + \tilde{\alpha}_{01} e^{-\lambda h} + \tilde{\alpha}_{02} e^{-2\lambda h} + \tilde{\alpha}_{03} e^{-3\lambda h} + \tilde{\alpha}_{04} e^{-4\lambda h} +$$

$$+ \tilde{\alpha}_{05} e^{-5\lambda h} + \tilde{\alpha}_{06} e^{-6\lambda h} + \tilde{\alpha}_{07} e^{-7\lambda h} + \tilde{\alpha}_{08} e^{-8\lambda h} = 0.$$

Пусть

$$\mu_1 = \tilde{\alpha}_{10} + \tilde{\alpha}_{11} m + \tilde{\alpha}_{12} m^2 + \tilde{\alpha}_{13} m^3 + \tilde{\alpha}_{14} m^4; \quad (5)$$

$$\mu_2 = \sum_{j=0}^8 \tilde{\alpha}_{0j} m^j, \quad (6)$$

где $\tilde{\alpha}_{ij}, i=0, j=0, 8; i=1, j=0, 1, 2, 3, 4$ – произвольные числа. Тогда система (1), замкнутая регулятором, решающим задачу модального управления, имеет следующее характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + \mu_1 \lambda + \mu_2 = 0. \quad (7)$$

Обозначим $m = e^{-\lambda h}$ – оператор сдвига ($mx(t) = x(t-h)$), $A(m) = A_0 + \sum_{i=1}^4 A_i m^i$. Не ограничивая общности, можно считать, что матрица $A(m)$ имеет вид

$$A(m) = \begin{bmatrix} a_0 + \sum_{i=1}^3 a_i m^3 & b_0 + \sum_{i=1}^3 b_i m^i + m^3 \\ a_{21}(m) & a_{22}(m) \end{bmatrix},$$

$$\text{где } a_{21}(m) = a_{210} + a_{211} m + a_{212} m^2 + a_{213} m^3 + a_{214} m^4;$$

$$a_{22}(m) = a_{220} + a_{221} m + a_{222} m^2 + a_{223} m^3 + a_{224} m^4. \quad (8)$$

В данной работе рассмотрим случай

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0. \quad (9)$$

Тогда матрица $A(m)$ примет вид

$$A(m) = \begin{bmatrix} a_0 & b_0 + b_1 m + b_2 m^2 + b_3 m^3 + m^4 \\ a_{21}(m) & a_{22}(m) \end{bmatrix}.$$

Регулятор, решающий задачу модального управления, представим в виде

$$U(\lambda, m) = \begin{bmatrix} u_1(\lambda, m) & u_2(\lambda, m) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \eta_{11}(m) - a_{21}(m) & \eta_2(\lambda, m) - a_{22}(m) \end{bmatrix}, \quad (10)$$

где $\eta_{11}(m)$ – полином относительно m .

Компоненту $\eta_2(\lambda, m)$ регулятора (10) разделим на дифференциально-разностную (ей соот-

ветствует некоторый квазиполином) и интегральную части:

$$\eta_2(\lambda, m) = \eta_{21}(m) + \eta_{22}(\lambda, m), \quad (11)$$

где $\eta_{21}(m)$ – полином относительно m ; $\eta_{22}(\lambda, m)$ соответствует интегральной части. Будем искать эту функцию в следующем виде:

$$\eta_{22}(\lambda, m) = (c_1 + c_2 m + c_3 m^2 + c_4 m^3) \frac{m-k}{\lambda-a_0},$$

где $k = e^{-a_0 h}$, c_1, c_2, c_3, c_4 – некоторые числа, подлежащие определению. Характеристическое уравнение замкнутой регулятором (10) системы (1) примет вид

$$\left| \begin{array}{cc} a_0 - \lambda & b_0 + b_1 m + b_2 m^2 + b_3 m^3 + m^4 \\ \eta_{11} & \eta_{21} + (c_1 + c_2 m + c_3 m^2 + c_4 m^3) \frac{m-k}{\lambda-a_0} - \lambda \end{array} \right| \equiv$$

$$\equiv \lambda^2 + (-a_0 - \eta_{21}) \lambda - b_3 \eta_{11} m^3 + c_4 k m^3 - c_4 m^4 -$$

$$- \eta_{11} m^4 - b_2 \eta_{11} m^2 + c_3 k m^2 - c_3 m^3 - b_1 \eta_{11} m +$$

$$+ c_2 k m - c_2 m^2 + \eta_{21} a_0 - b_0 \eta_{11} + c_1 k - c_1 m = 0.$$

Чтобы получить для замкнутой системы характеристическое уравнение (7), выберем в качестве η_{21} следующий квазиполином:

$$\eta_{21} = -a_0 - \mu_1,$$

где μ_1 определен в формуле (5).

Тогда характеристическое уравнение замкнутой системы примет вид

$$\lambda^2 + \mu_1 \lambda - b_3 \eta_{11} m^3 + c_4 k m^3 - c_4 m^4 - \eta_{11} m^4 -$$

$$- b_2 \eta_{11} m^2 + c_3 k m^2 - c_3 m^3 - b_1 \eta_{11} m + c_2 k m -$$

$$- c_2 m^2 - a_0^2 - \mu_1 a_0 - b_0 \eta_{11} + c_1 k - c_1 m = 0.$$

Чтобы последнее уравнение имело вид (7), нужно выполнение следующего равенства:

$$-b_3 \eta_{11} m^3 + c_4 k m^3 - c_4 m^4 - \eta_{11} m^4 -$$

$$- b_2 \eta_{11} m^2 + c_3 k m^2 - c_3 m^3 - b_1 \eta_{11} m + c_2 k m -$$

$$- c_2 m^2 - a_0^2 - \mu_1 a_0 - b_0 \eta_{11} + c_1 k - c_1 m = \mu_2.$$

Выразив отсюда η_{11} , получим

$$\eta_{11} = \frac{-c_4 k m^3 + c_4 m^4 - c_3 k m^2 + c_3 m^3 - c_2 k m}{b_0 + b_1 m + b_2 m^2 + b_3 m^3 + m^4} -$$

$$\frac{c_2 m^2 + a_0^2 + \mu_1 a_0 - c_1 k + c_1 m + \mu_2}{b_0 + b_1 m + b_2 m^2 + b_3 m^3 + m^4}. \quad (12)$$

Последняя дробь в общем случае не является полиномом относительно m . Подберем c_1, c_2, c_3

и c_4 . и так, чтобы правая часть формулы (12) стала полиномом. Для этого вначале выделим целую часть в формуле (12).

$$\eta_{11} = -c_4 + \frac{b_3c_4m^3 + c_4km^3 + b_2c_4m^2 + c_3km^2 - c_3m^3 + b_1c_4m}{b_0 + b_1m + b_2m^2 + b_3m^3 + m^4} + \frac{c_2km - c_2m^2 - a_0^2 - \mu_1a_0 + b_0c_4 + c_1k - c_1m - \mu_2}{b_0 + b_1m + b_2m^2 + b_3m^3 + m^4}.$$

Потребуем, чтобы числитель последней дроби был бы равен нулю. Имеем

$$b_3c_4m^3 + c_4km^3 + b_2c_4m^2 + c_3km^2 - c_3m^3 + b_1c_4m + c_2km - c_2m^2 - a_0^2 - \mu_1a_0 + b_0c_4 + c_1k - c_1m - \mu_2 \equiv (b_3c_4 + c_4k - c_3)m^3 + (b_2c_4 + c_3k - c_2)m^2 + (c_4b_1 + c_2k - c_1)m - a_0^2 - \mu_1a_0 + b_0c_4 + c_1k - \mu_2 = 0.$$

Отсюда очевидно, что в качестве c_2 можно взять

$$c_3 = b_3c_4 + c_4k, \quad (13)$$

в качестве c_2 возьмем

$$c_2 = b_2c_4 + c_3k, \quad (14)$$

а в качестве c_1 –

$$c_1 = b_1c_4 + c_2k. \quad (15)$$

Тогда с учетом соотношений (13), (14), (15)

$$b_3c_4m^3 + c_4km^3 + b_2c_4m^2 + c_3km^2 - c_3m^3 + b_1c_4m + c_2km - c_2m^2 - a_0^2 - \mu_1a_0 + b_0c_4 + c_1k - c_1m - \mu_2 \equiv (b_0 + b_1k + b_2k^2 + b_3k^3 + k^4)c_4 - a_0^2 - a_0\mu_1 - \mu_2 = 0.$$

Отсюда

$$c_4 = \frac{a_0^2 + a_0\mu_1 + \mu_2}{b_0 + b_1k + b_2k^2 + b_3k^3 + k^4}. \quad (16)$$

Нетрудно увидеть, что для того, чтобы c_4 из формулы (16) было полиномом относительно m , необходимо и достаточно выполнения условия

$$b_0 + b_1k + b_2k^2 + b_3k^3 + k^4 \neq 0. \quad (17)$$

С учетом того, что

$$\eta_{22}(\lambda, m) = (c_1 + c_2m + c_3m^2 + c_4m^3) \frac{m-k}{\lambda-a_0},$$

и принимая во внимание (13), (14), (15), (16), после несложных преобразований получим

$$\eta_{22}(\lambda, m) = \frac{(a_0^2 + \mu_1a_0 + \mu_2)}{b_0 + b_1k + b_2k^2 + b_3k^3 + k^4} \times (k^3 + (m + b_3)k^2 + (m^2 + b_3m + b_2) + m^3 + b_3m^2 + b_2m + b_1) \frac{(m-k)}{\lambda-a_0}.$$

Таким образом, с учетом (10) регуляторы в частотной области

$$u_1(\lambda, m) = -\frac{a_0^2 + a_0\mu_1 + \mu_2}{b_0 + b_1k + b_2k^2 + b_3k^3 + k^4} - a_{21}(m); \quad (18)$$

$$u_2(\lambda, m) = -a_0 - \mu_1 - a_{22}(m) + \frac{(a_0^2 + \mu_1a_0 + \mu_2)}{b_0 + b_1k + b_2k^2 + b_3k^3 + k^4} \times (k^3 + (m + b_3)k^2 + (m^2 + b_3m + b_2) + m^3 + b_3m^2 + b_2m + b_1) \frac{(m-k)}{\lambda-a_0} \quad (19)$$

решают задачу модального управления для системы (1) при выполнении условия (17).

Отсюда видна справедливость следующей теоремы.

Теорема. Для того чтобы система (1) была модально управляема регулятором вида (3) в случае (9), необходимо и достаточно выполнения условия (17). При этом регуляторы, решающие задачу модального управления, в частотной области имеют вид (18), (19).

При переходе от регуляторов в частотной области к регуляторам вида (3) нужно следовать следующим правилам.

1. Слагаемым вида $m^i x_j$ соответствует

$$x_j(t - ih).$$

2. Слагаемым вида $\mu_1 x_j$ отвечает

$$\tilde{\alpha}_{10}x_j(t) + \tilde{\alpha}_{11}x_j(t-h) + \tilde{\alpha}_{12}x_j(t-2h) + \tilde{\alpha}_{13}x_j(t-3h).$$

3. Слагаемым вида $\mu_2 x_j$ соответствует

$$\tilde{\alpha}_{00}x_j(t) + \tilde{\alpha}_{01}x_j(t-h) + \tilde{\alpha}_{02}x_j(t-2h) + \tilde{\alpha}_{03}x_j(t-3h) + \tilde{\alpha}_{04}x_j(t-4h) + \tilde{\alpha}_{05}x_j(t-5h) + \tilde{\alpha}_{06}x_j(t-6h).$$

4. Слагаемым вида $\frac{m-k}{\lambda-\xi} x_j$ соответствует

$$\int_{-h}^0 H(t+s)H(h+s)e^{-(h+s)\xi} x_j(t+s) ds,$$

где $H(t)$ – функция Хевисайда.

5. Слагаемым вида $m^l \cdot \frac{m-k}{\lambda-\xi} x_j$ отвечает

$$\int_{-(l+1)h}^{-lh} H(t+s)H((l+1)h+s)e^{-((l+1)h+s)\xi} x_j(t+s) ds,$$

$l = 1, 2.$

Пример. Рассмотрим систему (1) с матрицами

$$A_0 = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ a_{210} & a_{220} \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{211} & a_{221} \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ a_{212} & a_{222} \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ a_{213} & a_{223} \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{214} & a_{224} \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

где матрица $A(m)$ имеет вид

$$A(m) = \begin{bmatrix} 2 & 4 + m + 2m^2 + 3m^3 + m^4 \\ a_{21}(m) & a_{22}(m) \end{bmatrix},$$

где $a_{21}(m) = a_{210} + a_{211}m + a_{212}m^2 + a_{213}m^3 + a_{214}m^4;$
 $a_{22}(m) = a_{220} + a_{221}m + a_{222}m^2 + a_{223}m^3 + a_{224}m^4.$

Обозначим $k = e^{-a_0h} = e^{-2h} \in \mathbb{R}.$ Проверим выполнение условия (17):

$$b_0 + b_1k + b_2k^2 + b_3k^3 + k^4 =$$

$$= 4 + e^{-2h} + 2e^{-4h} + 3e^{-8h} + e^{-16h} > 0.$$

Список литературы

1. Марченко В. М. О проблеме модального управления в линейных системах с запаздыванием // Доклады Академии наук БССР. 1978. № 5. С. 401–404.
2. Якименко А. А. Модальное управление одной системой нейтрального типа в общециклическом случае // Труды БГТУ. Сер. 3, Физ.-мат. науки и информатика. 2017. № 2. С. 25–27.
3. Якименко А. А. Модальное управление одной системой нейтрального типа в общециклическом случае при кратных корнях // Труды БГТУ. Сер. 3, Физ.-мат. науки и информатика. 2018. № 1 (206). С. 5–8.
4. Якименко А. А. Модальная управляемость одной двумерной системы запаздывающего типа // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2023. № 1 (266). С. 15–19. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-266-1-3.
5. Якименко А. А. Модальная управляемость одной двумерной системы запаздывающего типа в случае кратных корней // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2023. № 2 (272). С. 18–22. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-272-2-3.
6. Якименко А. А. Модальная управляемость одной двумерной системы запаздывающего типа в специальном случае // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2024. № 2 (284). С. 5–9. DOI: 10.52065/2520-6141-2024-284-1.
7. Якименко А. А. Модальная управляемость одной двумерной системы запаздывающего типа с тремя запаздываниями // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2025. № 1 (290). С. 11–15. DOI: 10.52065/2520-6141-2025-290-2.

References

1. Marchenko V. M. On problem of modal control in linear systems with delay. *Doklady Akademii nauk BSSR* [Reports of the BSSR Academy of Science], 1978, no. 5, pp. 401–404 (In Russian).

Условие (17) выполнено. Тогда регуляторы (18), (19) примут вид

$$u_1(\lambda, m) = -\frac{4 + 2\mu_1 + \mu_2}{4 + e^{-2h} + 2e^{-4h} + 3e^{-8h} + e^{-16h}} -$$

$$- a_{210} - a_{211}m - a_{212}m^2 - a_{213}m^3 - a_{214}m^4;$$

$$u_2(\lambda, m) = -2 - \mu_1 - a_{220} - a_{221}m -$$

$$- a_{222}m^2 - a_{223}m^3 - a_{224}m^4 +$$

$$+ \frac{(4 + 2\mu_1 + \mu_2)}{4 + e^{-2h} + 2e^{-4h} + 3e^{-8h} + e^{-16h}} \times$$

$$\times (e^{-8h} + (m+3)e^{-4h} + (m^2 + 3m + 2) +$$

$$+ m^3 + 3m^2 + 2m + 4) \cdot \frac{(m - e^{-2h})}{\lambda - 2}.$$

Нетрудно проверить, что система (1), замкнутая этим регулятором, имеет характеристическое уравнение вида

$$\lambda^2 + \mu_1\lambda + \mu_2 = 0,$$

где μ_1, μ_2 определены в формулах (5), (6).

Заключение. В статье получен способ нахождения регуляторов по принципу обратной связи, решающих задачу модального управления для двумерной системы запаздывающего типа с четырьмя соизмеримыми запаздываниями и одним входом в случае (9). Указаны дополнительные условия существования таких регуляторов. Также приведен иллюстративный пример.

2. Yakimenka A. A. Modal control for one neutral type system in general cyclic case. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], issue 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2017, no. 2, pp. 25–27 (In Russian).
3. Yakimenka A. A. Modal control for one neutral type system in general cyclic case with double roots. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], issue 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2018, no. 1, pp. 5–8 (In Russian).
4. Yakimenka A. A. Modal controllability of one two-dimensional delayed system. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], issue 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2023, no. 1 (266), pp. 15–19. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-266-1-3 (In Russian).
5. Yakimenka A. A. Modal controllability of one two-dimensional delayed system in the case of multiple roots. Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2023, no. 2 (272), pp. 18–22. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-272-2-3 (In Russian).
6. Yakimenka A. A. Modal controllability of one two-dimensional delayed system in a special case. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], issue 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2024, no. 2 (284), pp. 5–9. DOI: 10.52065/2520-6141-2024-284-1 (In Russian).
7. Yakimenka A. A. Modal controllability of one two-dimensional delayed system with three delays. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], issue 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2025, no. 1 (290), pp. 11–15. DOI: 10.52065/2520-6141-2025-290-2 (In Russian).

Информация об авторе

Якименко Андрей Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: yakimenko@belstu.by

Information about the author

Yakimenka Andrei Aliaksandravich – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: yakimenko@belstu.by

Поступила после доработки 17.04.2025

УДК 514.76

Н. П. Можей

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

**НЕРЕДУКТИВНЫЕ ПРОСТРАНСТВА, НЕ ДОПУСКАЮЩИЕ
ЭКВИАФФИННЫХ СВЯЗНОСТЕЙ С НЕНУЛЕВОЙ АЛГЕБРОЙ ГОЛОНОМИИ**

Известно, что одной из важных проблем геометрии является задача об установлении связи между кривизной и структурой многообразия. В случае, если на многообразии транзитивно действует группа, такое многообразие является однородным пространством. Если однородное пространство является редуктивным, то оно всегда допускает инвариантную связность; если же существует хотя бы одна инвариантная связность, то пространство является изотропно-точным. Во введении публикации указан объект исследования – нередуктивные пространства со связностью и ненулевой алгеброй голономии. Цель работы – изучение пространств указанного вида, не допускающих эквиваффинных связностей. В статье приведены основные понятия: изотропно-точная пара, инвариантная аффинная связность, тензор кручения, тензор кривизны, редуктивное пространство, алгебра голономии, эквиваффинная связность. Если тензор кривизны является ненулевым, то и алгебра голономии ненулевая. В основной части работы для трехмерных нередуктивных однородных пространств, допускающих инвариантные связности с ненулевой алгеброй голономии, определено, при каких условиях данное пространство не допускает эквиваффинных связностей, соответствующие пространства найдены и выписаны в явном виде.

Ключевые слова: группа преобразований, алгебра Ли, тензор кривизны, редуктивное пространство, эквиваффинная связность, алгебра голономии.

Для цитирования: Можей Н. П. Нередуктивные пространства, не допускающие эквиваффинных связностей с ненулевой алгеброй голономии // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2025. № 2 (296). С. 11–15.

DOI: 10.52065/2520-6141-2025-296-2.

N. P. Mozhey

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics

**NON-REDUCTIVE SPACES THAT DO NOT ADMIT EQUIAFFINE CONNECTIONS
WITH A NONZERO HOLONOMY ALGEBRA**

One of the important problems of geometry is the problem of establishing connections between the curvature and the structure of a manifold. If a group acts transitively on a manifold, such manifold is the homogeneous space. If a homogeneous space is reductive, then it always admits an invariant connection; if there exists at least one invariant connection, then the space is isotropically-faithful. In the introduction, the object of research is indicated – non-reductive spaces with connection and non-zero holonomy algebra. The purpose of the work is to study spaces of this type that do not allow equiaffine connections. In the work the basic notions are defined: isotropically-faithful pair, invariant affine connection, torsion tensor, curvature tensor, reductive space, holonomy algebra, equiaffine connection. If the curvature tensor is nonzero, then the holonomy algebra is nonzero. In the main part of the paper for three-dimensional non-reductive homogeneous spaces that admit invariant connections with a non-zero holonomy algebra, it is determined under what conditions given space does not admit equiaffine connections, the corresponding spaces are found and written out explicitly.

Keywords: transformation group, Lie algebra, curvature tensor, reductive space, equiaffine connection, holonomy algebra.

For citation: Mozhey N. P. Non-reductive spaces that do not admit equiaffine connections with a nonzero holonomy algebra. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2025, no. 2 (296), pp. 11–15 (In Russian).*

DOI: 10.52065/2520-6141-2025-296-2.

Введение. После работ Э. Картана (например, [1]) фундаментом и основной составляющей дифференциальной геометрии является понятие многообразия, а также теория групп и алгебр Ли. Важный подкласс среди всех многообразий

формируют изотропно-точные однородные пространства. В частности, этот подкласс содержит все однородные пространства, допускающие инвариантную аффинную связность. «Необходимость сравнивать те или иные геометрические

величины в разных точках “кривого” пространства делает понятие связности одним из важнейших в геометрии и физике» [2]. Также связности – важнейший объект, к которому приводит геометрическая формулировка теории поля. С описанием трехмерных нередуцируемых пространств, допускающих связности только ненулевой кривизны, можно ознакомиться в статье [3], также в ней приведены более подробный тематический обзор и обоснование применяемых методов; при изложении сохранены обозначения, введенные ранее. Если тензор кривизны является ненулевым, то и алгебра голономии ненулевая. В данной работе определяется, при каких условиях найденные в [3] пространства не допускают инвариантных эквивалентных связностей.

Основная часть. Пусть (\bar{G}, M) – трехмерное однородное пространство, где \bar{G} – группа Ли на многообразии M . Зафиксируем произвольную точку $o \in M$ и обозначим через $G = \bar{G}_o$ стабилизатор точки o . Известно, что проблема классификации однородных пространств (G, M) эквивалентна классификации пар групп Ли (G, G) , таких, что $G \subset \bar{G}$ (см., например, [4]). Поставим в соответствие (G, M) пару $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ алгебр Ли, где $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы \bar{G} , а \mathfrak{g} – подалгебра $\bar{\mathfrak{g}}$, соответствующая подгруппе G . *Изотропный \mathfrak{g} -модуль \mathfrak{m}* – это \mathfrak{g} -модуль $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$, такой, что $x \cdot (y + \mathfrak{g}) = [x, y] + \mathfrak{g}$. Соответствующее представление $\lambda: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ является *изотропным представлением* пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется *изотропно-точной*, если ее изотропное представление – инъекция.

Между инвариантными аффинными связностями на (\bar{G}, M) и линейными отображениями $\Lambda: \bar{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, такими, что $\Lambda|_{\mathfrak{g}} = \lambda$ и отображение Λ является \mathfrak{g} -инвариантным, существует взаимно-однозначное соответствие (см. [5]). Будем называть такие отображения *инвариантными аффинными связностями* на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. Если возможна хотя бы одна связность на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$, то такая пара является изотропно-точной (см. [6]). *Тензоры кручения $T \in \text{InvT}_2^1(\mathfrak{m})$ и кривизны $R \in \text{InvT}_3^1(\mathfrak{m})$* для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$ имеют соответственно вид

$$T(x_m, y_m) = \Lambda(x)y_m - \Lambda(y)x_m - [x, y]_m;$$

$$R(x_m, y_m) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]).$$

Связность с нулевым тензором кривизны еще называется плоской. Будем говорить, что Λ имеет нулевое кручение или является связностью без кручения, если $T = 0$. Определим *тензор Риччи* $Ric \in \text{InvT}_2(\mathfrak{m})$: $Ric(y, z) = \text{tr}\{x \mapsto R(x, y)z\}$. Будем говорить, что аффинная связность Λ является *локально эквивалентной*, если $\text{tr}\Lambda([x, y]) = 0$ для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$, то есть $\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}, \bar{\mathfrak{g}}) \subset \mathfrak{sl}(\mathfrak{m})$. Аффинная связность с нулевым кручением име-

ет симметрический тензор Риччи тогда и только тогда, когда она локально эквивалентна [7].

Под *эквивалентной связностью* будем понимать аффинную связность Λ (без кручения), для которой $\text{tr}\Lambda(x) = 0$ для всех $x \in \bar{\mathfrak{g}}$. В этом случае очевидно, что $\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}) \subset \mathfrak{sl}(\mathfrak{m})$.

Того, что пара является изотропно-точной, недостаточно для существования инвариантных связностей (см., например, статью [8]). Однородное пространство \bar{G}/G *редуктивно*, если алгебра Ли $\bar{\mathfrak{g}}$ может быть разложена в прямую сумму векторных пространств – алгебры Ли \mathfrak{g} и $\text{ad}(G)$ -инвариантного подпространства \mathfrak{m} , т. е. если $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$, $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{m} = 0$; $\text{ad}(G)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$, в противном случае пространство не является редуктивным. Второе условие влечет $[\mathfrak{g}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$, и наоборот, если G связна. Этот класс однородных пространств ввел в рассмотрение П. К. Рашевский, у редуктивных пространств при параллельном переносе сохраняются тензор кривизны и тензор кручения. Если \bar{G}/G редуктивно, то оно всегда допускает инвариантную связность [3].

Алгебра Ли \mathfrak{h}^* группы голономии инвариантной связности $\Lambda: \bar{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ – это подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ вида $V + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V] + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V]] + \dots$, где V – подпространство, порожденное множеством

$$\{[\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]) \mid x, y \in \bar{\mathfrak{g}}\}.$$

Поскольку множество V порождается операторами кривизны, если тензор кривизны ненулевой, то и алгебра голономии ненулевая.

Все нередуцируемые пространства \bar{G}/G , допускающие инвариантные аффинные связности, кривизна (и, соответственно, алгебра голономии) которых не может быть нулевой, приведены в [3]. Найдем, при каких условиях такие пространства не допускают эквивалентных связностей.

Будем определять пару $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ таблицей умножения алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}$. Через $\{e_1, \dots, e_n\}$ будем обозначать базис $\bar{\mathfrak{g}}$ ($n = \dim \bar{\mathfrak{g}}$). Полагаем, что алгебра Ли \mathfrak{g} порождается e_1, \dots, e_{n-3} . Пусть $\{u_1 = e_{n-2}, u_2 = e_{n-1}, u_3 = e_n\}$ – базис \mathfrak{m} . Будем описывать аффинную (эквивалентную) связность через $\Lambda(u_1), \Lambda(u_2), \Lambda(u_3)$ (поскольку $\Lambda|_{\mathfrak{g}} = \lambda$), а тензор кручения – через $T(u_1, u_2), T(u_1, u_3), T(u_2, u_3)$. Для ссылки на пару будем использовать обозначение $d.n.m$, где d – размерность подалгебры, n – номер подалгебры в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$, а m – номер пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$, соответствующие приведенному в работе [3].

Теорема. Если нередуцируемая пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$, $\text{codim}_{\bar{\mathfrak{g}}}\mathfrak{g} = 3$ допускает инвариантные аффинные связности только ненулевой кривизны (и, соответственно, с ненулевой алгеброй голономии), но не допускает эквивалентных связностей, то $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна одной и только одной из пар 4.21.24, 4.21.25 ($\delta = 0, 1$ соответственно), 3.20.22, 3.20.27:

4.21.24, 4.21.25

	\underline{e}_1	\underline{e}_2	\underline{e}_3	\underline{e}_4	\underline{u}_1	\underline{u}_2	\underline{u}_3
e_1	0	0	e_3	e_4	u_1	u_2	0
e_2	0	0	e_4	0	0	u_1	e_2
e_3	$-e_3$	$-e_4$	0	0	0	0	u_2
e_4	$-e_4$	0	0	0	0	0	e_4+u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	0	αe_4
u_2	$-u_2$	$-u_1$	0	0	0	0	$\alpha e_3 + \delta e_4 - u_2$
u_3	0	$-e_2$	$-u_2$	$-e_4 - u_1$	$-\alpha e_4$	$-\alpha e_3 - \delta e_4 + u_2$	0

$\alpha < -1/4$,

3.20.22

	\underline{e}_1	\underline{e}_2	\underline{e}_3	\underline{u}_1	\underline{u}_2	\underline{u}_3
e_1	0	e_2	$(1/2)e_3$	u_1	0	$(1/2)u_3$
e_2	$-e_2$	0	0	0	u_1	0
e_3	$-(1/2)e_3$	0	0	0	e_3	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	$2u_1$	0
u_2	0	$-u_1$	$-e_3$	$-2u_1$	0	$e_3 - u_3$
u_3	$-(1/2)u_3$	0	$-u_1$	0	$-e_3 + u_3$	0

3.20.27

	\underline{e}_1	\underline{e}_2	\underline{e}_3	\underline{u}_1	\underline{u}_2	\underline{u}_3
e_1	0	$(4/5)e_2$	$(3/5)e_3$	u_1	$(1/5)u_2$	$(2/5)u_3$
e_2	$-(4/5)e_2$	0	0	0	u_1	0
e_3	$-(3/5)e_3$	0	0	0	e_2	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	0
u_2	$-(1/5)u_2$	$-u_1$	$-e_2$	0	0	e_3
u_3	$-(2/5)u_3$	0	$-u_1$	0	$-e_3$	0

Действительно, в работе [3] получена классификация трехмерных нередуцируемых однородных пространств, допускающих инвариантные связности только ненулевой кривизны. Используя данную классификацию, найдем, существуют ли эквивалентные связности на пространствах указанного вида.

В случаях 4.21.24 и 4.21.25 аффинная связность имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} r_{1,1} & -q_{1,3} & 0 \\ 0 & r_{1,1} + 1 & 0 \\ 0 & 0 & r_{1,1} + p_{1,3} + 1 \end{pmatrix},$$

здесь и далее $p_{ij}, q_{ij}, r_{ij} \in \mathbb{R}$ ($i, j = \overline{1,3}$), а тензор кручения – вид $(0, 0, 0)$, $(p_{1,3} - r_{1,1}, 0, 0)$, $(2q_{1,3}, p_{1,3} - r_{1,1}, 0)$. Соответственно, $T = 0$ при $r_{1,1} = p_{1,3}$, $q_{1,3} = 0$. В этих случаях свя-

зность является локально эквивалентной, поскольку $\text{tr}\Lambda([y, z]) = 0$ для всех $y, z \in \bar{\mathfrak{g}}$, и она принимает вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} p_{1,3} & 0 & 0 \\ 0 & p_{1,3} + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2p_{1,3} + 1 \end{pmatrix}.$$

Связность не является эквивалентной при любых значениях параметров, так как $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ эквивалентна следующей подалгебре:

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y & u \\ 0 & x & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x, y, z, u \in \mathbb{R} \right\}.$$

Для выбора базиса подалгебры придаем одной из латинских переменных значение 1, а остальным 0, нумерация базисных векторов соответствует алфавиту. Получаем, что даже \mathfrak{g} не принадлежит $\mathfrak{sl}(\mathfrak{m})$.

Аналогично, в случае 3.20.27 аффинная связность имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

тензор кручения нулевой; связность является локально эквивалентной, поскольку $\text{tr}\Lambda([y, z]) = 0$ для всех $y, z \in \bar{\mathfrak{g}}$, но не является эквивалентной, так как $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ эквивалентна подалгебре

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & x/5 & 0 \\ 0 & 0 & 2x/5 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\},$$

соответственно, \mathfrak{g} не принадлежит $\mathfrak{sl}(\mathfrak{m})$.

В случае 3.20.22 аффинная связность имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & q_{1,1} + p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & q_{1,1} + 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & r_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{1,2} & 0 \end{pmatrix},$$

тензор кручения $-(p_{1,2} - q_{1,1} - 2, 0, 0)$, $(0, 0, 0)$, $(0, 0, q_{1,1} + 2 - p_{1,2})$, $T = 0$ при $q_{1,1} = p_{1,2} - 2$, тогда связность является локально эквивалентной и принимает вид

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{1,2} - 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2p_{1,2} - 2 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} - 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & r_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{1,2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Связность не является эквивалентной, так как $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ эквивалентна подалгебре

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x/2 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\},$$

а \mathfrak{g} не принадлежит $\mathfrak{sl}(m)$.

Прямыми вычислениями получаем, что других трехмерных нередуцируемых однородных пространств (допускающих инвариантные связности только ненулевой кривизны), не допускающих эквивалентных связностей, нет.

Заключение. В работе для трехмерных нередуцируемых однородных пространств, допускающих инвариантные связности только с ненулевой алгеброй голономии, определено, при каких условиях данное пространство не допускает эквивалентных связностей, соответствующие пространства найдены и описаны в явном виде.

Список литературы

1. Cartan E. La geometrie des espaces de Riemann // Memorial des Sciences Math. 1923. Vol. 9. 457 p.
2. Алексеевский Д. В., Виноградов А. М., Лычагин В. В. Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНТИ АН СССР. 1988. Т. 28. С. 5–297.
3. Можей Н. П. Связности ненулевой кривизны на трехмерных нередуцируемых пространствах // Известия Саратовского университета. Новая серия. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, № 4. С. 381–393.
4. Онищик А. Л. Топология транзитивных групп преобразований. М.: Физ.-мат. лит., 1995. 382 с.
5. Nomizu K. Invariant affine connections on homogeneous spaces // Amer. J. Math. 1954. Vol. 76, no. 1. С. 33–65.
6. Kobayashi S., Nomizu K. Foundations of differential geometry. New York: John Wiley and Sons. 1963. Vol. 1. 329 p.; 1969. Vol. 2. 470 p.
7. Nomizu K., Sasaki T. Affine differential geometry. Cambridge Univ. Press, 1994. 263 p.
8. Можей Н. П. Трехмерные однородные пространства, не допускающие инвариантных связностей // Известия Саратовского университета. Новая серия. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, № 4. С. 413–421.

References

1. Cartan E. La geometrie des espaces de Riemann. *Memorial des Sciences Math.*, 1923, vol. 9. 457 p.
2. Alekseyevskiy D. V., Vinogradov A. M., Lychagin V. V. Basic ideas and concepts of differential geometry. *Itogi nauki i tekhniki. Sovremenyye problemy matematiki. Fundamental'nyye napravleniya* [Results of science and technology]. Moscow, VINITI AN SSSR Publ., 1988, vol. 28, pp. 5–297 (In Russian).
3. Mozhey N. P. Connections of Nonzero Curvature on Three-dimensional Non-reductive Spaces. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Ser.: Matematika. Mekhanika. Informatika*. [Izvestiya Saratov University. New series. Series: Mathematics. Mechanics. Computer science], 2017, vol. 17, no. 4, pp. 381–393 (In Russian).
4. Onishchik A. L. *Topologiya tranzitivnykh grupp preobrazovaniy* [Topology of transitive transformation groups]. Moscow, Fiz.-mat. lit. Publ., 1995. 382 p. (In Russian).
5. Nomizu K. Invariant affine connections on homogeneous spaces. *Amer. J. Math.*, 1954, vol. 76, no. 1, pp. 33–65.
6. Kobayashi S., Nomizu K. Foundations of differential geometry. New York, John Wiley and Sons Publ., 1963, vol. 1. 329 p.; 1969, vol. 2. 470 p.
7. Nomizu K., Sasaki T. Affine differential geometry. Cambridge, Cambridge Univ. Press Publ., 1994. 263 p.

8. Mozhey N. Three-dimensional Homogeneous Spaces, Not Admitting Invariant Connections. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Ser.: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Izvestiya Saratov University. New series. Series: Mathematics. Mechanics. Computer science], 2016, vol. 16, no. 4, pp. 413–421 (In Russian).

Информация об авторе

Можей Наталья Павловна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры программного обеспечения информационных технологий. Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (ул. П. Бровки, 6, 220013, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: mozheynatalya@mail.ru

Information about the author

Mozhey Natalya Pavlovna – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Software for Information Technologies. Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (6 P. Brovki str., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: mozheynatalya@mail.ru

Поступила после доработки 13.11.2024

УДК 519.854.3, 519.854.64, 519.86, 658.5.012.2

О. А. Стрельченко¹, В. В. Ткаченко¹, А. А. Чепиков²

¹Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси

²Белорусский государственный университет

МОДЕЛЬ ОПТИМИЗАЦИИ ПЛАНИРОВАНИЯ ПРОИЗВОДСТВА ПРОДУКТОВ РАЗДЕЛЕНИЯ ВОЗДУХА

В статье рассматривается задача оптимального планирования реального производства продуктов разделения воздуха: жидкого кислорода, азота, аргона и газообразного азота. Перечисленные продукты производятся на двух воздуходелительных установках, имеющих разные режимы работы, производительность и показатели переходных процессов включения и выключения. Для решения задачи предлагается математическая модель поиска выпуска оптимального количества каждого вида продукции в плановом периоде с целью минимизации производственных затрат и с учетом различных производственных и временных ограничений (полное удовлетворение спроса, производительность машин, ограничения на хранение запасов продукции, непрерывность производства, ограничения времени включения и выключения машин). Для улучшения сходимости и поиска оптимального решения предлагается использование вспомогательных переменных в уравнении баланса производства и спроса. Учет времени включения и выключения производственных установок смоделирован в виде ограничений, управляющих логикой различных состояний машин, а также параметром времени переходных состояний.

Ключевые слова: математическая модель, непрерывное производство, оптимизационное планирование, целочисленное линейное программирование.

Для цитирования: Стрельченко О. А., Ткаченко В. В., Чепиков А. А. Модель оптимизации планирования производства продуктов разделения воздуха // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2025. № 2 (296). С. 16–20.

DOI: 10.52065/2520-6141-2025-296-3.

O. A. Stralchonak¹, V. V. Tkachenko¹, A. A. Chepikov²

¹United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus

²Belarusian State University

OPTIMIZATION MODEL FOR AIR SEPARATION PRODUCT PRODUCTION PLANNING

The article considers the problem of optimal planning for real production of air separation products: liquid oxygen, nitrogen, argon and gaseous nitrogen. The listed products are manufactured at two air separation plants with different operating modes, productivity and indicators of transient processes of switching on and off. To solve the problem, a mathematical model is proposed for finding the output of the optimal amount of each type of product in the planning period in order to minimize production costs and taking into account various production and time constraints (full satisfaction of demand, machine productivity, restrictions on storing product stocks, continuity of production, restrictions on the time of switching on and switching off of the machines). To improve convergence and search for the optimal solution, it is proposed to use auxiliary variables in the balance equation of production and demand. Switching on/off time of production units is modeled in the form of constraints controlling the logic of various states of machines, as well as the time parameter of transient states.

Keywords: mathematical model, continuous production, optimized planning, integer linear programming.

For citation: Stralchonak O. A., Tkachenko V. V., Chepikov A. A. Optimization model for air separation product production planning. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2025, no. 2 (296), pp. 16–20 (In Russian).

DOI: 10.52065/2520-6141-2025-296-3.

Введение. В современной химической промышленности, в частности производстве продуктов разделения воздуха (кислорода, азота, аргона как в жидком, так и в газообразном состоянии), отличительной чертой является

его сложность, при которой экономические и технологические факторы взаимосвязаны. Так, например, выпуск продукции должен одновременно учитывать спрос потребителей и производственные возможности (такие,

как режимы производительности, переходные процессы включения-выключения установок, непрерывность производства определенных продуктов), а также ограничения на хранение и стоимость всей цепочки производства и поставки продукции. В таких условиях качество принятия решений при управлении предприятием во многом определяется качеством комплексного планирования выполняемых предприятием операций. В настоящее время существует несколько подходов к формулированию модели оптимального планирования непрерывного производства. Непрерывно-дискретный характер процессов модели можно рассматривать в виде ограничения на минимальное $x'_{\min,j}$ и максимальное $x'_{\max,j}$ количество производимой продукции в периоде t :

$$x'_{\min,j} \delta'_j \leq x'_j \leq x'_{\max,j} \delta'_j,$$

где δ'_j – бинарные дискретные переменные 0 или 1, определяемые включением режима производительности установки [1]. Оптимизация работы воздуходелительной установки в различные фазы производства продукции (сжижение, газообразование) в зависимости от стоимости электроэнергии допускает перепроизводство жидкого кислорода и азота для их повторного использования в процессе испарения и превращения в газообразный продукт [2]. Либо, наоборот, в случае технологической возможности ВРУ (воздухоразделительной установки), возможно перепроизводство продукта в газообразном состоянии для его дальнейшего сжижения, чтобы удовлетворить спрос на жидкие продукты.

В случае производства продуктов разделения воздуха, когда происходит производство всех продуктов одновременно [3], рассматривается модель производства не одного продукта раздельно, а решается проблема оптимального планирования многопродуктового производства при удовлетворении детерминированного спроса. Такая необходимость доказывается тем фактом, что результаты оптимизации производства только для одного продукта – кислорода нарушают условия необходимого производства азотных продуктов. При этом, как и в большинстве подобных задач [3–5], связанных с планированием непрерывного производства на установках ВРУ, используется итерационное смешанное целочисленное линейное программирование (MILP – mixed integer linear programming). Для максимального соответствия физической модели процесса производства в модели планирования [3] учитываются такие переменные, как рабочее состояние ВРУ, состояние модулей ожижения

и испарителя, а также количество производимой продукции каждого вида.

Переход к нелинейным моделям и моделированию в многопериодном планировании, когда начальный период делится на несколько частей, сглаживают недостаток стационарной модели производственного процесса, а также учитывают реальные переходные процессы переключения производственных установок [4].

Для представления различных рабочих состояний ВРУ в публикации [5] предложена модель, учитывающая множество возможных переходов состояний функционирования производственной системы. В сочетании с жесткой дискретной моделью MILP данная архитектура применена для решения проблемы планирования непрерывного производства на нескольких установках ВРУ.

В предлагаемой статье представлена модель оптимизации непрерывного производства продуктов разделения воздуха с учетом известных ограничений (производительности, хранения запасов, состояний машин) с целью минимизации стоимости производства (включая цель минимального количества включений, выключений машин, переключений режимов производительности).

Основная часть. Рассматриваемое производство является специализированным предприятием по выпуску продуктов разделения воздуха: жидких продуктов – кислорода, азота, аргона, а также азота в газообразном состоянии. Важной особенностью данного проекта является требование непрерывного производства газообразного азота, транспортируемого по трубе потребителям. Вышеперечисленные продукты могут производиться на любой из двух имеющихся производственных установках (ВРУ1 и ВРУ2) либо на обеих одновременно в зависимости от спроса и режимов производительности машин. Качественная постановка задачи заключается в определении оптимального по стоимости плана непрерывного производства всех четырех производимых видов продукции с использованием имеющихся ресурсов для полного удовлетворения спроса и с учетом производственных и временных ограничений. Математическая модель формулируется в виде задачи определения размера партии производимой продукции в каждый временной период планирования (минимум – 1 ч) с целью минимизации полной стоимости производства и с учетом имеющихся производственных ограничений (полное удовлетворение спроса, производительность машин, ограничения на хранение запасов продукции, непрерывность производства, ограничения времени включения и выключения машин).

Дано (входные данные):

– $t \in \{1, \dots, T\}$ – последовательность периодов планирования (месяц, сутки, час);

– J – множество видов производимой продукции. $j = 1, 2, 3, 4$.

– Производство на двух производственных установках ($m = 1, 2$). M – множество машин;

– R – множество режимов работы производственных установок-машин, $R = 1, \dots, 24$;

– MR_{mr} – матрица назначения возможных режимов работы r машинам m ;

– P_{rj} – матрица производительности; A_{rj} – матрица обратной производительности;

– $S_m^{\text{off, start, run, switch, shut}}$ – набор возможных состояний машины m . $S_m \in \{\text{off (выключена), start (включение-разогрев), run (номинальный режим), switch (переключение в другой рабочий режим), shut (выключение-остывание)}\}$ (рис. 1);

– TS_{ms} – минимальное время непрерывной работы машины m в состоянии s для продукта j ;

– AS_{ms} – набор состояний, в которые разрешено переходить машине m из состояния s

Например, для $m = 1$ и $s = \text{run}$, $AS_{ms} = \{\text{switch, shut}\}$;

– D_{ij} – спрос на продукцию j в период t ;

– E_{jt} – собственное потребление продукции j ;

– L_{ij} – производственные потери продукции j в период t ;

– IM_{jt} – количество импортируемой продукции j в период t ;

– $I_{\min j}$, $I_{\max j}$ – минимальное и максимальное количество запасов продукции на складе (емкость для хранения);

– I_{0jt} – запасы продукции j , хранимой на складе на начало периода t ;

– h_{jt} , sm_{jt} , sp_{mj} , sc_m – соответственно стоимость хранения запасов продукции, стоимость импорта продукции (в случае необходимости, например, невозможность производства либо стоимость импорта меньше, чем стоимость производства), себестоимость производства одной единицы продукции j на машине m , стоимость включения-разогрева машины m ;

– Q_{mj} , B_{mj} – нижняя и верхняя граница производительности продукта j на машине m ;

– C_{mt} – максимально возможное время работы машины m в периоде t .

Основные переменные:

– X_{imj} – количество продукции j , производимой на машине m в период t ;

– R_{im} – текущий режим работы машины m в периоде t ;

– $Y_{ims} = 1$, если машина m работает в состоянии s в период t (иначе $Y_{ims} = 0$);

– $Z_{ims} = 1$, если машина m изменяет свое состояние в период t ;

– I_{ij} – запас продукции j на конец периода t ;

– S_{mt}^a – фактическое состояние машины m в момент времени t .

Вспомогательные переменные:

– αl_{ij} – переменная в левой части уравнения баланса для улучшения сходимости;

– αr_{ij} – переменная в правой части уравнения баланса для улучшения сходимости.

Модель состоит из исходных известных данных, целевой функции и ограничений (рис. 2).

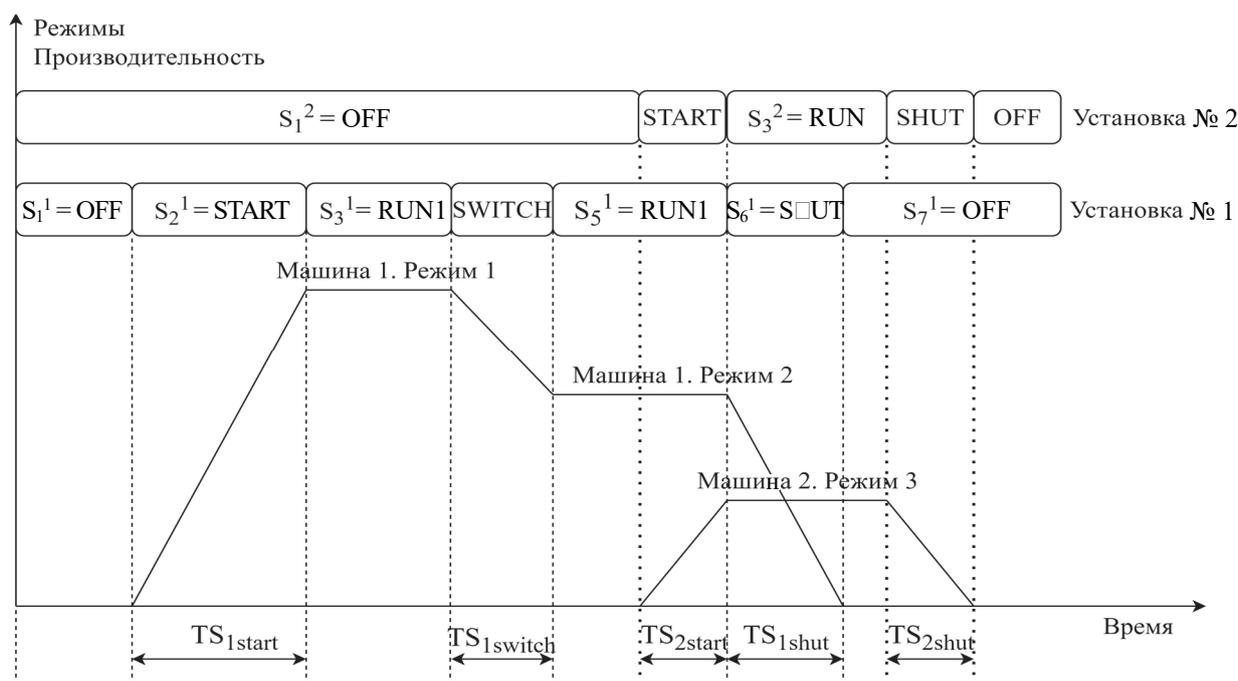


Рис. 1. Переходные процессы производственных установок

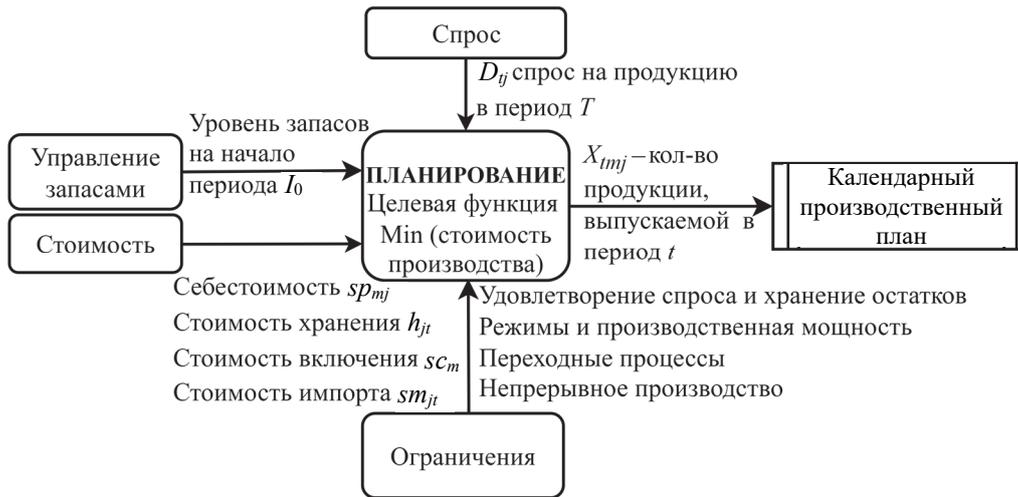


Рис. 2. Модель оптимизационного планирования производства продуктов разделения воздуха

Целевая функция заключается в минимизации стоимости производства, включая стоимость хранения продукции, стоимость импорта, себестоимость производства и стоимость запуска производственного оборудования:

$$\begin{aligned} & \text{Min} \sum_t^T [\sum_j^J (h_{jt} I_{jt} + sm_{jt} IM_{jt} + \\ & + \sum_m^M (sp_{mj} X_{tmj} Y_{tms} + sc_m Y_{tms})), \forall s \in S^{\text{run}}, s' \in S^{\text{start}}, \\ & j \in J, m \in M, t \in T. \end{aligned} \quad (1)$$

Ограничения:

Уравнение баланса – в каждый период времени производится такое количество продукции каждого вида, которого было бы достаточно для полного и своевременного удовлетворения потребностей сбыта с учетом начальных запасов, потерь и требований по импорту:

$$\begin{aligned} & I_{j,t-1} + \sum_m^M X_{tmj} + IM_{jt} + \alpha I_{jt} = \\ & = D_{jt} + I_{jt} + E_{jt} + L_{jt} + \alpha r_{jt}, \forall j \in J, t \in T. \end{aligned} \quad (2)$$

Предприятие имеет емкости для хранения запасов произведенной продукции, которые ограничены минимальным и максимальным возможным объемом хранения:

$$I_{\min_j} \leq I_{jt} \leq I_{\max_j}. \quad (3)$$

Количество производимой продукции зависит от режимов и производительности установок:

$$X_{tmj} = \sum_j^J \sum_{r \in MR_{mr}} R_{tm} P_{rj}. \quad (4)$$

Производственные ограничения лежат в диапазоне минимальной и максимальной производительности установок:

$$Q_{jt} M_{tm} \leq X_{tmj} \leq B_{jt} M_{tm}, \forall j \in J, m \in M, t \in T. \quad (5)$$

В каждый период времени машина находится только в одном из возможных состояний:

$$\sum_{s \in S_m} Y_{tms} = 1. \quad (6)$$

Ограничение непрерывного производства состоит в том, что в любой период времени t хотя бы одна машина работает либо в режиме run, либо в режиме switch (для машины 1). При этом время работы в номинальном режиме run определяется обратной производительностью и количеством произведенного продукта, а время работы в режиме switch определяется минимальным временем переключения TS_j^{switch} машины 1.

$$\sum_j^J \sum_m^M (A_{rj} X_{mjt} Y_{tms} + TS_{mjs} Y_{tms}) = C_{mt}, C_{mt} = 1, \quad (7)$$

$$\forall s \in S^{\text{run}}, s' \in S^{\text{switch}}.$$

Гарантируется переключение только в разрешенные состояния для машины m при переходе из периода $(t-1)$ в период t :

$$Y_{t-1ms} + Y_{tms} Z_{tms} = 2, \forall s \in S_m^a, s' \in AS_{ms}. \quad (8)$$

Требуется, чтобы в переходном состоянии ($S = \text{start, switch, shut}$) установка работала не менее TS_{mjs} интервалов времени:

$$TS_{mjs} \leq \sum_t^T Y_{tms} (Z-1),$$

$$\forall s \in S_m^a, s' \in \text{start, switch, shut}. \quad (9)$$

Наконец, вводим ограничения значений переменных

$$X_{tmj}, I_{jt}, \alpha I_{jt}, \alpha r_{jt} \geq 0; Y_{tms}, Z_{tms} \in \{0, 1\}, \quad (10)$$

$$j \in J, m \in M, t \in T.$$

Заключение. Предлагаемая модель сформулирована в виде задачи целочисленного линейного программирования, в которой поиск оптимального решения количества производимой продукции выполняется с целью уменьшения всех производственных затрат с учетом реальных ограничений предприятия. Рассматриваемая задача оптимального планирования производства продуктов разделения воздуха решена средствами решателя (solver) CP-SAT в составе Google OR-Tools. Сходимость и при-

емлемое время нахождения оптимального решения (не более 300 с) достигнуто благодаря использованию вспомогательных переменных в уравнении баланса. Для учета переходных процессов производственных установок применены ограничения, использующие состояния машин, а также параметры и логика их включения и выключения. Предлагаемая модель может быть использована для других схожих задач оптимизации планирования непрерывного производства.

Список литературы

1. Цодиков Ю. М. Оптимальное календарное планирование для непрерывного производства с ограничением на структуру графика // Автоматика и телемеханика. 2008. № 1. С. 171–179.
2. A flexible air separation process: 2. Optimal operation using economic model predictive control / A. Caspari [et al.] // *AIChE J.* 2019;65:e16721. <https://doi.org/10.1002/aic.16721>.
3. Optimization of co-production air separation unit based on MILP under multi-product deterministic demand / Kong Fulin [et al.] // *Applied Energy.* 2022. Vol. 325. <https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2022.119850>.
4. Kuvykin V. I. Optimal Planning and Analysis of Continuous Production Mode // *Automation in Industry. Automation and remote control.* 2018. Vol. 79, no. 2. P. 384–390.
5. Grossmann / Zhao Shengnan [et al.]. // *Industrial & Engineering Chemistry Research.* 2019. No. 58 (8). P. 3104–3117. <https://doi.org/10.1021/acs.iecr.8b04964>.

References

1. Yu. M. Tsodikov. Optimal scheduling for continuous production with constraint on schedule structure. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and telemechanics], 2008, no. 1, pp. 171–179 (In Russian).
2. Caspari A., Offermanns C., Schäfer P., Mhamdi A., Mitsos A. A flexible air separation process: 2. Optimal operation using economic model predictive control. *AIChE J.* 2019;65:e16721. <https://doi.org/10.1002/aic.16721>.
3. Fulin Kong, Yuxin Liu, Lige Tong, Wei Guo, Yinan Qiu, Li Wang. Optimization of co-production air separation unit based on MILP under multi-product deterministic demand. *Applied Energy*, 2022, vol. 325. <https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2022.119850>.
4. Kuvykin V. I. Optimal Planning and Analysis of continuous production mode. *Automation in Industry. Automation and remote control*, 2018, vol. 79, no. 2, pp. 384–390.
5. Shengnan Zhao, M. Paz Ochoa, Lixin Tang, Irene Lotero, Ajit Gopalakrishnan, and Ignacio E. Grossmann. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 2019, no. 58 (8), pp. 3104–3117. <https://doi.org/10.1021/acs.iecr.8b04964>.

Информация об авторах

Стрельченко Олег Александрович – аспирант. Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси (ул. Сурганова, 6, 220012, Минск, Республика Беларусь). E-mail: oleg@stralchonak.com

Ткаченко Вадим Викторович – кандидат технических наук, заведующий лабораторией. Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси (ул. Сурганова, 6, 220012, Минск, Республика Беларусь). E-mail: tkach@newman.bas-net.by

Чепиков Арсений Алексеевич – студент. Белорусский государственный университет (пр-т Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: a.chepikov@gmail.com

Information about the authors

Stralchonak Oleg Aleksandrovich – PhD student, United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus (6 Surganova str., 220012, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: oleg@stralchonak.com.

Tkachenko Vadim Viktorovich – PhD (Engineering), Head of laboratory. United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus (6 Surganova str., 220012, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: tkach@newman.bas-net.by

Chepikov Arseniy Alekseevich – student. Belarusian State University (4 Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: a.chepikov@gmail.com

Поступила 16.05.2025

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

THEORETICAL MECHANICS

УДК 531.382

Т. Б. Карлович¹, А. О. Карлович²

¹ Белорусский государственный технологический университет

² ООО «Вирма»

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ВОЛЧКА ТИП-ТОП ПО ГЛАДКОЙ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Волчок тип-топ привлекает к себе внимание благодаря возможности выбора теоретической модели для его описания и проведения с ним простых экспериментов. Во время движения волчок может эффективно переворачиваться на 180° и поднимать свой центр тяжести выше центра сферы, описанной вокруг него. Такое неустойчивое поведение является следствием наличия трения скольжения между волчком и контактной поверхностью. Также в теоретической модели необходимо учитывать сопротивление воздуха при быстром вращении волчка.

В настоящей работе теоретическое описание движения волчка осуществляется на основе нелинейных динамических уравнений, записанных в подвижной системе отсчета. В силу сложности модели получение аналитического решения задачи возможно только в простейших случаях с применением первых интегралов. В литературе широко обсуждается интеграл Джелетта, означающий постоянство проекции кинетического момента на радиус-вектор, проведенный из центра масс в точку касания волчка плоскости. С использованием векторного анализа демонстрируется, что интеграл Джелетта перестает существовать при учете момента сопротивления воздуха.

Также в работе представлено численное решение задачи о движении волчка по абсолютно гладкой поверхности на основе методов Эйлера и Рунге – Кутты. Метод Эйлера является простым в применении, однако из-за малой точности дает расходящееся решение для рассчитываемых параметров. Метод Рунге – Кутты более точный, однако соответствующие расчетные схемы оказываются громоздкими и затратными по времени. Нами рассматриваются рамки применимости обоих методов для получения оптимальной точности с минимальными временными затратами для расчета траектории точки касания волчка горизонтальной поверхности.

Ключевые слова: механическая система, динамически симметричное тело, количество движения, кинетический момент, интеграл Джелетта.

Для цитирования: Карлович Т. Б., Карлович О. А. Использование численных методов для решения задачи о движении волчка тип-топ по гладкой горизонтальной поверхности // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2025. № 2 (296). С. 21–26.

DOI: 10.52065/2520-6141-2025-296-4.

T. B. Karlovich¹, A. O. Karlovich²

¹ Belarusian State Technological University

² LLC “Virma”

USING NUMERICAL METHODS TO SOLVING THE PROBLEM OF MOTION OF A TIP-TOP ON A SMOOTH HORIZONTAL SURFACE

The tip-top attracts attention due the possibility of choosing a theoretical model to describe it and conduct simple experiments with it. During movement, the top can effectively return around by 180° and lift its center of gravity above the center of the sphere described around it. Such non-resistant behavior is a consequence of the presence of sliding friction between the top and the contact surface. Also in theoretical model, it is necessary to take into account the air resistance with the rapid rotation of the top.

In this work, the theoretical description of the movement of the top is carried out on the basis of nonlinear dynamic equations recorded in the moving reference system. Due to complexity of the model, obtaining an analytical solution to the problem is possible only in the simplest cases using

the first integrals. In the literature, the Jellett integral is widely discussed, meaning the constancy of the projection of the kinetic mop on the radius vector drawn from the center of the masses to the point of touching the top of the plane. Using vector analysis, it is demonstrated that the Jellett integral ceases to exist taking into account the air resistance.

The work is also presents a numerical solution to the problem of the movement of the top by absolutely smooth surface based on the methods of Euler and Runge – Kutt. The Euler method is easy to use, however, due to low accuracy, gives diverging values for the parameters calculated. The Runge – Kutt method is more accurate, however, the corresponding calculation schemes turn out to be cumbersome and expendable in time. We examine the framework of the applicability of both methods for obtaining optimal accuracy with minimal time costs for calculating the trajectory of the touching point of the top with the horizontal surface.

Keywords: mechanical system, dynamically symmetrical body, momentum, kinetic moment, Jellett integral.

For citation: Karlovich T. B., Karlovich O. A. Using numerical methods to solving the problem of motion of a tip-top on a smooth horizontal surface. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics Informatics*, 2025, no. 2 (296), pp. 21–26 (In Russian).

DOI: 10.52065/2520-6141-2025-296-4.

Введение. Задача о движении волчка тип-топ по неподвижной горизонтальной поверхности является одной из классических задач динамики твердого тела. Она привлекает к себе внимание благодаря возможности проведения эксперимента без сложного оборудования и непосредственному наблюдению эффектного переворота волчка во время движения со шляпки на ножку, сопровождающегося поднятием центра тяжести. Решающее значение в объяснении переворота на 180° связано с наличием трения скольжения между волчком тип-топ и контактной поверхностью. Ввиду сложного математического описания динамического поведения такой механической системы в общем случае решение соответствующих уравнений возможно лишь в численном виде. Отдельные случаи аналитических и точных решений приведены в работах А. В. Карапетяна [1, 2] и А. П. Маркеева [3]. При этом волчок рассматривается в виде сферического объекта с центром тяжести, расположенным ниже центра тяжести сферы. В работах [4, 5] проводились эксперименты с волчками, сделанными вручную и распечатанными на 3D-принтере. Была исследована траектория точки касания волчка горизонтальной поверхности и обнаружено его движение по спирали после переворота на ножку. Качественное поведение волчка на основе приближенного решения описывается в работе [3], однако радиус закручивания спирали в эксперименте [5] оказывается значительно больше, чем в теоретическом предсказании. В работе [5] была предложена модель, включающая сопротивление воздуха [6], оказывающего влияние на движение легкого полого волчка, представляющего собой срезанную на $\frac{1}{4}$ часть диаметра сферическую оболочку.

Основная часть. Рассмотрим описание движения волчка на основе уравнений, включающих теоремы об изменении количества движения и кинетического момента, а также постоянства вектора восходящей вертикали γ и безотрывности движения волчка по горизонтальной поверхности. В качестве неподвижной системы отсчета возьмем систему $Oxyz$, связанную с горизонтальной поверхностью, в качестве подвижной системы отсчета выберем систему $G\xi\eta\sigma$, связанную с волчком и имеющую начало в его центре масс. Также будем использовать систему координат с началом в точке G и осями, расположенными параллельно осям неподвижной системы отсчета ($Gx_1y_1z_1$) (рис. 1).

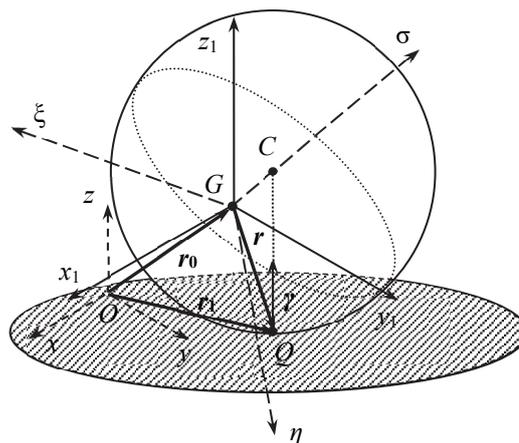


Рис. 1. Схематическое движение сферического волчка по горизонтальной плоскости Oxy

Математическая модель эволюции волчка на горизонтальной поверхности, рассмотренная в работе [3] и дополненная моментом сил сопротивления воздуха (сила сопротивления

воздуха не учитывается из-за малой скорости поступательного движения волчка по сравнению со скоростью вращательного движения), имеет вид

$$\begin{aligned} m\dot{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\omega} \times m\mathbf{v} &= -mg\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{R}, \\ I\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times I\boldsymbol{\omega} &= \mathbf{r} \times \mathbf{R} + \mathbf{M}, \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma} &= 0, \\ (\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\gamma} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где m – масса волчка; \mathbf{v} – скорость центра масс; $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость; \mathbf{r} – радиус-вектор, проведенный из центра масс к нижней точке сферы Q ; \mathbf{R} – реакция, приложенная в точке Q , $\mathbf{R} = \mathbf{F} + \mathbf{N}$; \mathbf{F} – сила трения (учитывается только сила трения скольжения (моменты силы трения, представляемые в виде пары сил вращения и качения, обычно малые и ими пренебрегают); \mathbf{N} – нормальная составляющая реакции; \mathbf{M} – момент сопротивления воздуха. I – тензор инерции волчка относительно главных центральных осей $G\xi$, $G\eta$, $G\sigma$, связанных с его осью симметрии и перпендикулярной ей плоскостью. Предполагается, что моменты инерции относительно осей $G\xi$ и $G\eta$ одинаковы между собой, равны A и отличаются от момента инерции относительно оси $G\sigma$ – C , так что тензор инерции I имеет вид

$$I = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \quad (2)$$

Выражение в скобках последнего уравнения системы (1) есть скорость точки касания волчка горизонтальной поверхности

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \quad (3)$$

Получение аналитических решений системы (1) связано с использованием законов сохранения и симметрии задачи, а также нахождением как можно большего числа интегралов движения. Одним из них является интеграл Джеллетта (Jellet), означающий постоянство линейной комбинации проекций кинетического момента $\mathbf{K} = I\boldsymbol{\omega}$ на вертикаль $\boldsymbol{\gamma}$ и на ось динамической симметрии $G\sigma$.

Покажем, что интеграл Джеллетта, определяемый равенствами

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{r} = \text{const} \text{ или } \dot{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{K} \cdot \dot{\mathbf{r}} = 0, \quad (4)$$

имеет место только в случае отсутствия сопротивления воздуха. Для доказательства равенства воспользуемся разложением вектора \mathbf{r} и его производной на составляющие вектора:

$$\mathbf{r} = ae_{\sigma} - \rho\boldsymbol{\gamma}, \quad \dot{\mathbf{r}} = -\rho\dot{\boldsymbol{\gamma}}, \quad (5)$$

где a – расстояние между центром сферы и центром масс; ρ – радиус сферы. В силу постоянства вектора $\boldsymbol{\gamma}$ в неподвижной системе отсчета справедливо следующее соотношение между вектором $\boldsymbol{\gamma}$ и его производной в подвижной системе отсчета:

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}. \quad (6)$$

С учетом формул (5) и (6) и циклической перестановки в смешанном произведении векторов второе слагаемое в формуле (4) можно представить в виде

$$\mathbf{K} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \rho\boldsymbol{\gamma} \cdot (\mathbf{K} \times \boldsymbol{\omega}). \quad (7)$$

Для расчета первого слагаемого в формуле (4) сначала выразим из второго уравнения системы (1) производную кинетического момента

$$\dot{\mathbf{K}} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K} + \mathbf{r} \times \mathbf{R} + \mathbf{M}. \quad (8)$$

Далее преобразуем векторное произведение угловой скорости и кинетического момента в формуле (8). Для этого разложим оба вектора по базису векторов подвижной системы отсчета e_{ξ} , e_{η} , e_{σ} и запишем векторное произведение в виде определителя третьего порядка:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K} = \boldsymbol{\omega} \times I\boldsymbol{\omega} &= \begin{vmatrix} e_{\xi} & e_{\eta} & e_{\sigma} \\ \omega_{\xi} & \omega_{\eta} & \omega_{\sigma} \\ A\omega_{\xi} & A\omega_{\eta} & C\omega_{\sigma} \end{vmatrix} = \\ &= e_{\xi}(C - A)\omega_{\eta}\omega_{\sigma} - e_{\eta}(C - A)\omega_{\xi}\omega_{\sigma}. \end{aligned} \quad (9)$$

Затем скалярно умножим левую и правую части формулы (8) на вектор \mathbf{r} и учтем тот факт, что векторное произведение кинетического момента и угловой скорости является вектором, лежащим в плоскости, перпендикулярной оси $G\sigma$ в силу равенства экваториальных моментов инерции относительно осей $G\xi$ и $G\eta$. Тогда первое слагаемое равенства (4) записывается в виде

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{r} &= (-\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K} + \mathbf{r} \times \mathbf{F} + \mathbf{M}) \cdot \mathbf{r} = \\ &= -(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K} + \mathbf{M}) \cdot (ae_{\sigma} - \rho\boldsymbol{\gamma}) = \\ &= -\rho\boldsymbol{\gamma} \cdot (\mathbf{K} \times \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{M} \cdot (ae_{\sigma} - \rho\boldsymbol{\gamma}). \end{aligned} \quad (10)$$

Из формул (7) и (10) следует, что в случае равенства нулю момента сил сопротивления воздуха \mathbf{M} суммарный результат формул (7) и (10) также равен нулю и интеграл Джеллетта имеет место. Таким образом, система уравнений (1) может быть решена только численными методами [7]. Для более простой системы при $\mathbf{M} = 0$ получение решения в аналитическом виде

возможно лишь для малой силы трения с учетом исследования параметров устойчивости задачи [1–3]. В случае нулевой силы трения имеют место интегралы Джелетта, энергии, проекции угловой скорости на ось динамической симметрии ω_σ , а также сохраняется вектор γ в неподвижной системе отсчета. В результате анализа системы на устойчивость методом множителей Лагранжа в работах [1–3] показано, что в стационарном случае в критических точках будут существовать два вида периодических решений: 1) вращение с постоянной угловой скоростью ω_σ вокруг вертикальной оси симметрии с центром тяжести, расположенным либо выше центра сферы, либо ниже центра сферы на расстоянии a ; 2) вращение шара с угловой скоростью, равной $\lambda\omega_\sigma$, который прецессирует с угловой скоростью λ вокруг вертикали, где λ – один из множителей Лагранжа.

В настоящей работе численно решалась задача для скольжения волчка по абсолютно гладкой поверхности в подвижной системе отсчета. Соответствующая система из трех векторных дифференциальных уравнений и одного скалярного уравнения

$$\begin{aligned} m\dot{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\omega} \times m\mathbf{v} &= (N - mg)\boldsymbol{\gamma}, \\ I\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times I\boldsymbol{\omega} &= N\mathbf{r} \times \boldsymbol{\gamma}, \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma} &= 0, \\ \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\gamma} &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

преобразовывались в систему из десяти скалярных уравнений. Локальная производная по времени в момент времени t_k от искомой функции записывалась в виде конечной разности значений функции на последующем и предыдущем шагах:

$$\dot{x}_k = \frac{x_{k+1} - x_k}{h}, \quad (12)$$

где h – шаг по времени: $t_{k+1} = t_k + h$. Такой метод интегрирования уравнений называется методом Эйлера и имеет первый порядок точности. Для решения системы нелинейных уравнений этого может оказаться недостаточным, поэтому параллельно использовался метод Рунге – Кутты четвертого порядка точности. Было проведено сравнение двух методов на примере расчета проекций вектора γ . Соответствующие зависимости представлены на рис. 2. При заданных параметрах проекция γ_σ остается постоянной и рассчитывается одинаково обоими методами. Проекция γ_ξ и γ_η до момента времени $t = 1$ с считаются с приемлемой точностью обоими методами, а в более поздние моменты времени метод Эйлера дает большое расхождение по результатам. Так, в момент времени $t = 4$ с значения расходятся уже в 8 раз.

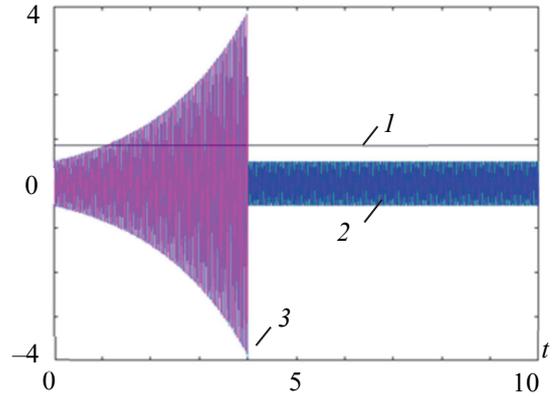


Рис. 2. Зависимость проекций вектора γ от времени для параметров: число точек по времени $L = 100\,000$, $\rho = 19$ мм, $a = 3$ мм, $\omega_{\xi 0} = \omega_{\eta 0} = 0$, $\omega_{\sigma 0} = 160$ рад/с, $\gamma_{\xi 0} = 0$, $\gamma_{\eta 0} = 0,5$, $\gamma_{\sigma 0} = 0,867$;
1 – проекция γ_σ , рассчитанная по методам Эйлера и Рунге – Кутта;
2 – проекции γ_ξ и γ_η , рассчитанные по методу Рунге – Кутта;
3 – проекции γ_ξ и γ_η , рассчитанные по методу Эйлера

Аналогичная картина наблюдается при расчете проекций скоростей, что продемонстрировано на рис. 3.

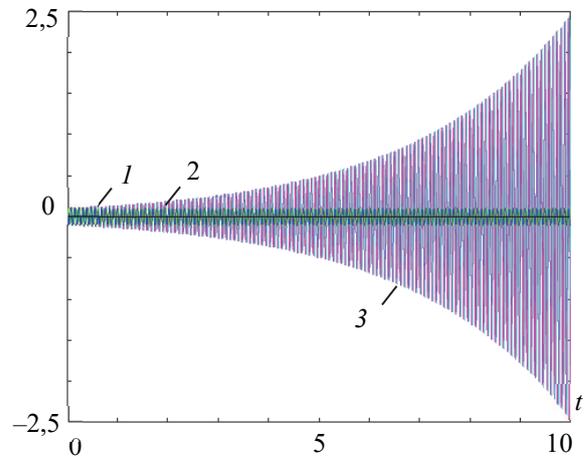


Рис. 3. Зависимость проекций вектора \mathbf{v} от времени для параметров: число точек по времени $K = 100\,000$, $\rho = 19$ мм, $a = 3$ мм, $\omega_{\xi 0} = \omega_{\eta 0} = 0$, $\omega_{\sigma 0} = 80$ рад/с, $v_{\xi 0} = 0$, $v_{\eta 0} = 0,5$, $v_{\sigma 0} = 0,867$, $v_{\xi 0} = 0,1$ м/с, $v_{\eta 0} = v_{\sigma 0} = 0$; 1 – проекция $v_{\sigma 0}$, рассчитанная по методам Эйлера и Рунге – Кутта;
2 – проекции $v_{\xi 0}$ и $v_{\eta 0}$, рассчитанные по методу Рунге – Кутта;
3 – проекции $v_{\xi 0}$ и $v_{\eta 0}$, рассчитанные по методу Эйлера

Компонента скорости v_σ совпадает в расчетах обоими методами и остается равной нулю для всех времен. Компоненты скорости v_ξ и v_η осциллируют вокруг нулевого значения и на 10-й секунде разница рассчитанных скоростей по методу Эйлера

и по методу Рунге – Кутты составляет 5 раз. Таким образом, метод Эйлера может использоваться в расчетах только для небольших времен до 1 с, его основным достоинством являются простота и высокая скорость расчета параметров.

Траектория точки касания волчком неподвижной поверхности в подвижной системе отсчета задается вектором \mathbf{r} , который определяется по формуле (5). Вычислив проекции вектора γ из системы уравнений (11), можно рассчитать компоненты вектора \mathbf{r} в подвижной системе отсчета. Для того, чтобы определить траекторию точки касания в неподвижной системе отсчета, вначале необходимо воспользоваться матрицей направляющих косинусов:

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix}, \quad (13)$$

где элементы матрицы D задают направляющие косинусы углов поворота осей подвижной системы отсчета относительно осей системы отсчета $Gx_1y_1z_1$, которая движется поступательно относительно неподвижной системы отсчета (рис. 1).

Используя разложение радиус-вектора \mathbf{r} в подвижной и неподвижной системах отсчета

$$\mathbf{r} = \xi \mathbf{e}_\xi + \eta \mathbf{e}_\eta + \sigma \mathbf{e}_\sigma = x_1 \mathbf{i}_1 + y_1 \mathbf{j}_1 + z_1 \mathbf{k}_1, \quad (14)$$

найдем связь между проекциями на оси координат в этих системах отсчета, причем значение координаты z не требуется, так как волчок скользит по горизонтальной поверхности:

$$\begin{aligned} x_1 &= d_{11}\xi + d_{12}\eta + d_{13}\sigma, \\ y_1 &= d_{21}\xi + d_{22}\eta + d_{23}\sigma, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\xi = -\rho\gamma_\xi, \quad \eta = -\rho\gamma_\eta, \quad \sigma = a - \rho\gamma_\sigma, \quad (16)$$

а элементы матрицы направляющих косинусов D в зависимости от времени определяются из уравнений Пуассона:

$$\dot{\mathbf{i}} = \mathbf{i} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\mathbf{j}} = \mathbf{j} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\mathbf{k}} = \mathbf{k} \times \boldsymbol{\omega}. \quad (17)$$

Далее для перехода в неподвижную систему отсчета учтем равенство (см. рис. 1)

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}, \quad (18)$$

где вектор \mathbf{r}_0 описывает движение центра масс в неподвижной системе отсчета. В случае абсолютно гладкой поверхности движение центра масс происходит под действием силы тяжести и силы реакции поверхности, направленных вертикально. Тогда проекция центра тяжести на горизонтальную поверхность будет двигаться равномерно со скоростью, равной проекции начальной скорости на плоскость Ox_1y_1 . Типичные траектории движения

на плоскости без трения представлены на рис. 4. В случае отсутствия начальной скорости при раскручивании волчка (кривые 1, 2, 3 на рис. 4) он движется по эллипсу, полуоси которого пропорциональны расстоянию a от центра тяжести до центра сферы, описанной вокруг волчка, а эксцентриситет обусловлен разными моментами инерции относительно осей $G\xi$, $G\eta$ (A) и $G\sigma$ (C). Несовпадение предыдущего витка движения со следующим витком (на рисунке заметны утолщения траектории) связаны с недостаточной точностью расчетов по методу Эйлера. «Дрожание» траектории обусловлено величиной угловой скорости ω . В случае ненулевой начальной скорости движения центра масс волчка замкнутые траектории становятся спиралевидными (кривые 4, 5, 6 на рис. 4) с постоянным углом наклона к оси x . Размер витка спирали пропорционален расстоянию a , а шаг спирали пропорционален начальной скорости движения центра масс.

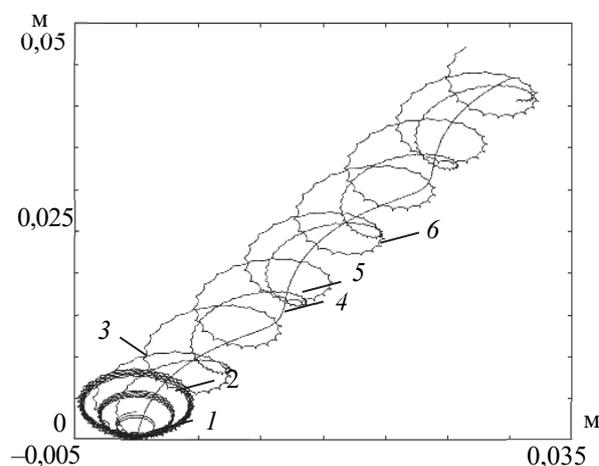


Рис. 4. Траектория точки касания волчка поверхности для параметров: число точек по времени $K = 100\,000$, $\rho = 19$ мм, $\omega_{\xi 0} = \omega_{\eta 0} = 0$, $\omega_{\sigma 0} = 80$ рад/с, $\gamma_{\xi 0} = 0$, $\gamma_{\eta 0} = 0,5$, $\gamma_{\sigma 0} = 0,867$. Для траекторий 1–3 $v_{\xi 0} = v_{\eta 0} = v_{\sigma 0} = 0$, для траекторий 4–6 $v_{\xi 0} = 0,002$ м/с, $v_{\eta 0} = 0,003$ м/с, $v_{\sigma 0} = 0$. Для кривых 1, 4 – $a = 3$ мм; 2, 5 – $a = 6$ мм; 3, 6 – $a = 9$ мм

Заключение. В работе рассмотрена модель волчка тип-топ на основе уравнений нелинейной динамики, включая силу трения скольжения и момент сопротивления воздуха. Показано в векторном виде, что интеграл Джелетта в данной модели имеет место только в случае отсутствия момента сил сопротивления воздуха. Численно решена задача для скольжения волчка по абсолютно гладкой поверхности в подвижной системе отсчета. Показано, что выбор метода численного интегрирования системы уравнений (11) (Эйлера или Рунге – Кутты) существенно сказывается на точности решения. Получены различные траектории точки касания волчка горизонтальной плоскости при его движении в зависимости от его характеристик и начальных условий движения.

Список литературы

1. Карапетян А. В. Глобальный качественный анализ динамики китайского волчка (тип-топ) // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2008. Т. 43, № 3. С. 33–41.
2. Карапетян А. В., Муницына М. А. Динамика волчка тип-топ при вязком трении // Труды МФТИ. 2021. Т. 13, № 1. С. 114–121.
3. Маркеев А. П. К динамике волчка // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1984. № 3. С. 30–38.
4. Карлович Т. Б., Ласовский Р. Н. Исследование кинетических характеристик волчка tip-top с горизонтальной поверхностью при его движении // Информационные технологии: материалы докл. 88-й науч.-техн. конф. проф.-преподават. состава, науч. сотрудников и аспирантов (с междунар. участием), Минск, 29 янв. – 16 февр. 2024 г. Минск: БГТУ, 2024. С. 243–246. URL: <https://elib.belstu.by/bitstream/123456789/67770/1/3.%20Карлович.pdf> (дата обращения: 05.09.2025).
5. Карлович Т. Б., Васеха А. П., Ласовский Р. Н. Экспериментальное исследование траектории точки касания волчка тип-топ с горизонтальной поверхностью при его движении // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2024. № 2 (284). С. 19–24.
6. Раус Э. Дж. Динамика системы твердых тел / под ред. Ю. А. Архангельского и В. Г. Демина. М.: Наука, 1983. Т. 2. 544 с.
7. Килин А. А. Динамика шара Чаплыгина в абсолютном пространстве // Неголономные динамические системы: Интегрируемость, хаос, странные аттракторы: сб. ст. М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исследований, 2002. С. 76–98.

References

1. Karapetyan A. V. Global quality analysis of Chinese spinning top (tippe top) dynamics. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela* [Proceedings of the Russian Academy of Sciences Solid State Dynamics], 2008, vol. 43, no. 3, pp. 33–41 (In Russian).
2. Karapetyan A. V., Munitsyna M. A. Dynamics of a tip-top with viscous friction. *Trudy MFTI* [Proceedings of MFTI], 2021, vol. 13, no. 1, pp. 114–121 (In Russian).
3. Markeev A. P. To the dynamics of a top. *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela* [Izvestiya Academy of Sciences of the USSR. Mechanics TV bodies], 1984, no. 3, pp. 30–38 (In Russian).
4. Karlovich T. B., Lasovsky R. N. Study of kinetic characteristics of tip-top with horizontal surface during its movement. *Informatsionnyye tekhnologii: materialy докладov 88-y nauchno-tekhnicheskoy konferentsii professorsko-prepodavatel'skogo sostava, nauchnykh sotrudnikov i aspirantov (s mezhdunarodnym uchastyem), Minsk, 29 yanvarya – 16 fevralya 2024 g.* [Information technologies: materials] of reports of the 88th scientific and technical conference of faculty, researchers and postgraduate students (with international participation), Minsk, January 29 – February 16, 2024. Minsk, BGTU, 2024, pp. 243–246. Available at: <https://elib.belstu.by/bitstream/123456789/67770/1/3.%20Карлович.pdf> (accessed 05.09.2025) (In Russian).
5. Karlovich T. B., Vasekha A. P., Lasovsky R. N. Experimental study of the trajectory of the point of contact of a tip-top with a horizontal surface during its movement. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], issue 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2024, no. 2 (284), pp. 19–24 (In Russian).
6. Routh E. J. Dynamics of a system of rigid bodies. V. 2. Ed. Yu. A. Arkhangelsky and V. G. Demin. Moscow, Nauka Publ., 1983. 544 p. (In Russian).
7. Kilin A. A. Dynamics of Chaplygin sphere in absolute space *Negolonomnyye dinamicheskiye sistemy: Integriruyemost', khaos, strannyye attraktory* [Nonholonomic dynamical systems: chaos, integrability, chaos, strange attactors]. Moscow; Izhevsk, In-t komp'yuter. issledovaniy, 2002, pp. 76–98 (In Russian).

Информация об авторах

Карлович Татьяна Борисовна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры механики и конструирования. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: tbkar@mail.ru

Карлович Алексей Олегович – инженер-программист ООО «Вирма» (ул. Казинца, 4, 220099, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: aleksei.karlovich@gmail.com

Information about the authors

Karlovich Tatyana Borisovna – PhD (Physics and Mathematics), Assistant Professor, the Department of Mechanics and Design. Belarusian State Technological University (13a Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: tbkar@mail.ru

Karlovich Aleksei Olegovich – software engineer. LLC “Virma” (4 Kazintsa str., 220099, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: aleksei.karlovich@gmail.com

Поступила 14.05.2025

ФИЗИКА PHISICS

УДК 535.34+535.35+535.372

Д. Н. Пискунович, А. Б. Крылов, Н. Н. Крук

Белорусский государственный технологический университет

ТЕМПЕРАТУРНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ КИСЛОТНО-ОСНОВНЫХ СВОЙСТВ 5,10,15,20-ТЕТРАКИС-(4-ТРИМЕТИЛАМИНОФЕНИЛ)-ПОРФИРИНА

Методами абсорбционной и люминесцентной спектроскопии исследована температурная зависимость кислотно-основных равновесий в ядре макроцикла 5,10,15,20-тетракис-(4-триметиламинофенил)-порфирина в водных растворах. Показано, что дважды протонированная форма порфирина формируется в результате последовательного присоединения двух протонов. С использованием метода титрования на двух длинах волн определены соответствующие константы основности $pK_{a3} = 3,55 \pm 0,1$ и $pK_{a4} = 2,85 \pm 0,1$ для двух стадий протонирования при температуре 293 К. Обнаружено, что с ростом температуры кислотно-основное равновесие сдвигается в сторону образования свободного основания, причем изменение константы основности ΔpK_{a4} составляет $-0,4 \pm 0,1$ в диапазоне температур 293–323 К. Установлено, что стабилизация свободного основания порфирина с ростом температуры обусловлена различиями величины энергии активации процессов диссоциации и связывания протонов. В исследованном температурном диапазоне энтальпия присоединения протонов $\Delta H = 2600 \pm 100 \text{ см}^{-1}$ остается постоянной, в то время как энтальпия депротонирования зависит от температуры и составляет $2150 \pm 150 \text{ см}^{-1}$ и $670 \pm 100 \text{ см}^{-1}$ соответственно при температурах ниже 296 К и выше 320 К. Предложено, что уменьшение энтальпии депротонирования с ростом температуры обусловлено изменениями структуры сетки водородных связей в водном растворе, которые благоприятствуют сольватации диссоциированного протона.

Ключевые слова: порфирин, основность, спектры, температурная зависимость, сольватация.

Для цитирования: Пискунович Д. Н., Крылов А. Б., Крук Н. Н. Температурная зависимость кислотно-основных свойств 5,10,15,20-тетракис-(4-триметиламинофенил)-порфирина // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2025. № 2 (296). С. 27–32.

DOI: 10.52065/2520-6141-2025-296-5.

D. N. Piskunovich, A. B. Krylov, M. M. Kruk

Belarusian State Technological University

TEMPERATURE DEPENDENCE OF ACID-BASE PROPERTIES OF 5,10,15,20-TETRAKIS-(4-TRIMETHYLAMINOPHENYL)-PORPHYRINE

The temperature dependence of the acid-base equilibria in the macrocycle core of the 5,10,15,20-tetrakis-(4-trimethylaminophenyl)-porphyrine in aqueous solutions was studied using absorption and luminescence spectroscopy. It was shown that the doubly protonated form of the porphyrin results from the sequential binding of two protons. Using the method of titration at two wavelengths, the respective basicity constants $pK_{a3} = 3.55 \pm 0.1$ and $pK_{a4} = 2.85 \pm 0.1$ for two protonation stages have been evaluated at the temperature 293 K. It was found that with increasing temperature, the acid-base equilibrium shifts in the direction of the formation of the free base, with the change in the basicity constant ΔpK_{a4} of -0.4 ± 0.1 in the temperature range from 293 to 323 K. It was found that the stabilization of the free base form of porphyrin with increasing temperature is due to a change in the activation energies of the dissociation and the binding of protons. In the studied temperature range, the enthalpy of the proton binding $\Delta H = 2600 \pm 100 \text{ cm}^{-1}$ remains constant, while the enthalpy of deprotonation depends on the temperature and is $2150 \pm 150 \text{ cm}^{-1}$ and $670 \pm 100 \text{ cm}^{-1}$ at temperatures lower than 296 K and higher than 320 K respectively. It is assumed that a decrease in the enthalpy of deprotonation with increasing temperature is due to the changes in the structure of hydrogen bonds network in aqueous solution which favor the solvation of the dissociated proton.

Keywords: porphyrin, basicity, spectra, temperature dependence, solvation.

For citation: Piskunovich D. N., Krylov A. B., Kruk M. M. Temperature dependence of acid-base properties of the 5,10,15,20-tetrakis-(4-trimethylaminophenyl)-porphine. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2025, no. 2 (296), pp. 27–32 (In Russian).

DOI: 10.52065/2520-6141-2025-296-5.

Введение. Протонирование атомов азота в ядре тетрапиррольного макроцикла протекает в две стадии (рис. 1), причем константы основности для присоединения третьего и четвертого протонов pK_{a3} и pK_{a4} существенно зависят от архитектуры периферического замещения макроцикла [1]. Для C_b -замещенных порфиринов в кривой кислотно-основного титрования наблюдаются две отчетливые ступени, в то время как для C_m -замещенных порфиринов, которые не имеют стерических ограничений на вращение арильных фрагментов вокруг связи C_m-C_1 , величины pK_{a3} и pK_{a4} , как правило, очень близки, что не позволяет разрешить в кривой титрования две отдельные стадии [2, 3]. Вместе с тем отмечено, что в зависимости от особенностей сольватации молекулы порфирина в определенных растворителях протонирование C_m -арил-замещенных порфиринов может происходить либо в одну стадию с одновременным присоединением двух протонов, либо путем присоединения протонов в двух последовательных стадиях [4]. Водные растворы представляют собой удобную систему для исследования особенностей сольватации молекул порфиринов по причине высокой сольватирующей способности [5], сосуществования жесткой упорядоченной и конформационно подвижной разупорядоченной сеток водородных связей, соотношение которых зависит от температуры [6], выраженной температурной зависимости диэлектрической проницаемости воды от температуры [7].

Ранее нами были исследованы особенности сольватации гидрофильных порфиринов в водных растворах и установлена взаимосвязь между электронными характеристиками периферических заместителей и основностью макроцикла, показано, что кислотно-основное равновесие в нижнем возбужденном синглетном S_1 состоянии смещается относительно основного S_0 состояния, а величина смещения определяется природой периферических заместителей и макроциклических гетероатомов [8, 9]. При этом было отмечено, что

роль мезомерных и индуктивных эффектов периферических заместителей в формировании кислотно-основных характеристик гидрофильных порфиринов существенно различается.

Поэтому представляет интерес исследовать температурную зависимость кислотно-основных свойств 5,10,15,20-тетракис-(4-триметиламинофенил)-порфирина (рис. 2) и сопоставить результаты с ранее полученными для 5,10,15,20-тетракис-(4-сульфonatoфенил)-порфирина. Триметиламиногруппа $N^+(CH_3)_3$ и сульфогруппа SO_3^- являются электроноакцепторными, но электронные эффекты триметиламиногруппы имеют исключительно индуктивную природу (индуктивная константа Гаммета равна $\sigma_I = 0,88$ [10], а резонансная константа $\sigma_R \equiv 0$), в то время как сульфогруппа имеет отличные от нуля как резонансную, так и индуктивную константы Гаммета, равные соответственно $\sigma_R = 0,04$ и $\sigma_I = 0,05$ [10]. Полученные результаты позволят углубить представления о роли периферического замещения и температуры в формировании кислотно-основных характеристик гидрофильных порфиринов.

Основная часть. Спектры поглощения 5,10,15,20-тетракис-(4-триметиламинофенил)-порфирина, иллюстрирующие характер спектральных изменений в зависимости от pH раствора при 293 К, приведены на рис. 2. Анализ спектральных изменений показывает, что при увеличении pH уменьшается поглощение дважды протонированной формы, которая имеет максимум длинноволновой полосы поглощения при 640 нм, и растет поглощение свободного основания, которое имеет наиболее интенсивную полосу поглощения с максимумом при 515 нм. Следует отметить отсутствие изобестической точки в измеренной серии спектров, что указывает на последовательный характер присоединения/диссоциации протонов с образованием монопротонированной формы в заметной концентрации. Нами также измерены серии спектров поглощения при температурах 308 и 323 К (не показаны), которые обнаружили аналогичные изменения.

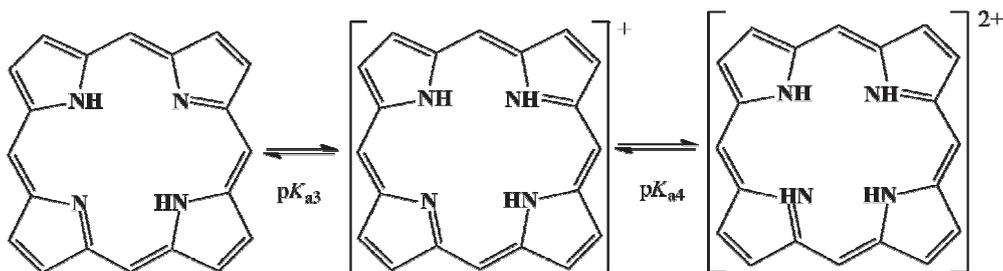


Рис. 1. Кислотно-основные равновесия свободного основания порфирина и его моно- и дважды протонированных форм. Периферические заместители не показаны

При последовательном присоединении протонов зависимость концентрации дважды протонированной формы от pH будет главным образом отражать равновесие между моно- и дважды протонированной формами, а зависимость концентрации свободного основания от pH – равновесие между монопротонированной формой и свободным основанием. Поэтому кривые спектрофотометрического титрования (рис. 3), построенные по поглощению на соответствующих длинах волн (дважды протонированная форма ↔ монопротонированная форма, $\lambda = 640$ нм; монопротонированная форма ↔ свободное основание, $\lambda = 515$ нм), должны различаться.

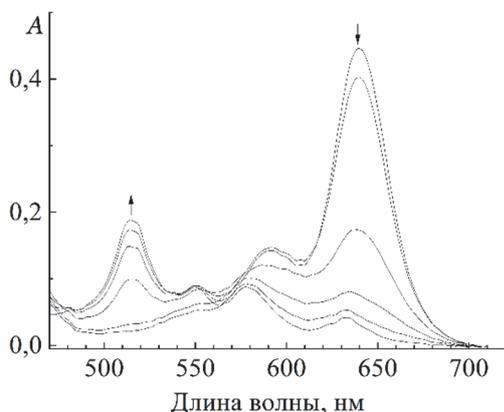


Рис. 2. Спектры поглощения 5,10,15,20-тетракис-(4-триметиламинофенил)-порфирина в водных растворах в диапазоне pH 2,0–4,5 при 293 К. Стрелки указывают направление спектральных изменений при увеличении pH

На кривых титрования (рис. 3) выделить в явном виде две стадии не представляется возможным, что указывает на близость значений констант основности pK_{a3} и pK_{a4} . Однако рассчитанная по уравнению Хендерсона – Хассельбалха величина обобщенной константы $pK_{a3,4}$ для присоединения двух протонов оказалась различной для двух кривых титрования. На длине волны титрования 515 нм рассчитанные значения $pK_{a3,4}$ обнаружили систематически больше значений $pK_{a3,4}$, рассчитанных по кривой титрования на длине волны 640 нм во всем температурном диапазоне (таблица). Очевидно, что это различие является проявлением двух последовательных стадий протонирования.

Величина обобщенной константы основности $pK_{a3,4}$, определенная по кривым спектрофотометрического титрования на длинах волн 515 и 640 нм при различных температурах

T, К	$pK_{a3,4}$	
	$\lambda = 640$ нм	$\lambda = 515$ нм
293	$2,85 \pm 0,1$	$3,05 \pm 0,1$
308	$2,70 \pm 0,1$	$2,85 \pm 0,1$
323	$2,50 \pm 0,1$	$2,65 \pm 0,1$

Для определения близких констант основности pK_{a3} и pK_{a4} известен метод, базирующийся на совместном анализе кривых титрования, измеренных на двух длинах волн, на которых наблюдается соответственно рост и убыль начальной и конечной форм [11]. При анализе используют только экспериментальные точки на краях кривых титрования, которые преимущественно отражают равновесия соответственно между моно- и дважды протонированной формами и между свободным основанием и монопротонированной формой. С использованием данного метода для кривых титрования, измеренных при 293 К, вычислены константы основности $pK_{a3} = 3,55 \pm 0,1$ и $pK_{a4} = 2,85 \pm 0,1$. Заслуживает внимания то, что полученные значения констант основности pK_{a4} и обобщенной константы основности $pK_{a3,4}$ в пределах ошибки равны. По-видимому, это обусловлено относительно небольшим вкладом монопротонированной формы в поглощение раствора (малой концентрацией) и слабыми отличиями спектров поглощения моно- и дважды протонированной форм. Поэтому изменение величины обобщенной константы основности $pK_{a3,4} = -0,4 \pm 0,1$ при увеличении температуры раствора от 293 до 323 К можно отнести к изменению величины константы основности на второй стадии протонирования ΔpK_{a4} .

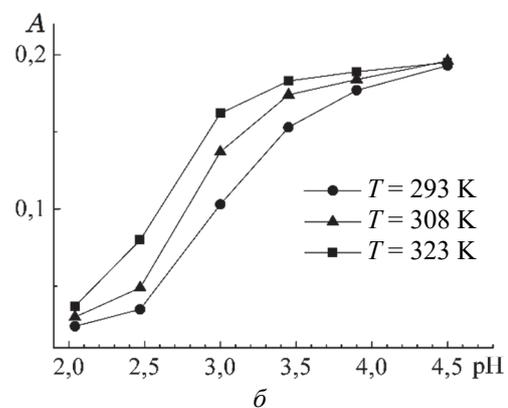
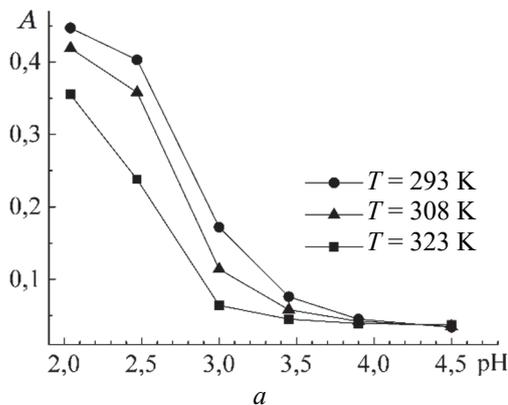


Рис. 3. Кривые спектрофотометрического титрования 5,10,15,20-тетракис-(4-триметиламинофенил)-порфирина: а – $\lambda = 640$ нм; б – $\lambda = 515$ нм

Очевидно, что зависимость кислотно-основного равновесия от температуры обусловлена тем, что процессы протонирования и депротонирования имеют активационный характер. Для определения энтальпии реакции была измерена температурная зависимость спектров поглощения раствора порфирина при $\text{pH} = 3,0$ (рис. 4). Рост температуры от 288 К до 328 К приводит к падению поглощения дважды протонированной формы и увеличению поглощения свободного основания порфирина. Температурные зависимости поглощения на соответствующих длинах волн (640 и 515 нм) должны различаться, чтобы обеспечить изменение отношения констант скоростей протонирования и диссоциации протонов.

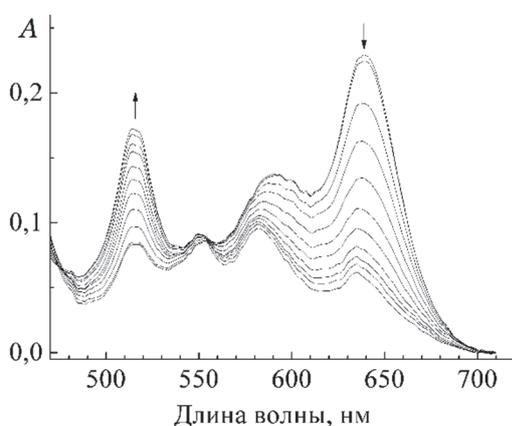
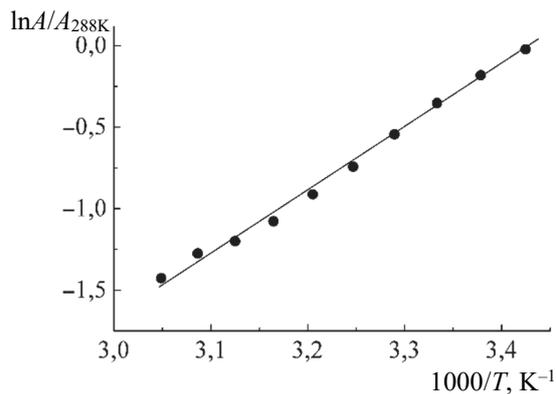
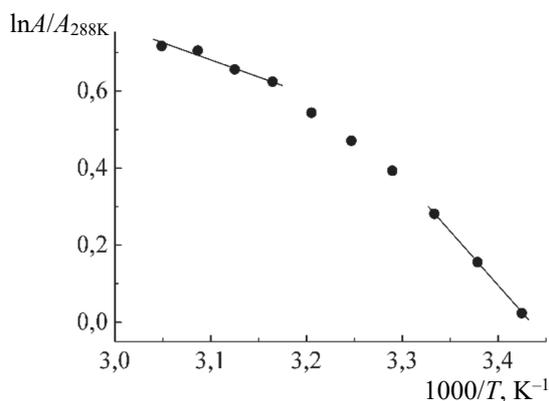


Рис. 4. Спектры поглощения 5,10,15,20-тетраakis-4-триметиламинофенил-порфирина в растворе с $\text{pH} = 3,0$ в диапазоне температур 288–328 К

Действительно, графики Вант-Гоффа, построенные для поглощения на этих длинах волн, существенно различаются. График Вант-Гоффа, построенный по поглощению при 640 нм, линейаризуется во всем температурном диапазоне (рис. 5, а), что указывает на постоянство величины энтальпии ΔH , равной $2600 \pm 100 \text{ см}^{-1}$. Очевидно, что конформационные перестройки молекулярной конформации при присоединении протонов в ядре макроцикла порфирина протекают одинаковым образом при различных температурах, а это можно связать с тем, что энергия протонирующего деформационного колебания для формирования седлообразного конформера макроцикла дважды протонированной формы составляет всего 65 см^{-1} , что намного меньше величины kT . Изменение структуры сольватной оболочки молекулы порфирина при изменении температуры, обусловленное перестройками сетки водородных связей воды [6], также не оказывает заметного влияния на величину энтальпии активации.



а



б

Рис. 5. Графики Вант-Гоффа для кислотно-основных равновесий 5,10,15,20-тетраakis-4-триметиламино-фенил-порфирина: а – $\lambda = 640 \text{ нм}$; б – $\lambda = 515 \text{ нм}$

Напротив, график Вант-Гоффа, построенный по поглощению при 515 нм имеет выраженную выпуклость по отношению к оси абсцисс. Очевидно, что при высоких и низких температурах факторы, которые определяют константу скорости диссоциации протонов, различаются. Так, при температурах ниже 296 К и выше 320 К зависимость Вант-Гоффа удовлетворительно описывается линейными функциями, что позволило определить величину энтальпии ΔH реакции диссоциации протонов, равную $670 \pm 100 \text{ см}^{-1}$ и $2150 \pm 150 \text{ см}^{-1}$ соответственно при температурах ниже 296 К и выше 320 К (рис. 5, б). По-видимому, чтобы сольватировать протоны после диссоциации, требуются значительные энергетические затраты на перестройку структурированной сети водородных связей воды, которые различаются при высоких и низких температурах.

Заключение. Таким образом, в результате исследования установлено, что дважды протонированная форма 5,10,15,20-тетраakis-(4-триметиламинофенил)-порфирина формируется в результате последовательного присоединения двух протонов. Установлено, что с ростом температуры

кислотно-основное равновесие смещается в сторону стабилизации свободного основания порфирина, что обусловлено различиями величины энтальпии диссоциации и связывания протонов. В температурном диапазоне 288–328 К энтальпия присоединения протонов $\Delta H = 2600 \pm 100 \text{ см}^{-1}$ остается постоянной, в то время как для реакции депротонирования она зависит от температуры и составляет $2150 \pm 150 \text{ см}^{-1}$ и $670 \pm 100 \text{ см}^{-1}$ соответственно при температурах ниже 296 К и выше 320 К. Предложено, что в основе данных

различий лежат процессы специфической сольватации, вызванные существованием структурированной сети водородных связей воды, в результате чего сольватация происходит по-разному в зависимости от температуры.

Работа выполнена при финансовой поддержке Государственной программы научных исследований Республики Беларусь «Конвергенция – 2025» (подпрограмма «Междисциплинарные исследования и новые зарождающиеся технологии», задание шифр 3.03.10 (НИР 2)).

Список литературы

1. Андрианов В. Г., Малкова О. В., Березин Д. Б. Кислотно-основные свойства порфиринов // Успехи химии порфиринов: в 5 т. / под ред. О. А. Голубчикова. СПб., 2001. Т. 3. С. 107–129.
2. Kruk M. M., Starukhin A. S., Maes W. Influence of macrocycle protonation on the photophysical properties of porphyrins // *Macroheterocycles*. 2011. Vol. 4, no. 2. P. 69–79.
3. Крук Н. Н. Структура и оптические свойства тетрапиррольных соединений. Минск: БГТУ, 2019. 216 с.
4. Ivanova Yu. B., Semeikin A. S., Mamardashvili N. Zh. Effect of macrocycle chemical modification on the tetraphenylporphyrin basic properties // *Russ. Journ. Gen. Chem.* 2009. Vol. 4, no. 2. P. 69–79.
5. Cattenecio A., Dariuch Y., Magallanes C. Temperature dependence of the permittivity of water // *Chem. Phys. Lett.* 2003. Vol. 367, no. 5–6. P. 669–671.
6. Okajima H., Ando M., Hamaguchi H. Formation of “Nano-Ice” and Density Maximum Anomaly of Water // *Bull. Chem. Soc. Jpn.* 2018. Vol. 91, no. 6. P. 991–997.
7. Akerlöf G. Dielectric Constants of Some Organic Solvent-Water Mixtures at Various Temperatures // *J. Am. Chem. Soc.* 1932. Vol. 54, no. 11. P. 4125–4139.
8. Шакель А. Ю., Мельник А. Д., Крук Н. Н. Основность порфиринов в нижнем возбужденном синглетном S_1 состоянии: роль периферического замещения и строения макрогетероцикла // *Журн. прикл. спект.* 2024. Т. 91, № 3. С. 327–334.
9. Климович П. Г., Крылов А. Б., Крук Н. Н. Спектральные проявления специфической сольватации 5,10,15,20-тетракис-(4-сульфонатофенил)-порфирина и его дважды протонированной формы в водных растворах // *Журн. прикл. спект.* 2021. Т. 88, № 1. С. 25–33.
10. Murov S. L., Carmichael I., Hug G. L. Handbook of photochemistry. New-York: Marcel Dekker, 1993. 420 p.
11. Берштейн И. Я., Каминский Ю. Л. Спектрофотометрический анализ в органической химии. М.: Химия, 1986. 200 с.

References

1. Andrianov V. G., Malkova O. V., Berezin D. B. Acid-base properties of porphyrins. *Uspekhi khimii porfirinov* [Advances in Porphyrin Chemistry]. Ed. by O. A. Golubchikov. St. Petersburg, 2001, vol. 3, pp. 107–129 (In Russian).
2. Kruk M. M., Starukhin A. S., Maes W. Influence of macrocycle protonation on the photophysical properties of porphyrins. *Macroheterocycles*, 2011, vol. 4, no. 2, pp. 69–79.
3. Kruk M. M. *Stroyeniye i opticheskiye svoystva tetrapirrol'nykh soyedineniy* [Structure and optical properties of tetrapyrrolic compounds]. Minsk, BGTU Publ., 2019. 216 p. (In Russian).
4. Ivanova Yu. B., Semeikin A.S., Mamardashvili N. Zh. Effect of macrocycle chemical modification on the tetraphenylporphyrin basic properties. *Russ. Journ. Gen. Chem.*, 2009, vol. 4, no. 2, pp. 69–79.
5. Cattenecio A., Dariuch Y., Magallanes C. Temperature dependence of the permittivity of water. *Chem. Phys. Lett.*, 2003, vol. 367, no. 5–6, pp. 669–671.
6. Okajima H., Ando M., Hamaguchi H. Formation of “Nano-Ice” and Density Maximum Anomaly of Water. *Bull. Chem. Soc. Jpn.*, 2018, vol. 91, no. 6, pp. 991–997.
7. Akerlöf, G. Dielectric Constants of Some Organic Solvent-Water Mixtures at Various Temperatures. *J. Am. Chem. Soc.*, 1932, vol. 54, no. 11, pp. 4125–4139.
8. Shakel A. Yu., Melnik A.D., Kruk M. M. Porphyrins basicity in the lowest singlet S_1 state: the role of peripheral substitution and macroheterocycle structure. *Journ. Appl. Spectr.*, 2024, vol. 91, issue 3, pp. 489–495.
9. Klimovich P. G., Krylov A. B., Kruk M.M. Spectral manifestations of specific solvation of the 5,10,15,20-tetrakis-(4-sulfonatophenyl)-porphyrin and its doubly protonated form in water solutions. *Journ. Appl. Spectr.*, 2021, vol. 88, issue 1, pp. 19–26 (In Russian).

10. Murov S. L., Carmichael I., Hug G. L. Handbook of photochemistry. New-York, Marcel Dekker Publ., 1993. 420 p.

11. Bernshtein I. Ya., Kaminskii Yu. L. *Spektrofotometricheskii analiz v organicheskoy khimii* [Spectrophotometric analysis in organic chemistry]. Moscow, Khimiya Publ., 1986. 216 p. (In Russian).

Информация об авторах

Пискунович Дарья Николаевна – студентка. Белорусский государственный технологический университет (ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: daryapisk@gmail.com

Крылов Андрей Борисович – кандидат биологических наук, доцент, доцент кафедры физики. Белорусский государственный технологический университет (ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: krylov_ab@belstu.by

Крук Николай Николаевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой физики. Белорусский государственный технологический университет (ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: m.kruk@belstu.by

Information about the authors

Piskunovich Darya Nikolaevna – student. Belarusian State Technological University (13a Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: daryapisk@gmail.com

Krylov Andrei Borisovich – PhD (Biology), Associate Professor, Assistant Professor the Department of Physics. Belarusian State Technological University (13a Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: krylov_ab@belstu.by

Kruk Mikalai Mikalaevich – DSc (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Department of Physics. Belarusian State Technological University (13a Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: m.kruk@belstu.by

Поступила 30.04.2025

УДК 535.34+535.35+535.372

Д. В. Кленецкий¹, Л. Л. Гладков², С. А. Сырбу³, Н. Н. Крук¹¹Белорусский государственный технологический университет²Белорусская государственная академия связи³Ивановский государственный химико-технологический университет
(г. Иваново, Российская Федерация)**ПРИРОДА УШИРЕНИЯ ПОЛОС ПОГЛОЩЕНИЯ
NO₂-ЗАМЕЩЕННОГО ПОРФИРИНА**

Методами квантовой химии изучены особенности формирования спектра поглощения свободного основания порфирина при замещении двух диаметрально противоположных C_m-положений макроцикла NO₂-группами. Показано, что равновесное значение двугранных углов между плоскостью макроцикла и плоскостями нитрогрупп составляет ~46°, однако способность нитрогрупп вращаться относительно C–N связи обуславливает возможность формирования в растворах семейства конформеров с различной ориентацией нитрогрупп относительно плоскости макроцикла. Установлено, что максимумы полос S₀→S₁ и S₀→S₂ поглощения, а также силы их осцилляторов зависят от величины двугранных углов φ₅ и φ₁₅ между плоскостью макроцикла и плоскостями нитрогрупп. Длина волны максимума S₀→S₁ перехода и сила осциллятора перехода минимальны при ортогональном расположении нитрогрупп относительно плоскости макроцикла и максимальны, когда они копланарны. Длина волны максимума S₀→S₂ перехода также увеличивается при уменьшении двугранного угла между плоскостью макроцикла и плоскостями нитрогрупп, однако зависимость силы осциллятора перехода от величины двугранных углов φ₅ и φ₁₅ имеет сложный вид. Сила осциллятора S₀→S₂ перехода наибольшая у конформера с перпендикулярным расположением обеих нитрогрупп относительно плоскости макроцикла, минимальная, когда одна из нитрогрупп перпендикулярна плоскости макроцикла, при этом другая копланарна, а при копланарном расположении макроцикла и обеих нитрогрупп наблюдаются локальные максимумы. Предложено, что обнаруженные закономерности приводят к значительному неоднородному уширению полос в спектре поглощения NO₂-замещенного порфирина в растворах.

Ключевые слова: порфирин, NO₂-замещение, спектр поглощения, сила осциллятора, уширение полосы поглощения.

Для цитирования: Кленецкий Д. В., Гладков Л. Л., Сырбу С. А., Крук Н. Н. Природа уширения полос поглощения NO₂-замещенного порфирина // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2025. № 2 (296). С. 33–39.

DOI: 10.52065/2520-6141-2025-296-6.

D. V. Klenitsky¹, L. L. Gladkov², S. A. Syrbu³, M. M. Kruk¹¹Belarusian State Technological University²Belarusian State Academy of Communications³Ivanovo State University of Chemistry and Technology (Ivanovo, Russia)**ORIGIN OF BROADENING OF THE ABSORPTION BANDS
OF NO₂-SUBSTITUTED PORPHYRIN**

Quantum chemistry methods were applied to study the peculiarities of the absorption spectrum formation of the free base porphyrin substituted with NO₂ groups in two diametrically opposite C_m-positions of the macrocycle. It was shown that the equilibrium value of the dihedral angles between the macrocycle plane and the nitro group planes is ~46°, but the ability of the nitro groups to rotate relative to the C–N bond makes it possible to form a family of conformers with different orientations of the nitro groups relative to the macrocycle plane in solutions. It was found that the maxima of the S₀→S₁ and S₀→S₂ absorption bands, as well as their oscillator strengths depend on the values of the dihedral angles φ₅ and φ₁₅ between the macrocycle plane and the nitro group planes. The wavelength of the maximum of the S₀→S₁ transition and its oscillator strength are minimal when the nitro groups are orthogonal to the macrocycle plane and maximal when they are coplanar. The wavelength of the maximum of the S₀→S₂ transition also increases with a decrease in the dihedral angle between the macrocycle plane and the planes of the nitro groups, but the dependence of the oscillator strength on the value of the dihedral angles φ₅ and φ₁₅ is complex. The oscillator strength of the S₀→S₂ transition is greatest for the conformer with a perpendicular arrangement of both nitro groups relative to the macrocycle plane, minimal when one of the nitro groups is perpendicular to the macrocycle plane, while the other is coplanar, and local maxima are observed when the macrocycle

and both nitro groups are coplanar. It is proposed that the revealed regularities lead to a significant nonhomogenous broadening of bands in the absorption spectrum of NO₂-substituted porphyrin in solutions.

Keywords: porphyrin, NO₂-substitution, absorption spectrum, oscillator strength, broadening of the absorption band.

For citation: Klenitsky D. V., Gladkov L. L., Syrбу S. A., Kruk M. M. Origin of broadening of the absorption bands of NO₂-substituted porphyrin. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2025, no. 2 (296), pp. 33–39 (In Russian).

DOI: 10.52065/2520-6141-2025-296-6.

Введение. Одним из способов структурной модификации тетрапиррольного макроцикла является замещение протонов в C_m- и C_b-положениях макроцикла различными группами. Присоединение к макроциклу молекулярных фрагментов приводит, с одной стороны, к структурным изменениям (например, длин связей между скелетными атомами, углов между связями и др.), так и к перераспределению электронной плотности в макроцикле – с другой [1]. Во многих случаях структурные и электронные изменения взаимосвязаны между собой. Как следствие, трансформация структурных и электронных свойств может приводить к изменению положения молекулярных орбиталей, что в конечном счете изменяет фотофизические характеристики системы и ее спектрально-люминесцентные свойства. Изучение взаимосвязи молекулярной конформации и физико-химических свойств соединений представляет собой важную междисциплинарную научную задачу как с точки зрения углубления теоретических представлений, так и для решения конкретных практических задач. Структурные изменения и перераспределение электронной плотности в макроцикле зависят от места присоединения, строения и характера (электронодонорного либо электроакцепторного) заместителя.

Нитрогруппа (NO₂) является одним из сильных акцепторов электронной плотности, причем перераспределение электронной плотности осуществляется преимущественно по системе σ-связей (индуктивная константа Гаммета σ_I = 0,76 на порядок больше резонансной константы Гаммета σ_R = 0,07, которая характеризует перенос по π-связям [2]). Присоединение нитрогрупп к тетрапиррольному макроциклу приводит к bathochromному сдвигу в спектрах поглощения и флуоресценции, величина которого зависит от способа присоединения и количества присоединенных групп [3]. Одним из характерных спектральных проявлений при присоединении нитрогрупп непосредственно к скелетным атомам тетрапиррольного макроцикла является уширение полос в спектрах [4, 5]. В настоящей работе нами предпринята попытка объяснить природу уширения полос в спектрах поглощения нитрозамещенных производных порфиринов с позиций конформационной подвижности нитрогрупп.

В качестве объектов исследования выбраны свободное основание 5,15-динитро-10,20-дифенил-2,8,12,18-метил-3,7,13,17-этил-порфина (1), спектральные характеристики которого сопоставлялись с соответствующими характеристиками свободного основания 10,20-дифенил-2,8,12,18-метил-3,7,13,17-этил-порфина (2), синтезированные по известным методикам (рис. 1).

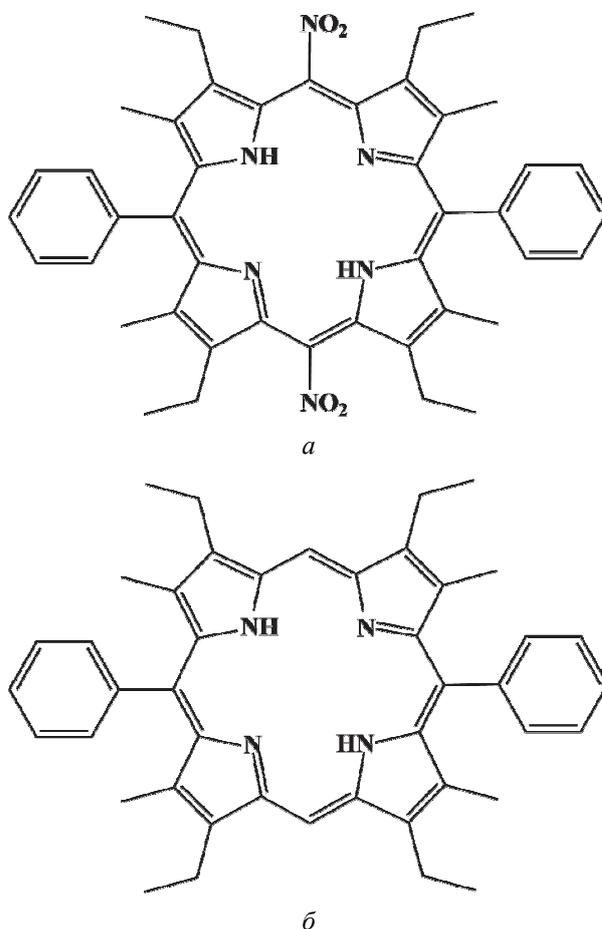


Рис. 1. Молекулярная структура исследованных соединений:
а – 5,15-динитро-10,20-дифенил-2,8,12,18-метил-3,7,13,17-этил-порфин (1); б – 10,20-дифенил-2,8,12,18-метил-3,7,13,17-этил-порфин (2)

Основная часть. На рис. 2 приведены электронные спектры поглощения для двух исследованных порфиринов. Сопоставление двух спектров показывает наличие большого bathochromного сдвига и уширения полос при нитрозамещении.

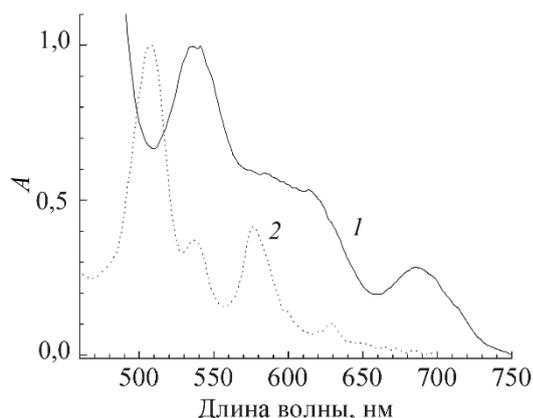


Рис. 2. Спектры поглощения 5,15-динитро-10,20-дифенил-2,8,12,18-метил-3,7,13,17-этил-порфина (1) и 10,20-дифенил-2,8,12,18-метил-3,7,13,17-этил-порфина (2) в толуоле

Так, максимумы полос порфирина **2** в видимой области спектра находятся при 629, 577, 537 и 508 нм, а у порфирина **1** они находятся при 687, 618, 584 и 537 нм. Происходит также значительное уширение полос, причем величина уширения заметно больше для длинноволнового $S_0 \rightarrow S_1$ перехода и его вибронного спутника по сравнению с уширением $S_0 \rightarrow S_2$ перехода. Одной из причин такого поведения с нашей точки зрения может быть зависимость влияния заместителя на сопряженную π -электронную систему макрогетероцикла от ориентации периферического заместителя. В растворах нитрогруппа может свободно вращаться относительно связи C-N и в результате формируется семейство конформеров, у которых электронная коммуникация между макроциклом и заместителями модулируется различной ориентацией последних.

С использованием программного пакета для квантовомеханических расчетов «Природа» [6] методом функционала плотности (DFT) с обменно-корреляционным функционалом PBE и трехэкспоненциальным базисом 3z была выполнена оптимизация молекулярной конформации макроцикла молекулы 5,15-динитро-порфина в основном синглетном S_0 -состоянии. Затем рассчитан спектр нормальных колебаний. Отсутствие мнимых частот колебательных мод служило критерием достижения стационарной точки. Для оптимизированной структуры рассчитывали энергию основного состояния, энергии молекулярных орбиталей, определяли длины связей и валентные углы между скелетными атомами макроцикла.

В оптимизированной структуре равновесные величины двугранных углов φ_5 и φ_{15} между плоскостью макроцикла и плоскостями нитрогрупп оказались практически одинаковыми и составили соответственно 46,1 и 46,9°. В отсутствие стерических ограничений на вращение нитро-

групп в растворах, мы, варьируя значения углов φ_5 и φ_{15} , рассчитали энергии электронных переходов молекулы (положения максимумов полос в спектрах поглощения) и их силы осцилляторов с использованием полуэмпирического метода ZINDO/S. При расчете молекулярную конформацию тетрапиррольного макроцикла оставляли неизменной и изменяли только величины углов φ_5 и φ_{15} . Ранее было показано, что присоединение нитрогрупп непосредственно к C_m -атому макроцикла приводит к существенным изменениям в электронной коммуникации в молекуле, в результате чего изменяются энергии электронных переходов и силы осцилляторов [7]. Следовательно, положение полос, а также силы осцилляторов для динитрозамещенных производных будут зависеть от величин двугранных углов φ_5 и φ_{15} между плоскостью макроцикла и плоскостями нитрогрупп.

В табл. 1 приведены положения максимума полосы поглощения длинноволнового $S_0 \rightarrow S_1$ перехода при различных значениях двугранных углов φ_5 и φ_{15} . В таблице выделены значения, полученные при равновесной величине одного из углов. Длина волны максимума полосы поглощения конформера с равновесными значениями двугранных углов φ_5 и φ_{15} равна 710,5 нм. Такое положение максимума полосы должно было наблюдаться при условии, что в растворе формируются только конформеры с равновесными значениями углов. Однако наличие в растворе конформеров с другими значениями двугранных углов приводит к спектральным сдвигам. При этом наименьшая длина волны максимума, равная 674,0 нм, наблюдается при ортогональном расположении нитрогрупп относительно плоскости макроцикла, а максимальная – 796,6 нм, когда плоскости обеих нитрогрупп и макроцикла копланарны.

Таблица 1

Длина волны (нм) максимума $S_0 \rightarrow S_1$ электронного перехода в зависимости от величины двугранных углов φ_5 и φ_{15}

$\varphi_5, ^\circ$	$\varphi_{15}, ^\circ$				
	0	30	46	60	90
0	796,6	766,8	749,7	736,8	721,0
30	766,0	738,9	723,9	712,8	698,9
46	748,9	723,8	710,5	701,0	689,0
60	736,7	713,3	701,4	693,1	682,7
90	720,6	699,2	689,1	682,5	674,0
120	737,5	714,3	702,4	694,2	683,9
160	780,7	752,3	736,3	724,4	709,6
180	796,7	766,8	749,7	736,8	721,0

На рис. 3 приведены зависимости длины волны максимума $S_0 \rightarrow S_1$ перехода от углов φ_5 и φ_{15} .

Зависимости являются симметричными относительно угла 90° как для угла φ_5 , так и для угла φ_{15} (в табл. 1 данные для углов φ_{15} от 90° до 180° не приведены). Такой характер угловой зависимости является следствием симметричного замещения нитрогруппами в C_m-положениях. Результаты указывают на существенные различия энергий электронных переходов соединений с различными углами φ_5 и φ_{15} .

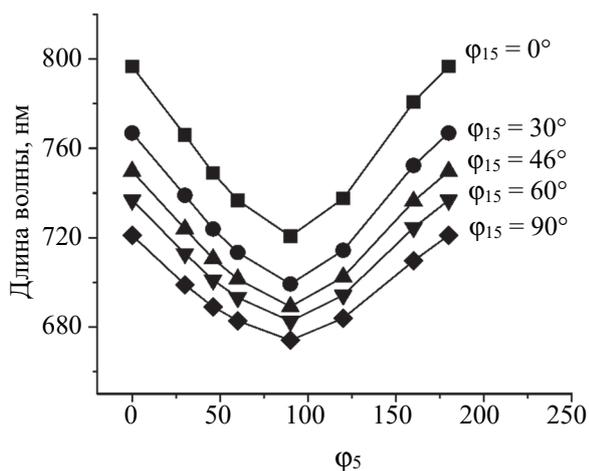


Рис. 3. Зависимость длины волны максимума $S_0 \rightarrow S_1$ перехода от угла φ_5 при различных значениях угла φ_{15}

Вклад отдельных конформеров в суммарный спектр поглощения определяется их относительной концентрацией и интенсивностью поглощения. В табл. 2 приведены рассчитанные значения силы осциллятора в зависимости от величины двухгранных углов φ_5 и φ_{15} (соответствующие графики приведены на рис. 4). Для конформера с равновесными значениями двухгранных углов φ_5 и φ_{15} сила осциллятора равна 0,144. Максимальная сила осциллятора 0,229 соответствует конформеру с $\varphi_5 = \varphi_{15} = 0^\circ$, а минимальная (меньшая почти в четыре раза) – 0,06 наблюдается у конформеров с $\varphi_5 = \varphi_{15} = 90^\circ$.

Таблица 2

Сила осциллятора $S_0 \rightarrow S_1$ электронного перехода в зависимости от величины двухгранных углов φ_5 и φ_{15}

$\varphi_5, ^\circ$	$\varphi_{15}, ^\circ$				
	0	30	46	60	90
0	0,229	0,212	0,194	0,177	0,158
30	0,212	0,191	0,168	0,149	0,127
46	0,193	0,168	0,144	0,123	0,1
60	0,177	0,15	0,124	0,103	0,081
90	0,158	0,128	0,101	0,08	0,06
120	0,177	0,15	0,124	0,103	0,081
160	0,221	0,202	0,182	0,164	0,143
180	0,229	0,212	0,194	0,177	0,158

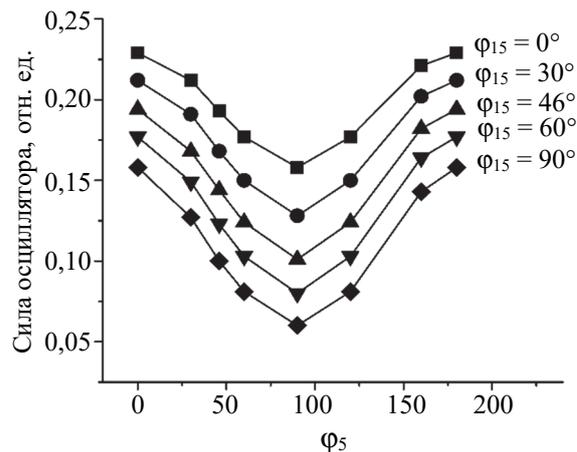


Рис. 4. Зависимость силы осциллятора $S_0 \rightarrow S_1$ перехода от угла φ_5 при различных значениях угла φ_{15}

Величина силы осциллятора симметрична относительно угла 90° как для угла φ_5 , так и для угла φ_{15} : чем больше отклонение от копланарного с плоскостью макроцикла расположения нитрогрупп, тем меньше сила осциллятора. Таким образом, изменение длины волны максимума $S_0 \rightarrow S_1$ перехода происходит синхронно с изменением силы осциллятора при варьировании двухгранных углов φ_5 и φ_{15} . Причем батохромный сдвиг полосы поглощения сопровождается возрастанием силы осциллятора перехода (рис. 5).

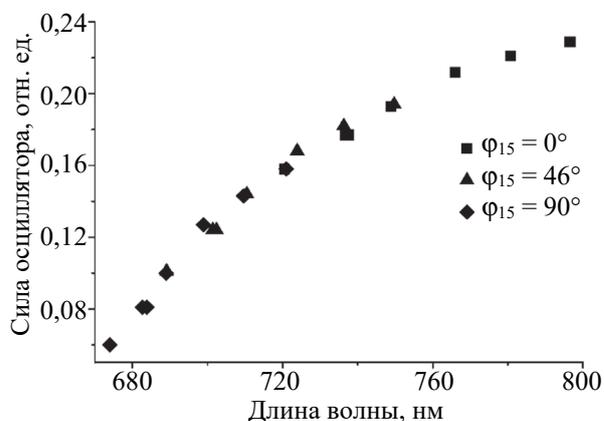


Рис. 5. Зависимость силы осциллятора $S_0 \rightarrow S_1$ перехода от длины волны максимума полосы поглощения при различных значениях угла φ_{15}

Следует отметить, что интервал изменения положения максимума полосы при отклонении двухгранного угла φ_5 (φ_{15}) от равновесного положения различается: при уменьшении φ_5 до 0° длина волны максимума смещается батохромно на 86 нм, в то время как при увеличении φ_5 до 90° она смещается гипсохромно на 36 нм. При этом сила осциллятора при батохромном смещении полосы возрастает примерно в 1,5 раза, а при гипсохромном смещении уменьшается примерно

в 2,5 раза. В спектре поглощения это должно проявляться как асимметричное уширение полосы поглощения, так как при равновероятном отклонении положения нитрогруппы от равновесного положения больший вклад в спектр внесут конформеры с батохромно смещенной полосой поглощения.

Аналогичные вычисления выполнены для второго электронного $S_0 \rightarrow S_2$ перехода. В табл. 3 и 4 приведены соответственно положения максимума полосы поглощения и силы осциллятора перехода при различных значениях двухгранных углов φ_5 и φ_{15} .

Таблица 3

Положение максимума $S_0 \rightarrow S_2$ перехода в зависимости от величины двухгранных углов φ_5 и φ_{15}

$\varphi_5, ^\circ$	$\varphi_{15}, ^\circ$				
	0	30	46	60	90
0	643,4	635,3	629,4	623,3	612,0
30	635,0	629,2	625,1	620,3	609,6
46	629,2	625,1	622,4	618,5	608,3
60	623,3	620,5	618,7	615,6	605,6
90	611,8	609,6	608,2	605,4	594,4
120	623,1	620,3	618,7	615,6	605,8
160	639,4	632,6	627,7	622,3	611,5
180	643,3	635,2	629,4	623,2	612,0

Таблица 4

Сила осциллятора $S_0 \rightarrow S_2$ перехода в зависимости от величины двухгранных углов φ_5 и φ_{15}

$\varphi_5, ^\circ$	$\varphi_{15}, ^\circ$				
	0	30	46	60	90
0	0,037	0,03	0,026	0,023	0,02
30	0,03	0,028	0,027	0,026	0,028
46	0,026	0,027	0,029	0,03	0,034
60	0,023	0,026	0,03	0,032	0,038
90	0,02	0,027	0,033	0,038	0,054
120	0,023	0,026	0,029	0,031	0,036
160	0,033	0,028	0,026	0,024	0,023
180	0,037	0,03	0,027	0,023	0,02

На рис. 6 показана зависимость длины волны максимума $S_0 \rightarrow S_2$ перехода от угла φ_5 при различных значениях угла φ_{15} . Как и в случае длинноволнового $S_0 \rightarrow S_1$ перехода, зависимость является симметричной относительно угла 90° как для угла φ_5 , так и для угла φ_{15} . Причем при углах φ_5 и φ_{15} , превышающих 60° , наблюдается резкое уменьшение длины волны до минимального значения. Конформер с равновесными значениями двухгранных углов φ_5 и φ_{15} обладает полосой поглощения с максимумом при 622,4 нм. Как и в случае длинноволнового $S_0 \rightarrow S_1$ перехода, максимальная длина волны максимума полосы 643,4 нм

наблюдается при копланарном расположении заместителей и макроцикла, а минимальная длина волны, равная 594,4 нм, соответствует конформеру с ортогональным расположением нитрогрупп относительно плоскости макроцикла. По сравнению с длинноволновым переходом диапазон изменения положения максимума $S_0 \rightarrow S_2$ перехода оказался в 2,5 раза меньше (49 нм против 122 нм).

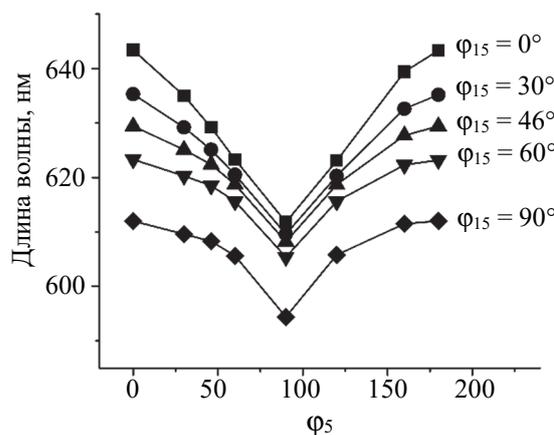


Рис. 6. Зависимость длины волны максимума $S_0 \rightarrow S_2$ перехода от угла φ_5 при различных значениях угла φ_{15}

Зависимость силы осциллятора $S_0 \rightarrow S_2$ перехода от величины двухгранных углов φ_5 и φ_{15} кардинально отличается от зависимости, полученной для $S_0 \rightarrow S_1$ перехода (рис. 7).

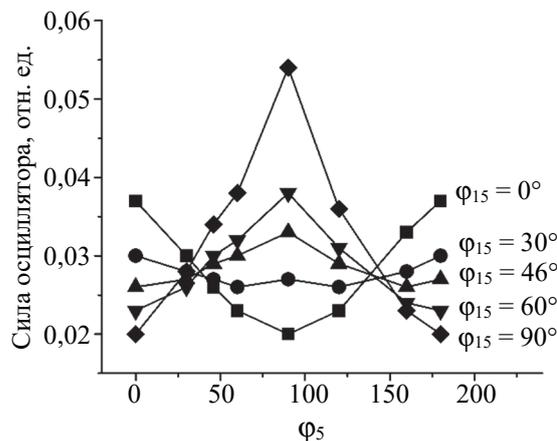


Рис. 7. Зависимость силы осциллятора $S_0 \rightarrow S_2$ перехода от угла φ_5 при различных значениях угла φ_{15}

Для конформера с равновесными значениями двухгранных углов φ_5 и φ_{15} сила осциллятора равна 0,029. Минимальная сила осциллятора 0,02 соответствует конформерам, у которых одна из нитрогрупп перпендикулярна плоскости макроцикла, а другая копланарна с ней. Максимальная сила осциллятора 0,054 имеет место у конформера с

перпендикулярным расположением обеих нитрогрупп относительно плоскости макроцикла.

По абсолютному значению максимальная сила осциллятора $S_0 \rightarrow S_2$ перехода приблизительно равна минимальной силе осциллятора длинноволнового $S_0 \rightarrow S_1$ перехода. Таким образом, при переходе от конформеров с копланарным расположением двух нитрогрупп сила осциллятора сначала уменьшается, а затем при определенных значениях углов φ_5 и φ_{15} начинает быстро возрастать, достигая максимального значения при ортогональном расположении обеих нитрогрупп.

На рис. 8 показаны графики зависимости силы осциллятора от длины волны максимума полосы поглощения для различных значений угла φ_{15} .

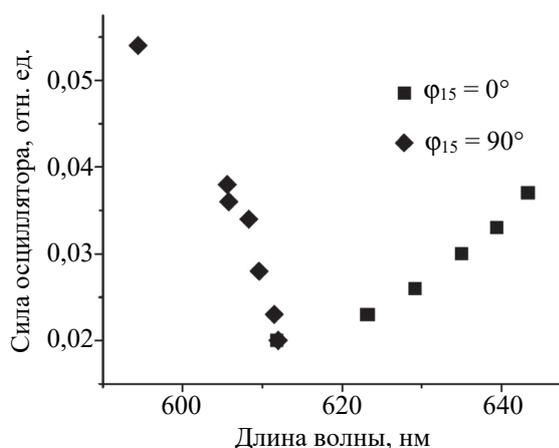


Рис. 8. Зависимость силы осциллятора $S_0 \rightarrow S_2$ перехода от длины волны максимума полосы поглощения при различных значениях угла φ_{15}

Очевидно, что зависимость силы осциллятора перехода от величины двухгранных углов φ_5 и φ_{15} имеет сложный вид.

Сила осциллятора $S_0 \rightarrow S_2$ перехода наибольшая у конформера с перпендикулярным расположением обеих нитрогрупп относительно плоскости макроцикла, минимальная, когда одна из нитрогрупп перпендикулярна плоскости макроцикла, при этом другая копланарна, а при копланарном расположении макроцикла и обеих нитрогрупп наблюдаются локальные максимумы. Такие зависимости, безусловно, приводят к уширению полосы $S_0 \rightarrow S_2$ поглощения.

Заключение. Полученные результаты позволяют объяснить механизм уширения спектров поглощения при симметричном присоединении двух NO₂ групп в C_m -положениях макроцикла порфина. Спектр поглощения в этом случае является суперпозицией индивидуальных спектров, обусловленных поглощением конформеров с различной ориентацией нитрогрупп относительно плоскости макроцикла. Результаты однозначно указывают на существенную зависимость формы индивидуальных спектров поглощения от двухгранных углов между плоскостью макроцикла и плоскостями нитрогрупп. В растворах диапазон изменения двухгранных углов φ_5 и φ_{15} , безусловно, меньше (ортогональное и копланарное расположение заместителей могут не реализоваться), и, соответственно, спектральные сдвиги будут меньше. С другой стороны, ограничивая способность вращения нитрогрупп посредством присоединения заместителей в соседних положениях макроцикла, можно направленно изменять спектрально-люминесцентные характеристики молекулы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Государственной программы научных исследований Республики Беларусь «Конвергенция – 2025» (подпрограмма «Междисциплинарные исследования и новые зарождающиеся технологии», задание шифр 3.03.10 (НИР 2)).

Список литературы

1. Крук Н. Н. Строение и оптические свойства тетрапиррольных соединений. Минск: БГТУ, 2019. 216 с.
2. Murov S. L., Carmichael I., Hug G. L. Handbook of photochemistry. New-York: Marcel Dekker, 1993. 420 p.
3. Электронные и стерические эффекты заместителей как способ управления свойствами тетрапиррольных макроциклов / С. Г. Пуховская, Ю. Б. Иванова, Н. Н. Крук [и др.] // Функциональные материалы на основе тетрапиррольных макрогетероциклических соединений / под. ред. О. И. Койфмана. М., 2019. С. 63–101.
4. On the Nature of the Fluorescent State in β -Nitrotetraarylporphyrins / V. S. Chirvony, A. van Hoek, T. J. Schaafsma [et al.] // J. Phys. Chem., B. 1998. Vol. 102, issue 48. P. 9714–9724.
5. Dahal S., Krishnan V. Excited singlet state intramolecular charge transfer in di and trinitrotetraphenylporphyrins // Chem. Phys. Lett. 1997. Vol. 274, issue 4. P. 390–395.
6. Laikov D. N. Fast evaluation of density functional exchange-correlation terms using the expansion of the electron density in auxiliary basis sets // Chem. Phys. Lett. 1997. Vol. 28, issues 1–3. P. 151–156.
7. Гладков Л. Л., Крук Н. Н. Спектральные проявления модуляции энергии электронных орбиталей макроцикла порфирина при вращении NO₂-заместителя // Журн. прикл. спектр. 2024. Т. 91, № 5. С. 623–629.

References

1. Kruk M. M. *Stroyeniye i opticheskiye svoystva tetrapirrol'nykh soyedineniy* [Structure and optical properties of tetrapyrrolic compounds]. Minsk, BGTU Publ., 2019. 216 p. (In Russian).
2. Murov S. L., Carmichael I., Hug G. L. Handbook of photochemistry. New-York, Marcel Dekker Publ., 1993. 420 p.
3. Pukhovskaya S. G., Ivanova Yu. B., Kruk M. M., Golubchikov O. A., Koifman O. I., Electronic and steric effects of substituents as a tool to control the properties of tetrapyrrolic macrocycles. *Funktsional'nyye materialy na osnove tetrapirrol'nykh makrogeterotsiklicheskih soyedineniy* [Functional materials based on tetrapyrrole macroheterocyclic compounds]. Ed. by O. I. Koifman. Moscow, 2019, pp. 63–101 (In Russian).
4. Chirvony V. S., van Hoek A., Schaafsma T. J., Pershukevich P. P., Filatov I. V., Avilov I. V., Shishporenok S. I., Terekhov S. N., Malinovskii V. L. On the Nature of the Fluorescent State in β -Nitrotetraarylporphyrins. *J. Phys. Chem., B.*, 1998, vol. 102, issue 48, pp. 9714–9724.
5. Dahal S., Krishnan V. Excited singlet state intramolecular charge transfer in di and trinitrotetraarylporphyrins. *Chem. Phys. Lett.*, 1997, vol. 274, pp. 390–395.
6. Laikov D. N. Fast evaluation of density functional exchange-correlation terms using the expansion of the electron density in auxiliary basis sets. *Chem. Phys. Lett.*, 1997, vol. 281, issues 1–3, pp. 151–156.
7. Gladkov L. L., Kruk M. M., Spectral manifestations of energy modulation of the porphine macrocycle electronic orbitals upon rotation of an NO₂-substituent. *Journ. Appl. Spectr.*, 2024, vol. 91, issue 5, pp. 963–968 (In Russian).

Информация об авторах

Кленицкий Дмитрий Викентьевич – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры физики. Белорусский государственный технологический университет (ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: klen@belstu.by

Гладков Лев Львович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры физических и математических основ информатики. Белорусская государственная академия связи (ул. Ф. Скорины, 8/2, 220114, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: llglad@tut.by

Сырбу Сергей Александрович – доктор химических наук, профессор, заведующий кафедрой органической химии. Ивановский государственный химико-технологический университет (пр-т Шереметевский, 7, 153000, г. Иваново, Российская Федерация). E-mail: syrby@isuct.ru

Крук Николай Николаевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой физики. Белорусский государственный технологический университет (ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: m.kruk@belstu.by

Information about the authors

Klenitsky Dmitry Vikentievich – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Physics. Belarusian State Technological University (13a Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: klen@belstu.by

Gladkov Lev L'vovich – DSc (Physics and Mathematics), Professor, Professor, the Department of Physical and Mathematical Foundations of Informatics. Belarusian State Academy of Communications (8/2 F. Skorina str., 220114, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: llglad@tut.by

Syrbu Sergei Aleksandrovich – DSc (Chemistry), Professor, Head of the Department of Organic Chemistry. Ivanovo State University of Chemistry and Technology (7 Sheremetevsky Ave., 153000, Ivanovo, Russian Federation). E-mail: syrby@isuct.ru

Kruk Mikalai Mikalaevich – DSc (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Department of Physics. Belarusian State Technological University (13a Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: m.kruk@belstu.by

Поступила 08.05.2025

УДК: 547.455:535.33/34:539.194

В. М. Андрианов, М. В. Королевич

Белорусский государственный аграрный технический университет

**РАСЧЕТ И СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ИК СПЕКТРОВ
24-ЭПИКАСТАСТЕРОНА И 28-ГОМОКАСТАСТЕРОНА (SS-КОНФИГУРАЦИЯ)
С РАЗЛИЧНОЙ СТРУКТУРОЙ ИХ БОКОВОЙ ЦЕПИ**

В рамках оригинального комбинированного подхода, сочетающего классический анализ нормальных колебаний методом молекулярной механики с квантово-химической оценкой абсолютных интенсивностей, проведен согласованный расчет частот и интенсивностей нормальных колебаний практически важных биологически активных стероидных фитогормонов – молекул (22S,23S)-24-эпикастастерона и (22S,23S)-28-гомокастастерона. Смоделирована их молекулярная структура и впервые дана интерпретация наиболее интенсивных характеристических ИК полос поглощения в области 1500–900 см⁻¹. Сопоставление теоретических и экспериментальных спектров показало, что теоретические спектры в целом удовлетворительно описывают основные, наиболее интенсивные характеристические полосы поглощения рассматриваемого спектрального диапазона. Сравнительный анализ экспериментальных ИК спектров и теоретических спектральных кривых поглощения этих близких по химическому строению молекул позволил оценить влияние структурных особенностей в пределах боковой цепи исследуемых молекул на формирование ИК спектров и найти связь между их структурными различиями и наблюдаемыми изменениями ИК спектров в области 1500–950 см⁻¹. Показано, что наличие дополнительной группы C28H₂ в (22S,23S)-28-гомокастастероне непосредственно проявляется в виде основного вклада в РПЭ ряда нормальных колебаний (среди других нормальных колебаний), формирующих, в частности, такие интенсивные характеристические полосы поглощения ИК спектра, как полосы с максимумами 1383 и 1014 см⁻¹, что сказывается на интенсивности этих полос поглощения ИК спектра.

Ключевые слова: ИК спектроскопия, анализ нормальных колебаний, абсолютные ИК интенсивности, характеристические частоты, интерпретация ИК спектра, brassinosteroids.

Для цитирования: Андрианов В. М., Королевич М. В. Расчет и сравнительный анализ ИК спектров 24-эпикастастерона и 28-гомокастастерона (ss-конфигурация) с различной структурой их боковой цепи // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2025. № 2 (296). С. 40–47.

DOI: 10.52065/2520-6141-2025-296-7.

V. M. Andrianov, M. V. Korolevich

Belarusian State Agrarian Technical University, Minsk, Belarus

**CALCULATION AND COMPARATIVE ANALYSIS
OF THE 24-EPICASTASTERONE AND 28-HOMOCASTASTERONE
(SS CONFIGURATION) IR SPECTRA WITH DIFFERENT STRUCTURES
OF THEIR SIDE CHAIN**

Within the framework of an original combined approach, combining classical analysis of normal oscillations by the molecular mechanics method with quantum-chemical assessment of absolute intensities, a consistent calculation of the frequencies and intensities of normal oscillations of practically important biologically active steroid phytohormones – molecules of (22S,23S)-24-epicastasterone and (22S,23S)-28-homocastasterone – was carried out. Their molecular structure was modeled and an interpretation of the most intense characteristic IR absorption bands in the 1500–900 cm⁻¹ region was given for the first time. A comparison of theoretical and experimental spectra showed that the theoretical spectra, on the whole, satisfactorily describe the main, most intense characteristic absorption bands of the spectral range under consideration. A comparative analysis of the experimental IR spectra and theoretical spectral absorption curves of these molecules, which are similar in chemical structure, made it possible to evaluate the influence of structural features within the side chain of the studied molecules on the formation of IR spectra and to find a connection between their structural differences and the observed changes in the IR spectra in the region of 1500–950 cm⁻¹. It has been shown that the presence of an additional C28H₂ group in (22S,23S)-28-homocastasterone is directly manifested in the form of the main contribution to the RPE of a number of normal vibrations (among other normal vibrations), which form, in particular, such intense characteristic absorption bands of the IR spectrum as bands with maxima at 1383 and 1014 cm⁻¹, which affects the intensity of these absorption bands of the IR spectrum.

Keywords: IR spectroscopy, normal coordinate analysis, absolute IR intensities, characteristic frequencies, interpretation of the IR spectrum, brassinosteroids.

For citation: Andrianov V. M., Korolevich M. V. Calculation and comparative analysis of the 24-epicastasterone and 28-homocastasterone (ss configuration) IR spectra with different structures of their side chain. *Proceedings of BSTU, issue Physics and Mathematics. Informatics*, 2025, no. 2 (296), pp. 40–47 (In Russian) DOI: 10.52065/2520-6141-2025-296-7.

Введение. Брассинолиды и кастастероны являются биологически активными гормонами, представляющими класс фитогормональных стероидов (ФС). Они способствуют повышению качества растительной продукции, токсичны к быстро разрастающимся клеткам опухоли и рассматриваются как потенциально антиканцерогенные фармакологические средства [1–4]. На сегодня эта группа стероидов насчитывает свыше 70 соединений [5–7].

Известно [8], что биологическая активность этих соединений существенно зависит от стереохимической конфигурации атомов C22 и C23, структуры и конфигурации алкильного заместителя у C24 боковой цепи, что может оказывать влияние на токсичность производных брассинолидов и кастастеронов для целого ряда раковых клеток [9, 10].

Высокая биологическая активность связана с 22R, 23R-диольной структурой в стероидной боковой цепи. Синтетические аналоги с 22S, 23S-гидроксильными группами менее активны [11]. В то же время в природной 22R, 23R-конфигурации брассиностероидов соединения с 24S-метил- или этилгруппой показывают большую биоактивность, чем соответствующие гормоны с 24R-алкил группой [12], отражая значимость стереохимии также и у этого асимметрического центра.

Для брассинолида характерно наличие в стероидном скелете семичленного цикла, в который входят карбонильная группа C=O и эфирная C–O–C связь, в то время как для кастастерона – шестичленного цикла с карбонильной группой.

ИК-спектроскопия предоставляет большие возможности для получения информации о структуре молекул. Тем не менее известно лишь несколько экспериментальных работ [13–15], в которых проведен анализ зарегистрированных ИК спектров ряда стероидных фитогормонов. Для установления структурных корреляций в практически важных биологически активных стероидных фитогормонах необходимы теоретические исследования: моделирование молекулярной структуры, расчет колебательных спектров, сопоставительный анализ экспериментальных и рассчитанных ИК спектров близких по структуре молекул данного класса соединений.

Ранее нами были проведены полный расчет колебательных спектров и моделирование спектральных кривых оптической плотности биологически активных молекул класса ФС – гомобрассинолида и (22S,23S)-гомобрассинолида [16], (22S,23S)-24-эпибрассинолида [17], (22R,23R)-28-гомокастастерона [18].

Цель данной работы заключалась в получении структурных параметров, проведении полного расчета колебательных спектров и моделировании спектральных кривых оптической плотности близких по строению представителей стероидных гормонов, обладающих биологической активностью – молекул (22S,23S)-эпикастастерона и (22S,23S)-28-гомокастастерона для детальной интерпретации и сопоставительного анализа их экспериментальных ИК спектров.

Основная часть. Для решения поставленной задачи применен оригинальный комбинированный подход к анализу ИК спектров сложных органических соединений, разработанный и реализованный в виде комплекса программ при исследовании спектров углеводов [19]. Он сочетает классический анализ частот нормальных колебаний многоатомных молекул с квантово-химической оценкой абсолютных интенсивностей, соответствующих интегральным интенсивностям ИК полос поглощения.

Расчет частот, форм, распределения потенциальной энергии (РПЭ) нормальных колебаний, смещений атомов в декартовых координатах в каждом нормальном колебании для расчета абсолютных интенсивностей ИК полос поглощения проведен в рамках метода молекулярной механики (ММ).

Теоретическая спектральная кривая оптической плотности в расчете на один моль вещества и единицу оптического пути моделировалась как сумма полос гауссовой формы по теоретически рассчитанным абсолютным интенсивностям и заданным полуширинам, которые оценивались на основании экспериментального спектра [19]. Полуширины полос поглощения полагались равными 15 см^{-1} , некоторые из них принимали значения от 8 до 20 см^{-1} .

Интерпретация наблюдаемого ИК спектра выполнена на основе сопоставления экспериментальных значений частот $\nu_{\text{эксп}}$ и интегральных интенсивностей полос поглощения с рассчитанными частотами $\nu_{\text{расч}}$ и абсолютными интенсивностями нормальных колебаний. Анализируемый ИК спектр регистрировался ИК-фурьеспектрометром NEXUS. Синтезированное вещество растиралось с обезвоженным мелкодисперсным KBr, приготовленный порошок прессовался в вакууме по стандартной методике.

Для получения структурных параметров и декартовых координат атомов исследуемых молекул использован современный пакет программ для молекулярного моделирования HyperChem 7.5, оптимизация геометрии проведена квантово-химическим

методом PM3. В качестве исходных параметров использованы данные рентгеноструктурного анализа (РСА) о кристаллической и молекулярной структуре молекул (22S,23S)-24-эпикастастерона и (22S,23S)-28-гомокастастерона [20]. Исходя из этих данных нами построены молекулярные структуры, представленные на рис. 1, и определены декартовы координаты атомов молекул (22S,23S)-эпикастастерона и (22S,23S)-28-гомокастастерона для проведения расчета их колебательных спектров.

Молекулы (22S,23S)-эпикастастерона (I) и (22S,23S)-28-гомокастастерона (II) образуют три шестичленных (A, B, C) и один пятичленный (D) циклы, а также объемную боковую цепь (рис. 1). Структурные различия исследуемых молекул локализованы в пределах боковой цепи: природа заместителя в положении 24 (метильный (I), этильный (II)) и его конфигурация (24R (I), 24S (II)) (рис. 1).

Замена метильной группы на этильную в положении 24 при переходе от эпи- к гомокастастерону приводит к конформационным изменениям боковой цепи. В синтетических молекулах с SS-конфигурацией такой переход приводит к конформационным различиям групп атомов относительно связей C23-C24 и C24-C25 боковой цепи, находящихся в непосредственной близости к месту замещения.

Колебательная задача (расчет частот, форм, смещений атомов в декартовых координатах) решалась в приближении метода молекулярной механики (ММ). Расчет частот и интенсивностей нормальных колебаний исследуемых молекул проведен в рамках оригинального комбини-

рованного подхода, позволяющего сочетать классический анализ нормальных колебаний методом молекулярной механики с квантово-химической оценкой интенсивностей методом CNDO/2. По этим данным смоделированы спектральные кривые оптической плотности исследуемых молекул. Теоретические спектры удовлетворительно описывают основные, наиболее интенсивные характеристические полосы поглощения экспериментальных спектров (22S,23S)-эпикастастерона, что демонстрирует рис. 2, и (22S,23S)-28-гомокастастерона в спектральном диапазоне 1500–900 см^{-1} . Сопоставление теоретических и экспериментальных спектров показывает, что теоретические спектры в целом удовлетворительно описывают основные, наиболее интенсивные характеристические полосы поглощения рассматриваемого спектрального диапазона. Так, для молекулы (22S,23S)-эпикастастерона, как следует из рис. 2, четырем наиболее интенсивным полосам поглощения 1465, 1445, 1438 и 1383 см^{-1} экспериментального спектра в интервале 1500–1200 см^{-1} можно поставить в соответствие полосы с частотами их максимумов 1459, 1429, 1394 см^{-1} теоретического спектра соответственно. В то же время три наиболее интенсивные полосы поглощения 1082, 1045 и 1014 см^{-1} экспериментального спектра в интервале 1200–950 см^{-1} можно соотнести с полосами теоретического спектра с частотами их максимумов 1104, 1048, 1009 см^{-1} . При этом максимальный частотный сдвиг соответствующих полос $\nu_{\text{расч}}$ и $\nu_{\text{эксп}}$ для этой молекулы составляет от 11 см^{-1} (диапазон 1500–1200 см^{-1}) до 22 см^{-1} (1200–950 см^{-1}).

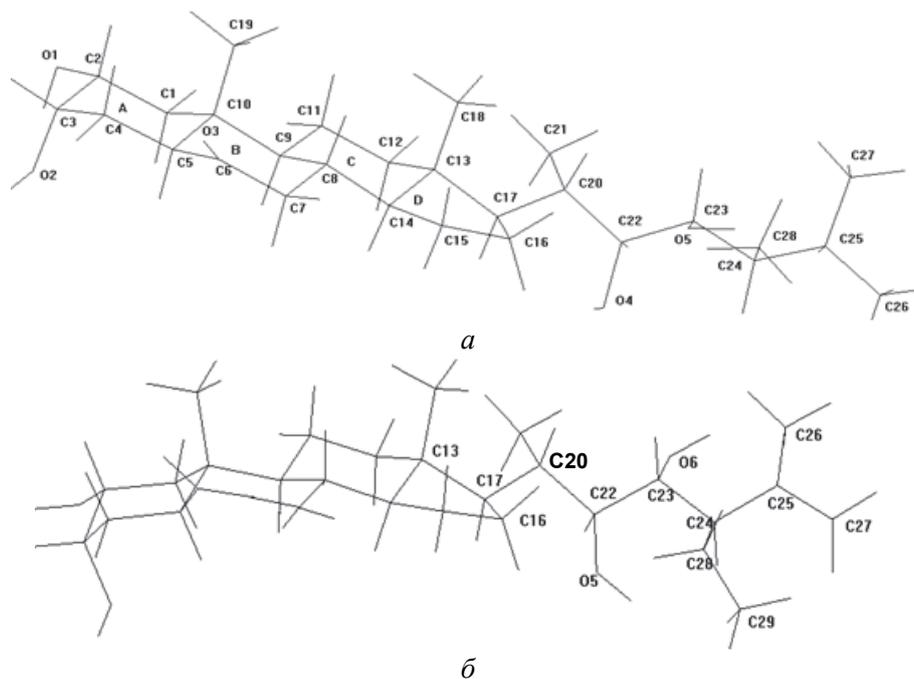


Рис. 1. Молекулярные структуры (22S,23S)-24-эпикастастерона (а) и (22S,23S)-28-гомокастастерона (б), построенные по данным РСА

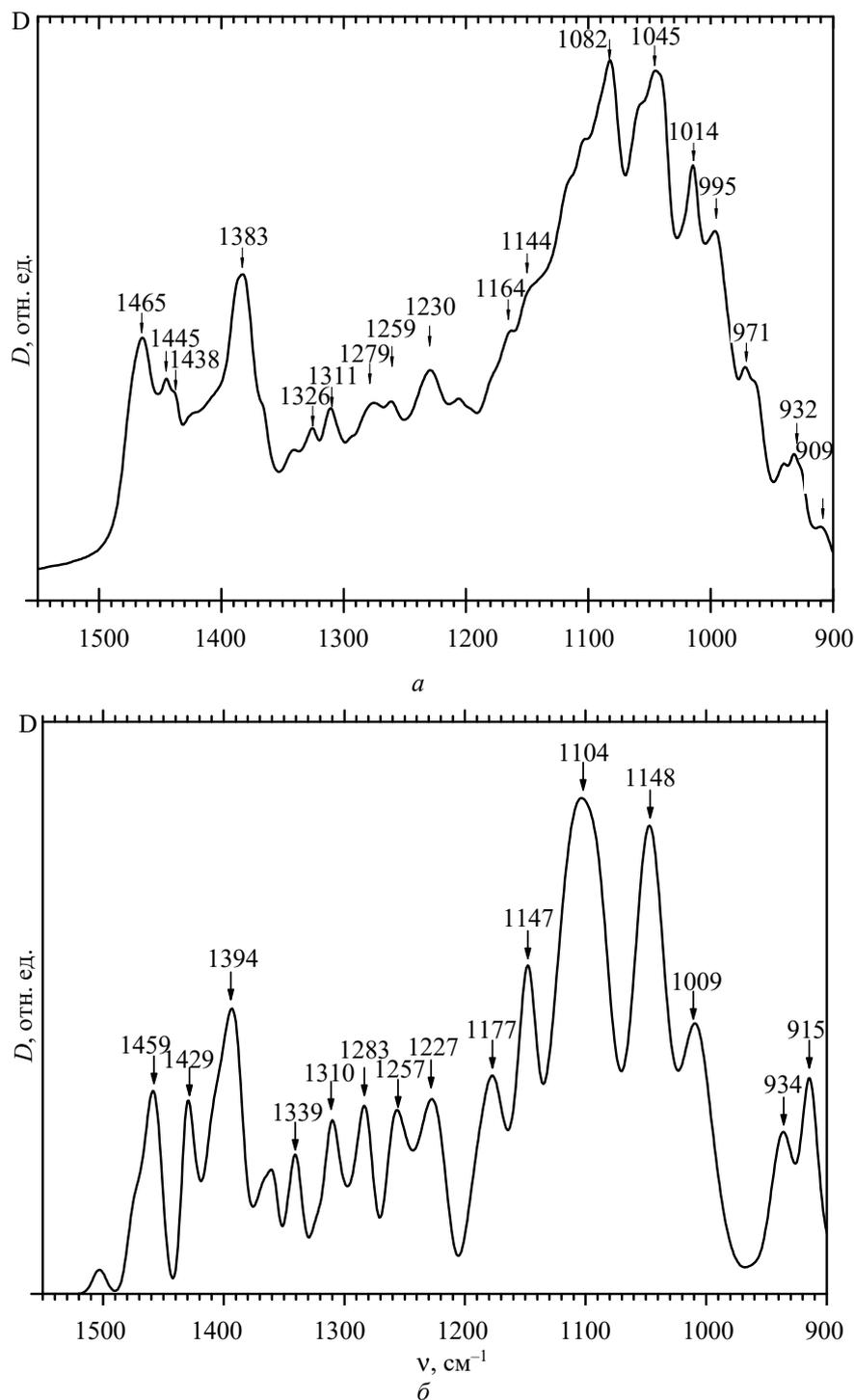


Рис. 2. Экспериментальный (а) и теоретический (б) ИК спектры поглощения (D , отн. ед.) (22S, 23S)-24-эпикастастерона в диапазоне частот 1550–900 см^{-1}

Отнесение экспериментальных полос и интерпретация наблюдаемого ИК спектра этой молекулы выполнены на основе сопоставления наблюдаемых частот $\nu_{\text{эксп}}$ с частотами нормальных колебаний $\nu_{\text{рас}}$ и интегральных интенсивностей наблюдаемых полос поглощения с рассчитанными абсолютными интенсивностями. В таблице дана интерпретация наиболее интен-

сивных характеристических полос поглощения ИК спектра исследуемых молекул в области 1500–900 см^{-1} .

Сопоставительный анализ результатов расчета колебательных спектров молекул (22S,23S)-24-эпикастастерона и (22S,23S)-28-гомокастастерона (наиболее интенсивных характеристических полос поглощения ИК спектров этих

молекул в области 1500–900 см⁻¹) показал, что небольшие различия их молекулярной структуры приводят к изменениям формы колебания в ряде нормальных колебаний с близкими или совпадающими частотами, следствием чего является изменение интенсивностей соответствующих полос поглощения. Поскольку каждая полоса экспериментального спектра имеет сложное происхождение и состоит из

ряда полос разной интенсивности (в теоретическом спектре – сумма полос гауссовой формы по теоретически рассчитанным абсолютным интенсивностям и заданным полуширинам – от 8 до 25 см⁻¹), то перераспределение интенсивностей составляющих полос при переходе к другому соединению приводит к изменению интенсивности суммарной полосы поглощения.

Экспериментальные характеристические ($\nu_{\text{экс}}$) и рассчитанные ($\nu_{\text{рас}}$) частоты (см⁻¹) ИК полос поглощения, абсолютные интенсивности A (10¹⁶·см²·моль⁻¹·с⁻¹) и РПЭ нормальных колебаний молекулы (22S,23S)-эпикастастерона (I) и (22S,23S)-гомокастастерона (II) в спектральной области 1500–900 см⁻¹

$\nu_{\text{экс}}$	$\nu_{\text{рас}}$ (I)	$\nu_{\text{рас}}$ (II)	A (I)	A (II)	РПЭ(%) (I)	РПЭ(%) (II)
1465 (1459)	1497	1498	170	1	23 HC19H, 19 HC18H, 17 CC19H, 15 CC18H, 9 HC4H	26 HC19H, 19 CC19H, 18 HC18H, 14 CC18H, 7 HC4H, 7 HC11H
	1495	1496	81	9	20 HC18H, 17 HC19H, 20 CC18H, 13CC19H, 11HC4H	26 HC18H, 21 CC18H, 18 HC19H, 14 CC19H, 8 HC4H, 6HC11H
	1486	1485	31	92	55 HC4H, 20 HC19H	60 HC4H, 17 HC19H, 11 CC4H, 6 C10C19H
	1475	1476	37	2	56 HC12H, 12 HC1H, 10 CC12H, 8 HC11H	54 HC12H, 12 HC1H, 10 CC12H, 9 HC11H
	1473	1473	16	15	67 HC1H	65 HC1H, 8 HC12H, 6 CC1H2, 5 HC11H
1445 (1429)	1459	1459	27	2	72 HC19H	70 HC19H, 7 HC7H, 5 CC19H
	1456	1458	52	10	47 HC7H, 20 HC18H, 11 HC19H	41 HC26H, 33 CC26H, 8 HC29H
	1449	1453	47	14	41 C23O5H	42 HC18H, 25 HC7H, 8 HC15H, 6 HC21H
	1446	1450	57	70	44 HC26H, 34CC26H	42 HC27H, 33 CC27H, 8 HC28H, 5 HC29H
		1447		24		48 HC21H, 27 CC21H, 14 HC18H
1438 (1429)	1431	1432	40	6	74 HC16H	75 HC16H, 15 CC16H
	1429	1429	244	66	86 HC18H	88 HC18H
	1426	1426	285	15	90 HC19H	91 HC19H
1383 (1394)	1393	1392	74	51	27 CC1H, 18 C2O1H	18CC1H, 6 C2O1H, 6 C20C17H, 6 C24C25H, 5 HC21H2
	1390	1392	77	57	31 C20C17H, 22 C13C17H	17 CC1H, 9 C24C25H, 6 C2O1H, 5 C28C24H
	1384	1389	96	72	27 CC8H, 26 CC9H	27 C20C17H, 19 C13C17H, 5 C17C20
	1376	1384	120	69	36 CC5H, 28CC4H	29 CC8H, 23 CC9H
	1364	1376	239	1	28 CC22H, 14 CC25H	35 CC5H, 26 CC4H, 6 C4C5
	1363	1376	85	16	28 CC8H, 28 CC9H	44 C29C28H, 8 HC29H, 5 HC28H
		1363		96		27 CC8H, 23 CC9H
		1362		19		25 CC22H, 6 CC25H, 5 C23O5H, 5 C10C9H
1326 (1339)	1333	1333	115	60	16 CC20H, 11 CC14H, 14 CC16H, 11CC7H	17 CC20H, 13 CC16H
	1328	1331	11	19	22 CC20H, 13 CC23H	13 C2C3H, 12 C3C2H, 11 C3O2, 9 O2C3H, 8 C3O2H, 5 C3C4H
	1326	1324	17	314	22 CC2H, 10 CC5H, 8CC9H	10 C17C20H, 6 C8C9H
1311 (1310)	1314	1317	77	74	14 CC14H, 11 CC9H, 8 CC16H	14 CC16H, 9 C13C14H, 5 C16C17H
	1306	1312	76	2	20 CC24H, 17CC20H, 12CC22H	26 CC24H, 11 CC20H, 5 C27C25H
		1306		71		29 CC5H, 14 C8C9H
1082 (1104)	1109	1108	78	17	16 C7C8, 13CC7H, 11C8C9	14 CC7H, 12 C7C8, 11 C8C9, 5 C11C12H
	1101	1102	35	3	11 CC16H, 6 C17C20, 5 C8C14, 5 C20C21	6 C15C16H, 5 C17C20
		1098		7		39 C3C4H, 5 C1C2, 5 C10C19, 6 C2C1H
	1098	1094	39	6	39 CC4H, 7 C1C2, 5 C10C19	14 C14C15H, 8 C11C12, 8 C16C17, 5 C15C16
	1094		39		12 C11C12, 10 CC15H, 8 C16C17, 8 C7C8	
1045 (1048)	1077	1078	77	12	16 CC16H, 12CC15H, 8C20C21, 6 C14C15, 6 C15C16	19 CC16H, 18 C20C21, 8 C15C16, 7 CC15H, 6 C14C15, 5 C7C8
	1069	1071	48	16	47 CC15H, 7 C20C21, 5 C14C15	31 CC15H, 9 C20C21, 9 C22O, 7 O5C23H, 6 C23O
	1060	1066	129	36	27 CC15H, 14 CC21H, 8 C20C21	21 CC15H, 11 C25C27H, 11 C25C26H, 6 C29C28H, 5 C28C29
		1063		18	17 C11C12, 9CC21H, 9 CC18H, 7 C16C17, 5 C14C15	14 C25C27H, 13 C28C29, 12 C25C26H, 11 CC15H, 5 O5C23H
		1058		11		20 CC15H, 14 C11C12, , 7 C14C15
1014 (1009)	1028	1028	10	33	29 CC28H, 19 CC27H, 18 C24C28	29 C28C29, 29 C28C29H, 11 C25C27H, 6 C24CC29, 6 C25C26H
	1027		72		9 C7C8, 7 CC7H, 7 C10C19H, 7 CC11H, 6 C8C9	10 C10C19H, 8 C7C8, 7 C6C7H, 7 C12C11H, 6 C8C9
	1011	1026	39	2	23 CC21H, 20 CC28H, 8 C15C16	
		1015		25		51 C28C29H, 14 C24C28H, 12 C20C21H
		1009		77		28 C15C16, 18 C16C17, 11 CC15H

Примечание. В скобках указаны частоты $\nu_{\text{рас}}$ максимумов полос поглощения теоретического спектра молекулы (I).

Так, например, из представленных в таблице результатов следует, что интенсивная полоса с максимумом 1465 см^{-1} в экспериментальном спектре состоит из пяти составляющих полос, основной вклад в которые вносят деформационные колебания метильных (НС18Н, НС19Н, СС18Н, СС19Н) и метиленовых (НС4Н, НС12Н, НС1Н) групп, входящих в состав шестичленных циклов А и С остова молекулы. Вторая интенсивная полоса этого спектрального диапазона с максимумом 1383 см^{-1} в экспериментальном спектре, согласно расчету, состоит из шести (I) и восьми (II) составляющих полос, обусловленных, главным образом, деформационными колебаниями ССН метинных групп, а также деформационными колебаниями СОН гидроксилы О1Н и О5Н. Что же касается интенсивных характеристических полос с максимумами 1082 , 1045 и 1014 см^{-1} в экспериментальном спектре, то, по данным расчета (полосы в теоретическом спектре, представленном на рис. 2, с максимумами 1104 , 1048 и 1009 см^{-1}), основной вклад в формирование этих полос вносят деформационные колебания ССН метиленовых и метильных групп, а также валентные колебания связей С–С как остова, так и боковой цепи исследуемых молекул.

Важно отметить, что наличие дополнительной группы С28Н₂ в (22S,23S)-28-гомокастастероне непосредственно проявляется в виде основного вклада в РПЭ ряда нормальных колебаний (среди других нормальных колебаний), формирующих, в частности, такие интенсивные характеристические полосы поглощения ИК спектра, как полосы с максимумами 1383 и 1014 см^{-1} .

Закключение. В результате проведенных теоретических исследований смоделирована молекулярная структура молекул (22S,23S)-24-эпикастастерона и (22S,23S)-28-гомокастастерона. Выполнены полный расчет колебательного спектра и моделирование спектральной кривой оптической плотности исследуемых молекул. На основе сопоставления их экспериментальных ИК спектров и рассчитанных спектральных кривых поглощения впервые дана интерпретация наиболее интенсивных характеристических ИК полос поглощения в области $1500\text{--}900\text{ см}^{-1}$. Показано, что наличие дополнительной группы С28Н₂ в (22S,23S)-28-гомокастастероне сказывается на интенсивности полос поглощения ИК спектра с максимумами 1383 и 1014 см^{-1} .

Список литературы

1. OSW-1: a Natural Compound With Potent Anticancer Activity and a Novel Mechanism of Action / Y. Zhou [et al.] // *J. Natl. Cancer Inst.* 2005. Vol. 97. P. 1781–1785.
2. Structure determination of inonotsuoxides A and B and in vivo anti-tumor promoting activity of inotodiol from the sclerotia of *Inonotus obliquus* / T. Nakata [et al.] // *Bioorg. Med. Chem.* 2007. Vol. 15. P. 257–264.
3. Biological effects of oxidized phytosterols: a review of the current knowledge / E. Hovenkamp [et al.] // *Prog. Lipid Res.* 2008. Vol. 47. P. 37–49.
4. Cardiac glycosides in cancer research and cancer therapy / T.-M. Wang [et al.] // *J. Nat. Prod.* 2007. Vol. 70. P. 1429–1433.
5. Khripach V. A., Zhabinskii V. N., de Groot A. E. Brassinosteroids: a new class of plant hormones. San Diego, CA: Academic press, 1999. 456 p.
6. Nemhauser J. L., Chory J. Bring it on: new insights into the mechanism of brassinosteroid action // *J. Exp. Bot.* 2004. Vol. 55. P. 265–270.
7. Hu Y., Bao F., Li J. Promotive effect of brassinosteroids on cell division involves a distinct CycD3-induction pathway in *Arabidopsis* // *Plant J.* 2000. Vol. 24. P. 693–701.
8. Drosihn S., Porzel A., Brandt W. Determination of preferred conformations of brassinosteroids by means of NMR investigations and Boltzmann statistical analysis of simulated annealing calculations // *J. Mol. Model.* 2001. Vol. 7. P. 34–42.
9. Anticancer and antiproliferative activity of natural brassinosteroids / J. Malikova [et al.] // *Phytochemistry.* 2008. Vol. 69. P. 418–426.
10. Toxicity of (22R,23R)-22,23-dihydroxystigmastane derivatives to cultured cancer cells / A.Yu. Misharin [et al.] // *Steroids.* 2010. Vol. 75. P. 287–294.
11. Synthesis of Brassinosteroids of Varying Acyl Side Chains and Evaluation of Their Brassinolide-like Activity / S. Uesusuki [et al.] // *Biosci Biotechnol Biochem.* 2004. Vol. 68. P. 1097–1105.
12. Yokota T., Mori K. Molecular structure and biological activity of brassinolide and related brassinosteroids // *Molecular Structure and Biological Activity of Steroids.* CRC Press, Boca Raton, FL, 1992. P. 317–340.
13. Проявление в инфракрасных спектрах строения и межмолекулярных взаимодействий биологически активных брассиностероидов / Н. А. Борисевич [и др.] // *Журнал прикладной спектроскопии.* 2007. Т. 74, № 4. С. 610–616.

14. ИК спектры brassinosterоидов стигмастанового ряда, различающихся конфигурацией и числом диольных группировок / Н. А. Борисевич [и др.] // Журнал прикладной спектроскопии. 2009. Т. 76, № 6. С. 652–658.

15. Борисевич Н. А., Буслов Д. К. Инфракрасные спектры стероидных фитогормонов brassинолида, кастастерона и их 24-эпипроизводных // Журнал прикладной спектроскопии. 2010. Т. 77, № 4. С. 529–534.

16. Андрианов В. М., Королевич М. В. Расчет и сравнительный анализ ИК спектров гомобраcсинолида и (22S,23S)-гомобраcсинолида // Журнал прикладной спектроскопии. 2015. Т. 82, № 4. С. 485–496.

17. Андрианов В. М., Королевич М. В., Вельченко А. А. Расчет и сравнительный анализ ИК спектров гомобраcсинолида и (22S,23S)-24-эпибраcсинолида // Журнал прикладной спектроскопии. 2019. Т. 86. № 6. С. 847–858.

18. Андрианов В. М., Королевич М. В., Шевченко А. А. Полный расчет колебательного спектра молекулы 28-гомокастастерона (RR-конфигурация) в возможных конформациях // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2024. № 1. С. 32–38.

19. Королевич М. В. Аналитическая инфракрасная спектроскопия сахаридов: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Минск, 2009. 333 с.

20. Kutschabsky L., Reck G. Private Communication to the Cambridge Structural Database, deposition number CCDC 201799. 2003.

References

1. Zhou Y., Garcia-Prieto C., Carney D. A., Xu R., Pelicano H., Kang Y. OSW-1: a Natural Compound With Potent Anticancer Activity and a Novel Mechanism of Action. *J. Natl. Cancer Inst.*, 2005, vol. 97, pp. 1781–1785.

2. Nakata T., Yamada T., Taji S., Ohishi H., Wada S., Tokuda H. Structure determination of inotsuoxides A and B and in vivo anti-tumor promoting activity of inotodiol from the sclerotia of *Inonotus obliquus*. *Bioorg. Med. Chem.*, 2007, vol. 15, pp. 257–264.

3. Hovenkamp E., Demonty I., Plat J., Lutjohann D., Mensink R.P., Trautwein E.A. Biological effects of oxidized phytosterols: a review of the current knowledge. *Prog. Lipid Res.*, 2008, vol. 47, pp. 37–49.

4. Wang T-M., Hojo T., Ran F-X., Wang R-F., Wang R-Q., Chen H-B. [et al.]. Cardiac glycosides in cancer research and cancer therapy. *J. Nat. Prod.*, 2007, vol. 70, pp. 1429–1433.

5. Khripach V. A., Zhabinskii V. N., de Groot A. E. Brassinosteroids: a new class of plant hormones, San Diego, CA, Academic press Publ., 1999. 456 p.

6. Nemhauser J. L., Chory J. Bring it on: new insights into the mechanism of brassinosteroid action. *J. Exp. Bot.*, 2004, vol. 55, pp. 265–270.

7. Hu Y., Bao F., Li J. Promotive effect of brassinosteroids on cell division involves a distinct CycD3-induction pathway in *Arabidopsis*. *Plant J.*, 2000, vol. 24, pp. 693–701.

8. Drosihn S., Porzel A., Brandt W. Determination of preferred conformations of brassinosteroids by means of NMR investigations and Boltzmann statistical analysis of simulated annealing calculations. *J. Mol. Model.*, 2001, vol. 7, pp. 34–42.

9. Malikova J., Swaczynova J., Kolar Z., Strnad M. Anticancer and antiproliferative activity of natural brassinosteroids. *Phytochemistry*, 2008, vol. 69, pp. 418–426.

10. Misharin A. Yu., Mehtiev A. R., Zhabinskii V. N., Khripach V. A., Timofeev V. P., Tkachev Ya. V. Toxicity of (22R,23R)-22,23-dihydroxystigmastane derivatives to cultured cancer cells. *Steroids*, 2010, vol. 75, pp. 287–294.

11. Uesusuki S., Watanabe B., Yamamoto S., Otsuki J., Nakagawa Y., Miyagawa H. Synthesis of Brassinosteroids of Varying Acyl Side Chains and Evaluation of Their Brassinolide-like Activity. *Biosci Biotechnol Biochem.*, 2004, vol. 68, pp. 1097–1105.

12. Yokota T., Mori K. Molecular structure and biological activity of brassinolide and related brassinosteroids. *Molecular Structure and Biological Activity of Steroids*. CRC Press, Boca Raton, FL, 1992, pp. 317–340.

13. Borisevich N. A., Skorniyakov I. V., Khripach V. A., Tolstorozhev G. B., Zhabinsky V. N. Manifestation in infrared spectra of the structure and intermolecular interactions of biologically active brassinosteroids. *Zhurnal prikladnoy spektroskopii*, 2007, vol. 74, no. 4, pp. 610–616 (In Russian).

14. Borisevich N. A., Buslov D. K., Zhabinsky V. N., Khripach V. A. IR spectra of brassinosteroids of the stigmastane series, differing in configuration and number of diol groups. *Zhurnal prikladnoy spektroskopii*, 2009, vol. 76, no. 6, pp. 652–658 (In Russian).

15. Borisevich N. A., Buslov D. K. Infrared spectra of brassinolide and castasterone steroidal phytohormones and their 24-epi-derivatives. *Zhurnal prikladnoy spektroskopii*, 2010, vol. 77, no 4, pp. 491–495 (In Russian).

16. Andrianov V. M., Korolevich M. V. Calculation and comparative analysis of IR spectra of homobrassinolide and (22S,23S)-homobrassinolide. *Zhurnal prikladnoy spektroskopii*, 2015, vol. 82, no. 4, pp. 485–496 (In Russian).

17. Andrianov V. M., Korolevich M. V., Velcheanko A. A. Calculation and comparative analysis of IR spectra of homobrassinolide and (22S, 23S)-24-epibrassinolide. *Zhurnal prikladnoy spektroskopii*, 2019, vol. 86, no. 6, pp. 847–858 (In Russian).

18. Andrianov V. M., Korolevich M. V., Shevchenok A. A. Complete calculation of the vibrational spectrum of the 28-homocastasterone molecule (RR-configuration) in possible conformations. *Trudy BGTU* [Proceeding of BSTU], issue 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2024, no. 1, pp. 32–38 (In Russian).

19. Korolevich M. V. *Analiticheskaya infrakrasnaya spektroskopiya sakharidov. Dis. ... d-ra fiz.-mat nauk* [Analytical infrared spectroscopy of saccharides. Diss. ... DSc (Physics and Mathematics)]. Minsk, 2009. 333 p.

20. Kutschabsky L., Reck G. Private Communication to the Cambridge Structural Database, deposition number CCDC 201799. 2003.

Информация об авторах

Андрианов Виктор Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры электроснабжения и электротехники. Белорусский государственный аграрный технический университет (пр-т Независимости, 99/1, 220023, Минск, Республика Беларусь). E-mail: v.andrianov71@gmail.com

Королевич Майя Васильевна – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры естественнонаучных дисциплин. Белорусский государственный аграрный технический университет (пр-т Независимости, 99/1, 220023, Минск, Республика Беларусь). E-mail: korolevi@dragon.bas-net.by

Information about the authors

Andrianov Viktor Mikhailovich – DSc (Physics and Mathematics), Professor, the Department of Power Supply and Electrical Engineering. Belarusian State Agrarian Technical University (99/1 Nezavisimosti Ave, 220023, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: v.andrianov71@gmail.com.

Korolevich Maya Vasilievna – DSc (Physics and Mathematics), Associate Professor, Professor, the Department of Natural Sciences. Belarusian State Agrarian Technical University (99/1 Nezavisimosti Ave, 220023, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: korolevi@dragon.bas-net.by.

Поступила 04.04. 2025

ИНФОРМАТИКА И ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ COMPUTER SCIENCE AND ENGINEERING SCIENCES

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ И УПРАВЛЕНИЕ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ MODELLING OF PROCESSES AND MANAGEMENT IN TECHNICAL SYSTEMS

UDC [004.056+003.26](075.8)

A. Janek¹, P. P. Urbanovich²

¹The John Paul II Catholic University of Lublin (Poland)

²Belarusian State Technological University

DIGITAL CERTIFICATE SYSTEM IN EDUCATION BASED ON THE ETHEREUM BLOCKCHAIN PLATFORM

Modern education is constantly adapting to the dynamically changing technological landscape, looking for innovative solutions to support learning processes. Among these solutions, blockchain technology is emerging as a promising area, potentially revolutionary for the field of education. The implementation of digital certificates in education enhances the efficiency, security, and global recognition of qualifications, making the process of verifying achievements more modern and transparent. The article analyzes the main features of using blockchain technologies in the education system, based on a number of fundamental theoretical concepts, and describes the author's software tool for the academic certification system. The core of the application is a decentralized database built on the Ethereum platform. The application utilizes smart contracts for secure issuance and verification of digital diplomas. The key modules of the application and their software implementation features are described. One of the features of the system under consideration is the implementation of a tokenization mechanism based on the Ethereum Request for Comments 20, ensures that these tokens are fungible and compatible with other tokens and applications within the Ethereum ecosystem. Examples of practical use of the application are also presented.

Keywords: blockchain technology, education system, Ethereum platform, hash function, consensus algorithm, software.

For citation: Janek A., Urbanovich P. P. Digital certificate system in education based on the Ethereum blockchain platform. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2025, no. 2 (296), pp. 48–57.

DOI: 10.52065/2520-6141-2025-296-8.

А. Янек¹, П. П. Урбанович²

¹Люблинский Католический университет (Польша)

²Белорусский государственный технологический университет

СИСТЕМА ЦИФРОВЫХ СЕРТИФИКАТОВ В ОБРАЗОВАНИИ НА ОСНОВЕ БЛОКЧЕЙН-ПЛАТФОРМЫ ETHEREUM

Современное образование постоянно адаптируется к динамично меняющемуся технологическому ландшафту, ищет инновационные решения для поддержки процессов обучения. Среди этих решений технология блокчейн становится перспективной областью, потенциально революционной

для сферы образования. Внедрение цифровых сертификатов в образование повышает эффективность, безопасность и глобальное признание квалификаций, делая процесс подтверждения достижений более современным и прозрачным. В статье анализируются основные особенности использования технологий блокчейн в системе образования, базирующиеся на ряде фундаментальных теоретических концепций, а также описывается авторское программное средство для системы академической сертификации. Основой приложения является децентрализованная база данных, построенная на платформе Ethereum. Приложение использует смарт-контракты для безопасной выдачи и проверки цифровых дипломов. Описаны ключевые модули приложения и особенности их программной реализации. Одной из особенностей рассматриваемой системы является реализация механизма токенизации, основанного на наборе правил для смарт-контракта токена в сети Ethereum (ERC-20), который гарантирует, что эти токены взаимозаменяемы и совместимы с другими токенами и приложениями в экосистеме Ethereum. Представлены также примеры практического использования данного приложения.

Ключевые слова: технология блокчейн, система образования, платформа Ethereum, хэш-функция, алгоритм консенсуса, программное обеспечение.

Для цитирования: Янек А., Урбанович П. П. Система цифровых сертификатов в образовании на основе блокчейн-платформы Ethereum // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2025. № 2 (296). С. 47–57 (На англ.).

DOI: 10.52065/2520-6141-2025-296-8.

Introduction. Modern education is continuously adapting to the rapidly evolving technological landscape, seeking innovative solutions to support learning processes [1–3]. Among these, blockchain technology is emerging as a promising area with the potential to revolutionize the field of education. The basic idea of this technology (Satoshi Nakamoto [4]) is that the network timestamps transactions by hashing them into an ongoing chain of hash-based proofs of work, forming a record that cannot be changed without redoing the proof-of-work. The longest chain serves as proof of the sequence of events witnessed. Originally developed as the backbone for cryptocurrencies, blockchain has become a foundation for new models of secure and transparent data storage.

There are several main areas of research on the use of blockchain technology in education. These include the following.

1. Theoretical Foundations and Conceptual Approaches. Many authors emphasize the unique properties of blockchain – immutability of records, decentralization, and automation through smart contracts (see, for example, [5, 6]). These features create prerequisites for reducing the risks of certificate forgery and increasing trust in learning outcomes.

2. Application of Blockchain for Storage and Verification of Academic Achievements. Research shows that blockchain enables the creation of digital diplomas and certificates that are easily verifiable by employers and educational institutions [7, 8].

3. Management of Student and Educator Records and Portfolios. Decentralized platforms for storing students' achievements and educators' methodological materials provide control over such data and facilitate their exchange among participants in the educational process [9].

4. Skills Certification. Studies indicate the prospects of using blockchain for issuing micro-certifi-

icates for individual modules or skills [10, 11]. This approach promotes flexible learning and validation of specific competencies.

5. Security, Privacy, and Regulatory Issues. Despite its advantages, research also raises concerns regarding personal data protection [12], compliance with regulatory requirements (European Commission, 2020), and the need for standardization of solutions.

The analysis shows a high potential for using blockchain technologies in the education system to increase trust in learning outcomes, simplify administrative processes and protect data [13–18]. In practice, blockchain only allows for adding information without the possibility of editing or deleting it [12–14]. Each subsequent block is permanently linked to the previous ones, creating a chain resistant to manipulation.

The authors of [15] conducted a meta-analysis with elements of a literature review, in which they distinguished both current and future potential applications of blockchain technology in the education sector. Here, they analyzed, among others, the use of this technology in the field of certificate management, maintaining student records, building educational platforms and implementing smart contracts.

Other literature reviews also emphasize the convergent features of blockchain technology. For example, in the article [16] such features as decentralization, transaction tracking, immutability of records and currency properties of blockchain were distinguished. In turn, the article from MDPI lists interesting advantages such as transparency, security, efficiency and the possibility of creating decentralized applications and smart contracts [17]. However, for widespread implementation, further research is needed on issues of standardization, regulatory control and integration with existing systems and, most importantly, it is necessary to create and study the main features of the practical use of relevant software platforms.

It is also worth noting that in 2017, Sony Global Education (SGE) announced the development of a blockchain-based system in the education sector. It was intended to mutually use records of educational achievements and activities of several educational institutions [19].

The purpose and content of this article is precisely to present the process of development and practical use of blockchain technology in education. Specifically, it pertains to verifying the authenticity of digital educational diplomas.

Main part. System model and application architecture. The basic assumption of the proposed solution in the author's application is to ensure transparency, security and automation of the process of issuing and verifying academic certificates using blockchain technology and smart contracts.

The functionality of the developed diploma authentication system and the interaction of its main modules are based on the approaches described in [20]. Fig. 1 shows an adapted functional diagram of the specified system.

The system is based on a decentralized platform operating in the Ethereum Virtual Machine (EVM) environment. EVM is responsible for executing the code of smart contracts, which automatically execute the terms of the contract when certain criteria are met. They are based on the Solidity language, which is specially designed for creating applications on the Ethereum blockchain.

Each transaction in a block is hashed and stored in a Merkle tree, which is a type of binary tree with many leaf nodes. The root of a Merkle tree is a hash of its descendant nodes, which ensures data integrity and verifiability. Ethereum also uses Patricia Merkle Tries (also known as Radix Tries), which are used to store key-value pairs with cryptographic authentication. The block header contains three roots from the three trees, representing state, transactions, and confirmations, respectively [21].

The application was developed and tested using Truffle Suite, which is a comprehensive solution for building and testing decentralized applications. Ganache, a local platform for visualizing blockchain data and testing contracts in a local environment, without the overhead of the Ethereum mainnet, was also used. Data is stored in MongoDB, and the front-end, built using the React framework, communicates with the back-end and the Ethereum network via a JavaScript API. The general scheme of the developed application is presented in Fig. 2.

Front-End. The application uses a decentralized interface (DApp) to interact with the Ethereum blockchain.

The front-end is built using the *React.js* framework with MetaMask wallet integration, which allows users to securely authenticate and manage certificates. With DApp browsers (e.g., with the MetaMask extension), users can upload and verify certificates directly through smart contracts.

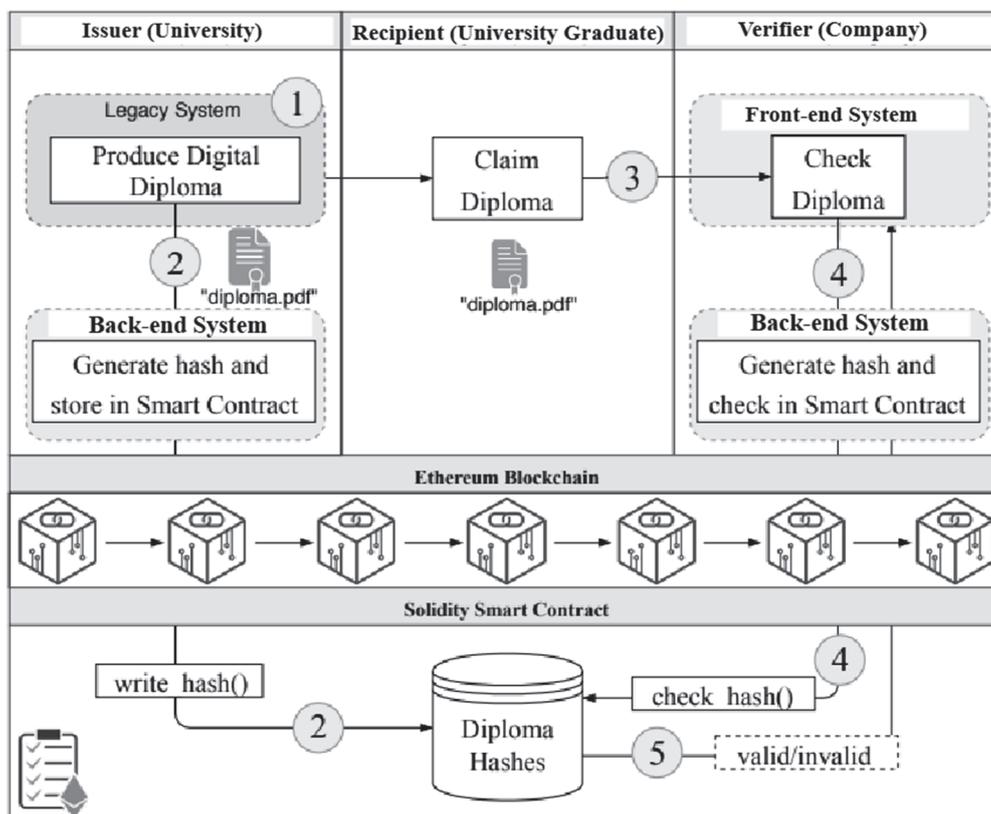


Fig. 1. Architecture and functionality of electronic processing of certificates based on blockchain

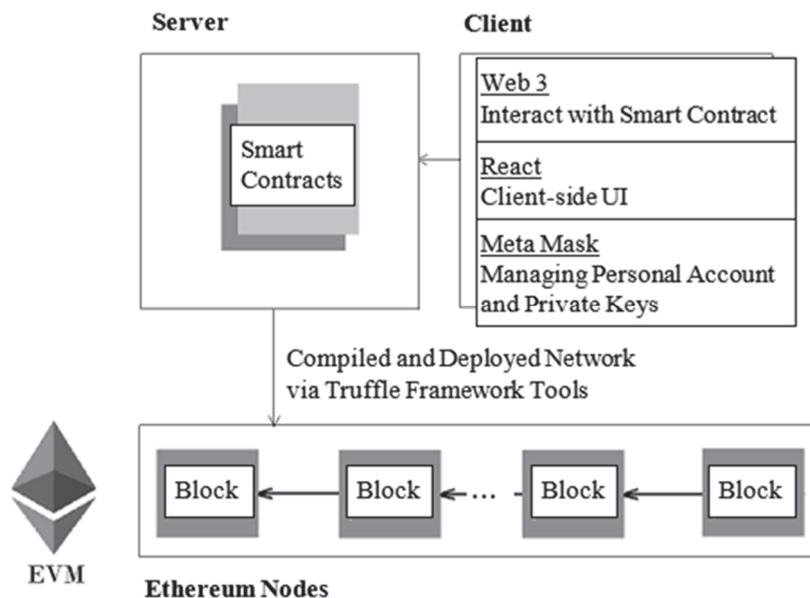


Fig. 2. The general scheme of the developed application

Basic frontend software modules.

Registration module. The user registers using a MetaMask account, whose unique identifier replaces traditional login data. Additionally, they provide information such as name, surname, email address, and role.

Login module. After registration, the user logs in only using MetaMask, which eliminates the need to remember passwords and increases security.

Certificate management module. Educational institutions can issue certificates, assign them to students, and verify the authenticity of documents.

Certificate issuing module. Administrators manage the entire system, create new certificates, and supervise the process of issuing them.

Download and viewing module. Students can view certificates assigned to them and download them in PDF format.

Payment module. Payments for issuing a certificate are made via ERC-20 tokens (described in Chapter 4), integrated with the MetaMask wallet.

Verification module. Each certificate is recorded in the blockchain, and its authenticity can be verified by the university or other institutions using a unique identifier.

Back-End. The application uses the MongoDB database (DB) to store user data and certificate metadata. Communication between the frontend and backend layers is carried out via the REST API JSON interface. The *Ganache* environment, which simulates the operation of the private Ethereum network, was used to test smart contracts. This solution allows testing without the need to incur transaction costs. Integration with the blockchain was implemented using the *Web3.js* library, used to send transactions and read data from smart contracts running on the Ethereum platform.

REST API *RestAPI* organizes work with two databases: the application DB (MongoDB) and the blockchain. In this regard, the methods in *RestAPI* are divided into three categories: methods of the identification level (*Identity*), methods of registering reference information in the application database (MongoDB) and methods of making transactions with the blockchain DB. The methods of the *Identity* category are used to authorize the participant and obtain a JWT token in order to further use *RestAPI* methods, as well as to register and confirm participants at the web application level. The architecture of this DB is presented in Fig. 3, where the detailed structure of all tables used by the application is presented.

The process begins with the admin generating a digital certificate, which is then sent to the blockchain network. The certificate contains important information, such as the student's name and surname, the name of the institution, the date of issue, and the title of the diploma. Each certificate is saved in the form of an immutable hash and associated with the admin's public key. In the second step, the consensus layer plays a key role. It can be seen as a combination of internal infrastructure (MongoDB, *Node.js* server, and private Ethereum node), which constantly monitors the implemented smart contract. Institutions can easily verify the document without the need to involve the admin. It is enough to compare the generated certificate hash with those saved in the blockchain. After successful verification, the certificate is issued to the student in digital form and is notified via e-mail.

The educational institutions participating in the system are mainly universities or teachers who are members of the network. The blockchain-based system for issuing and verifying diploma certificates has been designed as a complete solution.

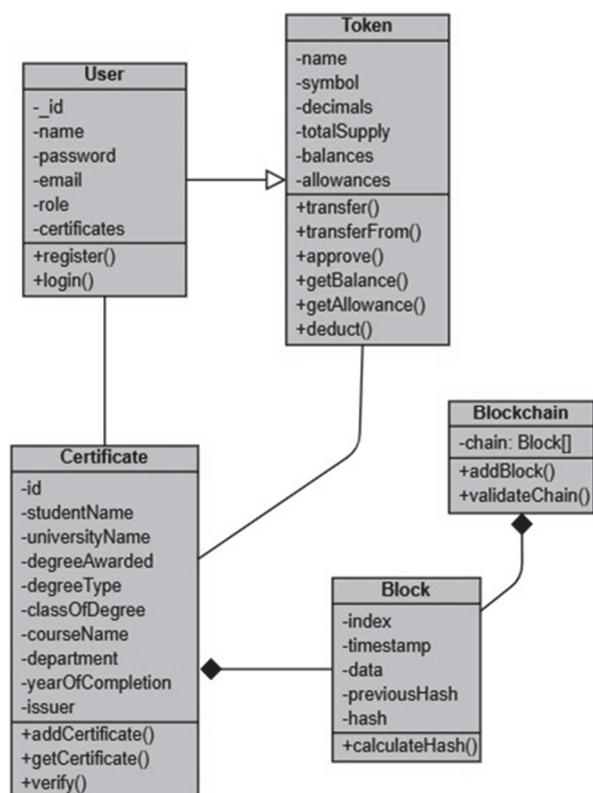


Fig. 3. Database schema

A blockchain written in *JavaScript* was used to verify certificates, which allows for storing information and verifying certificates.

Fig. 4 and Fig. 5 show a fragment of the code implementing the blockchain, which includes creating a new block for each verification, checking the integrity of the chain, and updating the status of the certificate.

Block class representing a single block in the blockchain. Each block contains an index, timestamp, data, hash of the previous block and its own hash.

Blockchain class representing the entire blockchain. Contains methods for creating a genesis block, adding new blocks and verifying the integrity of the chain.

```
class Block {
  constructor(index, timestamp, data, previousHash = "") {
    this.index = index;
    this.timestamp = timestamp;
    this.data = data;
    this.previousHash = previousHash;
    this.hash = this.calculateHash();
  }
  calculateHash() {
    return crypto
      .createHash("sha256")
      .update(
        this.index +
        this.timestamp +
        JSON.stringify(this.data) +
        this.previousHash
      )
      .digest("hex");
  }
}
```

Fig. 4. Implementation of the *Block* class

```
class Blockchain {
  constructor() {
    this.chain = [this.createGenesisBlock()];
  }
  createGenesisBlock() {
    return new Block(0, Date.now().toString(), "Genesis Block", "0");
  }
  getLatestBlock() {
    return this.chain[this.chain.length - 1];
  }
  addBlock(newBlock) {
    newBlock.previousHash = this.getLatestBlock().hash;
    newBlock.hash = newBlock.calculateHash();
    this.chain.push(newBlock);
  }
  isChainValid() {
    for (let i = 1; i < this.chain.length; i++) {
      const currentBlock = this.chain[i];
      const previousBlock = this.chain[i - 1];

      if (currentBlock.hash !== currentBlock.calculateHash()) {
        return false;
      }
      if (currentBlock.previousHash !== previousBlock.hash) {
        return false;
      }
    }
    return true;
  }
}
```

Fig. 5. Implementation of the *Blockchain* class

The certificate verification process includes the following steps (see Fig. 1):

- 1) the user sends a verification request based on the certificate's unique identifier;
- 2) the system searches for the certificate in the DB;
- 3) for each verified certificate, a new block is created containing its unique data;
- 4) the new block is added to the blockchain;
- 5) the system verifies the integrity of the entire chain.
- 6) the certificate is assigned the status "Valid" and a response is returned.

Smart contracts on the token platform. the proposed application also integrates a tokenization mechanism based on the ERC-20 standard. Tokens are used to manage payments related to the issuance and purchase of certificates [22, 23]. The token contract additionally incorporates elements of extended smart contract standards, which are sub-standards of the ERC-20 token. In particular, transfer functionality is implemented using the *transfer()* and *transferFrom()* functions, based on the ERC-677 standard [23]. In both cases, parameters such as the recipient address, sender address, and the number of token units are passed to the function as arguments.

For managing user wallets and executing transactions, the MetaMask extension is used, providing access to the *web3.js* interface.

For educational institutions, such as universities, this process has been further extended. Before gaining access to the generated certificate and the ability to verify it, the university is required to purchase tokens in order to redeem the respective certificate. In other words, users must have a sufficient balance to proceed with the transaction. The purchase of tokens is carried out based on a predetermined fee. Once the transaction is completed, the

purchased tokens are transferred to the institution's wallet address in MetaMask. Only after the certificate has been redeemed does the university obtain access to the generated document and its verification within the system. The tokens used for purchasing the certificate are then transferred to the administrator's account.

Error "Stack too deep" in Solidity and its solution. During the implementation of smart contract functionality in Solidity, one of the characteristic compilation errors for this environment was encountered: "Stack too deep when compiling inline assembly". This error is caused by too many local variables or parameters passed to the function, which exceeds the limits of the stack available during the function execution. The error appeared in the *addCourse()* function, which accepted as many as 12 parameters, including many of type string memory (Fig. 6a). Each of these parameters occupies a separate slot on the stack, and the total number of slots for local variables in the function is a maximum of 16. Exceeding this limit results in the inability to generate code, preventing the proper compilation of the contract.

To bypass the stack limit, the *addCourse()* function was modified to accept a single parameter of this type (Fig. 6b). Thanks to the changes, the number of local variables in the function has been reduced to one, which allowed avoiding a stack overflow error and enabled successful compilation and migration of the contract.

Issuing certificates. A certificate confirming the attainment of a scientific degree is an official document issued by an academic institution, such as

a university. It contains key information, including the date of award, the name of the awarding institution, the recipient's personal details, and the title of the obtained degree. This document serves as formal confirmation of academic achievements and is often required in recruitment processes or further education. The process begins with assigning the certificate to a specific student. The system verifies the user's identity and the certificate's status, then generates a personalized document containing student data such as first name, last name, identification number, field of study, and year of graduation. To ensure security, the certificate is encrypted and digitally signed. After generation, the certificate is automatically sent to the student via email.

The message includes information about the document's availability and instructions for downloading it. This allows students to have immediate access to their certificate without waiting for traditional postal delivery. The system also enables students to download certificates at any time. During this process, the system verifies the user's identity and the authenticity of the certificate. If everything is in order, the student can download a PDF version of the document, which can be used in recruitment processes or job applications. After generating the certificate, it is encrypted and sent to the specified address.

The certificate encryption process is as follows:

- 1) based on the *userId* and *certificateId* identifiers, the appropriate user and certificate data are retrieved from the DB;
- 2) the presence of the user and certificate, as well as the certificate's status, are checked. If the certificate is revoked, the process is halted;

<pre>function addCourse(string memory lastname, string memory firstname, string memory middlename, string memory degreeAwarded, string memory degreeType, string memory classOfDegree, string memory courseName, string memory department, string memory yearOfCompletion, int256 p, int256 e_id)</pre> <p style="text-align: center;"><i>a</i></p>	<pre>function addCourse(Course memory input) public { require(isEducator[msg.sender], "Not authorized to add course"); courseCount++; courses[courseCount] = Course({ id: courseCount, lastname: input.lastname, firstname: input.firstname, middlename: input.middlename, degreeAwarded: input.degreeAwarded, degreeType: input.degreeType, classOfDegree: input.classOfDegree, courseName: input.courseName, department: input.department, yearOfCompletion: input.yearOfCompletion, certificateStatus: input.certificateStatus, author_id: input.author_id, price: input.price, users: 0 }); educators[input.author_id].courses_id.push(courseCount); }</pre> <p style="text-align: center;"><i>b</i></p>
---	--

Fig. 6. The code fragment causing the error (a) and modified *addCourse()* function (b)

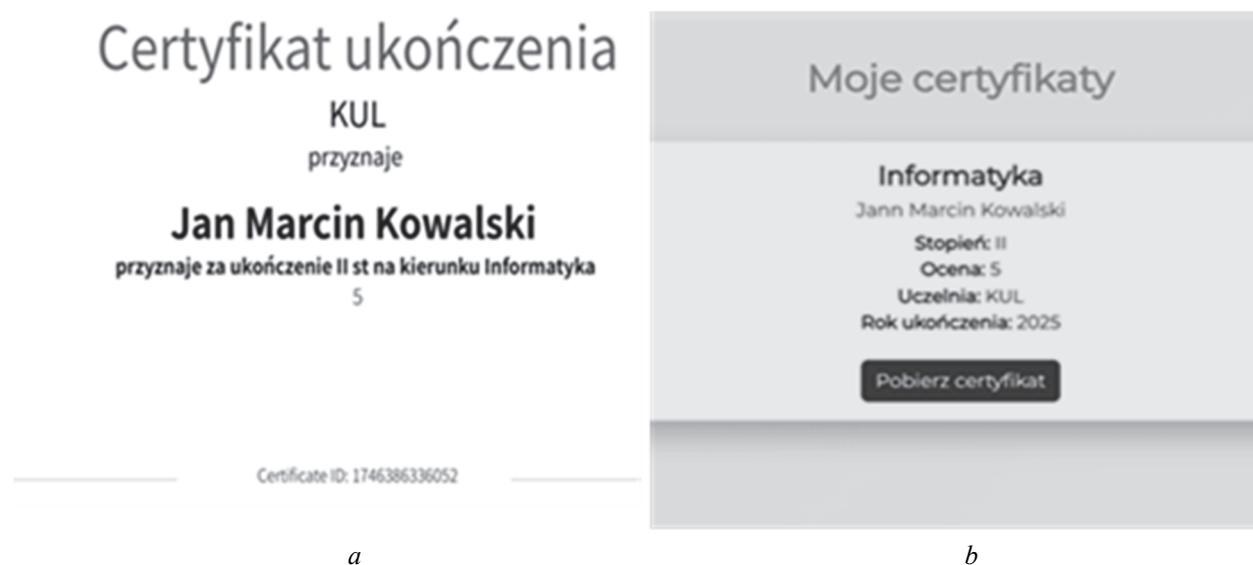


Fig. 8. The examples of a generated certificate for the student (a) and its appearance and content in the student's account

3) the certificate data is encrypted using the user's private key (*user.privateKey*) with the RS256 algorithm. For this purpose, a JWT token containing the certificate data is generated, which is then encoded into base64 format and stored in the *encryptedData* field of the certificate;

4) a new entry containing the certificate ID, assignment date, status, and encrypted data is added to the user's list of certificates;

5) an email notification is sent to the user informing them about the availability of the certificate, along with an attachment in PDF format of the certificate.

The examples of a generated certificate for the student (Jan Marcin Kowalski) and its appearance and content in the student's account, are presented (in Polish) respectively in Fig. 8a and Fig. 8b.

Results and discussion. The system for generating and issuing digital certificates in the education system based on blockchain technology developed and described in the article is a decentralized, automated and cryptographically secure structure for issuing and verifying academic documents. The main features of this and similar systems are as follows:

1) *tamper-proof certification* – by storing certificates as cryptographic hashes on the Ethereum blockchain, the system ensures immutability, eliminating the risk of falsification;

2) *automated smart contract execution* – the use of Solidity-based smart contracts removes manual verification steps, reducing administrative delays and human errors in credential validation;

3) *decentralized identity management* – integration with MetaMask replaces traditional login systems, enhancing security by eliminating password vulnerabilities and enabling seamless wallet-based authentication;

4) *tokenized incentives* – the ERC-20 token system streamlines payments for certificate issuance, with automated balance checks and transaction approvals;

5) *instant verification* – educational institutions can verify credentials in real-time by comparing blockchain-stored hashes, significantly reducing the time and cost associated with manual verification.

The proposed blockchain-based system for issuing and verifying educational certificates on the Ethereum platform presents a promising approach to addressing challenges inherent in traditional credentialing methods. To obtain reliable and comprehensive results, further testing in real-world conditions will be necessary, along with the collection of sufficient data for thorough analysis and comparison.

Conclusion. Blockchain technologies in education represent a groundbreaking approach to managing academic data, verifying achievements, and building trust in certification systems. This study analyzes the potential of this technology in combating document forgery, streamlining administrative processes, and increasing transparency in the education sector.

The proposed original application, utilizing smart contracts and decentralized data storage, demonstrates the practical use of blockchain in creating immutable and verifiable digital diplomas. The adoption of standards such as ERC-20 and integration with tools like MetaMask indicate that mature technological solutions already exist to support the implementation of such systems. At the same time, challenges such as Solidity stack limitations and the need to balance transparency with data privacy highlight that the adoption of blockchain in education requires further research and optimization.

Further development efforts will focus on addressing current limitations, including the integration of external data sources, improvements in user experience for non-technical participants, and optimization of operational costs associated with the Ethereum network. Particular attention will also be given to ensuring compliance with relevant data protection regulations.

References

1. Guerrero-Cano M., Kirby D. and Urbano D. A literature review on entrepreneurial universities: an institutional approach. Available at: https://www.researchgate.net/publication/228657319_A_literature_review_on_entrepreneurial_universities_An_institutional_approach (accessed 07.03.2025).
2. Urbanovich P. P., Blinova E. A., N. Rzhetskaya N. V. Distance learning: a trend, a natural process or a forced measure? *Doklady VIII Mezhdunarodnoy nauchno-tekhnicheskoy internet-konferentsii "Informatsionnyye tekhnologii v obrazovanii, nauke i proizvodstve"* [Reports of the VIII International Scientific and Technical Internet Conference "Information Technologies in Education, Science and Production"]. Minsk, 2020, pp. 116–122 (In Russian).
3. Urbanovich P. P. Features of the concept of "University 3.0" and directions of its implementation. *Vyssheye tekhnicheskoye obrazovaniye* [Higher technical education], 2021, no. 1, pp. 12–18 (In Russian).
4. Nakamoto S. Bitcoin: A Peer-to-Peer Electronic Cash System. *Coindesk*, 2009, no. 5, pp. 9–13.
5. Swan M. Blockchain: Blueprint for a New Economy. O'Reilly Media Publ., 2015. 130 p.
6. Crosby M., Pattanayak P., Verma S., Kalyanaraman. Blockchain technology: Beyond bitcoin. *Applied Innovation Review*, 2016, issue 2, no. 71, pp. 6–19.
7. Sharples M., Domingue J. The Blockchain and Kudos: A Distributed System for Educational Record, Reputation and Reward. In: K. Verbert, M. Sharples, & T. Klobučar (Eds.). *Adaptive and Adaptable Learning. EC-TEL 2016. Lecture Notes in Computer Science*, 2016, pp. 490–496. DOI:10.1007/978-3-319-45153-4_488.
8. Grech A., Camilleri A.F. Blockchain in Education. Luxembourg, Publications Office of the European Union, 2017. 132 p. DOI: 10.25656/01:15013.
9. Mougayar W. Buterin V. The Business Blockchain: Promise, Practice, and Application of the Next Internet Technology. Wiley Publishing, 2016. 179 p.
10. Kuo T. T., Kim H. E., Ohno-Machado L. Blockchain distributed ledger technologies for biomedical and health care applications. *Journal of the American Medical Informatics Association*, 2017, vol. 24 (6), no. 1, pp. 1211–1220. DOI: 10.1093/jamia/ocx068.
11. Kachan D. A., Vishniakou U. A. Approach and models for using distributed ledger technology to authenticate educational documents. *Doklady BGUIR* [Doklady BGUIR], 2020, vol. 18, no. 7, pp. 14–22. DOI: org/10.35596/1729-7648-2020-18-7-14-22 (In Russian).
12. Zheng Z., Xie S., Dai H. N., Chen X., Wang H., Wang Z. An overview of blockchain technology: Architecture, consensus, and future trends. *IEEE International Congress on Big Data (BigData Congress)*, Honolulu, HI, USA, 2017, pp. 557–564. DOI: 10.1109/BigDataCongress.2017.85.
13. Sharples M., Domingue J. The blockchain and kudos: a distributed system for educational record. *Reput. Reward*, 2016, issue 9891, pp. 490–496. DOI: 10.1007/978-3-319-45153-4.
14. Janek A. Analysis of blockchain technology in education. *75-ya nauchno-tekhnicheskaya konferentsiya uchashchikhsya, studentov i magistrantov: sb. nauch. rabot* [75th scientific and technical conference of pupils, students and masters: collection of scientific works], Minsk, 22–27 apr. 2024. Minsk, 2024, pp. 770–773. Available at: https://conf.belstu.by/wp-content/uploads/2024/Сборник_научных_работ_75-я-СНТК2024_исп.pdf (accessed 11.05.2025).
15. Bhaskar T., Tiwari P., & Joshi R. Blockchain in education management: present and future applications. *Journal of Educational Technology & Society*, 2021, vol. 24, no. 3, pp. 45–58. DOI: 10.1234/edutech.2021.0243.
16. Chen G., Xu B., Lu M., & Chen N. S. Exploring blockchain technology and its potential applications for education. *Smart Learning Environments*, 2018, vol. 5, iss. 1, pp. 1–10. DOI: org/10.1186/s40561-018-0062-3.
17. Chinnasamy P., Ramani D. R., Ayyasamy R. K., Jebamani B. J. A., Dhanasekaran S. and Praveena V. Applications of Blockchain Technology in Modern Education System – Systematic Review. *2023 International Conference on Computer Communication and Informatics (ICCCI)*. Coimbatore, India, 2023, pp. 1–4. DOI: 10.1109/ICCCI56745.2023.10128381.
18. Urbanovich P. P. *Zashchita informatsii metodami kriptografii, steganografii i obfuskatsii: ucheb.-metod. posobiye* [Information protection by methods of cryptography, steganography and obfuscation: a teaching aid]. Minsk, BGTU, 2016. 220 p. (In Russian).
19. Global Corruption Report: Education. Transparency International, 2013. Available at: <https://www.transparency.org/en/publications/global-corruption-report-education> (accessed 01.05.2025).
20. Jerinas G., Rodrigues B., Scheid E., Kanhere S. Stiller B. The Proposal of a Blockchain-based Architecture for Transparent Certificate Handling. In: *1st Workshop on Blockchain and Smart Contract Technologies (BSCT 2018), Berlin, 18 July 2018 – 20 July 2018*. Springer, 2018. DOI: 10.1007/978-3-030-04849-5_16.

21. Wood G. Ethereum: A Secure Decentralised Generalised Transaction Ledger. Available at: <https://ethereum.github.io/yellowpaper/paper.pdf> (accessed 01.05.2025).
22. ERC20 Token Standard. Available at: <https://ethereum.org/en/developers/docs/standards/tokens/erc-20/> (accessed 01.05.2025).
23. Introduction To ERC Token Standards. Part 1. Available at: <https://medium.com/immunefi/how-erc-standards-work-part-1-c9795803f459> (accessed 01.05.2025).

Список литературы

1. Guerrero-Cano M., Kirby D. and Urbano D. A literature review on entrepreneurial universities: an institutional approach. URL: https://www.researchgate.net/publication/228657319_A_literature_review_on_entrepreneurial_universities_An_institutional_approach (дата обращения: 07.03.2025).
2. Урбанович, П. П., Блинова Е. А., Ржеутская Н. В. Дистанционное обучение: тенденция, естественный процесс или вынужденная мера? // Информационные технологии в образовании, науке и производстве: докл. VIII Междунар. науч.-техн. интернет-конф., Минск, 21–22 нояб. 2020. Минск: БНТУ, 2020. С. 116–122.
3. Урбанович П. П. Особенности концепции «Университета 3.0» и направления ее реализации // Высшее техническое образование. 2021. Т. 5, № 1. С. 12–18.
4. Nakamoto S. Bitcoin: A Peer-to-Peer Electronic Cash System. Coindesk. 2009. № 5. P. 9–13.
5. Swan M. Blockchain: Blueprint for a New Economy. O'Reilly Media, 2015. 130 p.
6. Crosby M., Pattanayak P., Verma S., Kalyanaraman. Blockchain technology: Beyond bitcoin // Applied Innovation Review. 2016. Issue 2, no. 71. P. 6–19.
7. Sharples M., Domingue J. The Blockchain and Kudos: A Distributed System for Educational Record, Reputation and Reward // K. Verbert, M. Sharples, & T. Kloboučar (Eds.). Adaptive and Adaptable Learning. EC-TEL 2016. Lecture Notes in Computer Science, 2016. P. 490–496. DOI: 10.1007/978-3-319-45153-4_488.
8. Grech A., Camilleri A.F. Blockchain in Education. Luxembourg. Publications Office of the European Union, 2017. 132 p. DOI: 10.25656/01:15013.
9. Mougayar W. Buterin V. The Business Blockchain: Promise, Practice, and Application of the Next Internet Technology. Wiley Publishing, 2016. 179 p.
10. Kuo T. T., Kim H. E., Ohno-Machado L. Blockchain distributed ledger technologies for biomedical and health care applications // Journal of the American Medical Informatics Association. 2017. Vol. 24 (6). № 1. P. 1211–1220. DOI: 10.1093/jamia/ocx068.
11. Качан Д. А., Вишняков В. А. Подход и модели применения технологии распределенных реестров для подтверждения достоверности документов в образовании // Доклады БГУИР. 2020. Т. 18, № 7. С. 14–22. DOI: [org/10.35596/1729-7648-2020-18-7-14-22](https://doi.org/10.35596/1729-7648-2020-18-7-14-22).
12. Zheng Z., Xie S., Dai H. N., Chen X., Wang H., Wang Z. An overview of blockchain technology: Architecture, consensus, and future trends // IEEE International Congress on Big Data (BigData Congress). Honolulu, HI, USA, 2017. P. 557–564. DOI: 10.1109/BigDataCongress.2017.85.
13. Sharples M., Domingue J. The blockchain and kudos: a distributed system for educational record. *Reput. Reward*, 2016, issue 9891, pp. 490–496. DOI: 10.1007/978-3-319-45153-4.
14. Janek A. Analysis of blockchain technology in education // 75-я научно-техническая конференция учащихся, студентов и магистрантов: сб. науч. работ, Минск, 22–27 апр. 2024 г. / Минск, 2024. С. 770–773. URL: https://conf.belstu.by/wp-content/uploads/2024/Сборник_научных_работ_75-яС-НТК2024_исп.pdf (дата обращения: 11.05.2025).
15. Bhaskar T., Tiwari P., & Joshi R. Blockchain in education management: present and future applications // Journal of Educational Technology & Society. 2021. Vol. 24, no. 3. P. 45–58. DOI: 10.1234/edutech.2021.0243.
16. Chen G., Xu B., Lu M., & Chen N. S. Exploring blockchain technology and its potential applications for education. *Smart Learning Environments*, 2018. Vol. 5, issue 1. P. 1–10. DOI: [org/10.1186/s40561-018-0062-3](https://doi.org/10.1186/s40561-018-0062-3).
17. Applications of Blockchain Technology in Modern Education System – Systematic Review / P. Chin-nasamy [et. al.] // 2023 International Conference on Computer Communication and Informatics (ICCCI), Coimbatore, India, 2023. P. 1–4. DOI: 10.1109/ICCCI56745.2023.10128381.
18. Урбанович П. П. Защита информации методами криптографии, стеганографии и обфускации: учеб.-метод. пособие. Минск: БГТУ, 2016. 220 с.
19. Global Corruption Report: Education // Transparency International. 2013. URL: <https://www.transparency.org/en/publications/global-corruption-report-education> (дата обращения: 10.05.2025).

20. The Proposal of a Blockchain-based Architecture for Transparent Certificate Handling / Jerinas G. [et. al.] // 1st Workshop on Blockchain and Smart Contract Technologies (BSCT 2018), Berlin, 18 July 2018 – 20 July 2018. Springer, 2018. DOI: 10.1007/978-3-030-04849-5_16.

21. Wood G. Ethereum: A Secure Decentralised Generalised Transaction Ledger. URL: <https://ethereum.github.io/yellowpaper/paper.pdf> (дата обращения: 01.05.2025).

22. ERC20 Token Standard. URL: <https://ethereum.org/en/developers/docs/standards/tokens/erc-20/> (дата обращения: 01.05.2025).

23. Introduction to ERC Token Standards. Part 1. URL: <https://medium.com/immunefi/how-erc-standards-work-part-1-c9795803f459> (дата обращения: 01.05.2025).

Information about the authors

Janek Alicja – postgraduate student. The John Paul II Catholic University of Lublin (14 Al. Raławickie, 20-950 Lublin, Poland). E-mail: alkajot@student.kul.pl

Urbanovich Pavel Pavlovich – DSc (Engineering), Professor, Professor, the Department of Information Systems and Technologies. Belarusian State Technological University (13a Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: p.urbanovich@belstu.by

Информация об авторах

Янек Алиция – магистрант. Люблинский Католический университет Яна Павла II (14 Ал. Ра-
ławickie, 20-950 Lublin, Poland). E-mail: alkajot@student.kul.pl

Урбанович Павел Павлович – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры ин-
формационных систем и технологий. Белорусский государственный технологический университет
(ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: p.urbanovich@belstu.by

Received 20.06.2025

УДК 620.165.29

Д. А. Гринюк, Е. В. Дубиковская, Н. М. Олиферович,
И. Г. Сухорукова, И. О. Оробей

Белорусский государственный технологический университет

ЭФФЕКТИВНОСТЬ РАБОТЫ КОМБИНИРОВАННЫХ СИСТЕМ РЕГУЛИРОВАНИЯ. I. ОБЩИЙ АНАЛИЗ

В статье рассмотрены вопросы построения комбинированных систем регулирования. Применение традиционных подходов к улучшению качества регулирования сопряжено с рядом проблем. Основная масса исследований сконцентрирована на решении теоретических проблем без привязки к реализации в реальных системах. Практически все примеры не учитывают наличие в структуре управления исполнительных механизмов и измерительных устройств.

Для выработки рекомендаций по использованию инвариантных систем на практике исследована структура комбинированной системы с вариацией параметров динамики. Выбор динамики определялся соотношением быстродействия канала обратной связи и канала возмущения. Проанализированы варианты построения комбинированных систем для случаев с возможностями построения расчетного идеального компенсатора и варианты, когда реализовать расчетный компенсатор не представляется возможным.

Для структуры произведена настройка системы с обратной связью по интегральному критерию. На следующем этапе найдены параметры различных вариантов компенсатора с помощью численных методов и теоретических расчетов. На заключительном шаге произведено параллельное имитационное моделирование и определены параметры эффективности при детерминированном и случайном воздействии. Далее были выбраны структуры, которые обеспечивают эффективную работу при различных критериях управления.

Ключевые слова: системы управления, комбинированные системы, компенсаторы.

Для цитирования: Гринюк Д. А., Дубиковская Е. В., Олиферович Н. М., Сухорукова И. Г., Оробей И. О. Эффективность работы комбинированных систем регулирования. I. Общий анализ // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2025. № 2 (296). С. 58–75.
DOI: 10.52065/2520-6141-2025-296-9.

D. A. Hryniuk, E. V. Dubikovskaya, N. M. Oliferovich, I. G. Suhorukova, I. O. Orobei
Belarusian State Technological University

EFFICIENCY OF FEEDFORWARD AND FEEDBACK CONTROL SYSTEMS. I. GENERAL ANALYSIS

The article considers the issues of constructing feedforward and feedback control systems. The use of traditional approaches to improving the quality of regulation is associated with a number of problems. The bulk of research is concentrated on solving theoretical problems without reference to implementation in real systems. Almost all examples don't take into account the presence of actuators and measuring devices in the control structure. Another problem is that very often theoretical calculations of compensators are difficult to implement in real systems.

To develop recommendations for the use of invariant systems in practice, the structure of feedforward and feedback control systems with a variation in dynamic parameters was investigated. The choice of dynamics was determined by the ratio of the speed of the feedback channel and the disturbance channel. Variants of transfer functions made it possible to build both a variant of ideal compensation for disturbance, and without such a possibility.

For the structure, the feedback system was configured according to the integral criterion. The next stage was to find the parameters of various compensator options using numerical methods and theoretical calculations. At the final stage, parallel simulation modeling was performed and the efficiency parameters were determined under deterministic and random influence. The structures were selected that ensure efficient operation under various control criteria.

Keywords: control systems, feedforward and feedback control systems, compensators.

For citation: Hryniuk D. A., Dubikovskaya E. V., Oliferovich N. M., Suhorukova I. G., Orobei I. O. Efficiency of feedforward and feedback control systems. I. General analysis. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2025, no. 2 (278), pp. 58–75 (In Russian).
DOI: 10.52065/2520-6141-2025-296-9.

Введение. Из теории управления хорошо известны два подхода к построению систем управления – замкнутый и разомкнутый [1, 2]. Каждый из них обладает своими преимуществами и недостатками [3–7]. Основная концепция управления прямой связью, которая использовалась в трехэлементном контуре управления уровнем барабанов котлов [6], была сформулирована в 1925 г. Применение этой концепции на реальных объектах было затруднено до появления надежных микропроцессорных средств в системах управления технологическими процессами [8]. С тех пор управление прямой связью стало одним из наиболее часто используемых алгоритмов в промышленной сфере [6, 9–12]. Традиционно их предлагают использовать для многосвязных систем управления ректификационными колоннами [8, 13], химическими и биологическими производствами [14, 15]. Построение многосвязных контуров часто невозможно без применения компенсаторов [16, 17].

Наиболее простая система проектирования предложена в работе [18]. Сначала статический коэффициент усиления фильтра определяется по соотношению коэффициентов усиления передаточных функций. После этого вычисляются постоянные времени для уменьшения интегральной ошибки отклика системы с обратной связью. До последнего времени это был стандартный подход к проектированию компенсаторов [6, 19].

В то же время процедура проектирования в последующих работах все больше усложнялась [20]. Так, было предложено [21, 22] ввести дополнительный сигнал управления прямой связью. В диссертации [23] для получения параметров регулятора прямой связи (компенсатора) был применен метод наименьших квадратов, которые минимизируют норму остаточного выхода возмущения для данного контроллера обратной связи. Проблему адекватности текущей модели предлагалось решать с помощью адаптивных схем, например, управление по эталонной модели [24–26]. В работе [27] рассмотрена возможность использования теории количественной обратной связи для совместного проектирования регулятора обратной связи и компенсатора.

Для синтеза комбинированных систем необходимы знания динамики каналов возмущения и управления [6, 14, 19]. Исходя из теории расчет компенсаторов производится из принципа инвариантности, суть которого заключается в формировании противовоздействия через исполнительный механизм (ИМ), которое должно компенсировать возмущающее воздействие. Несмотря на достаточно простой расчет параметров компенсатора (динамического звена, задача которого

сформировать противовоздействие), основные проблемы возникают в его дальнейшей реализации [16, 28–30]. Идеальный компенсатор фактически возможен только в математических задачах теории управления. Кроме проблемы реализуемости, существуют проблемы прогнозируемости влияния нелинейностей таких систем регулирования [22, 26, 31].

Были разработаны [32, 33] простые правила настройки, чтобы минимизировать интегрированную абсолютную погрешность (IAE) с учетом воздействия контроллера обратной связи. Также были предложены [30] простые правила настройки, основанные на минимизации интегрированной квадратичной ошибки (ISE). С применением правил произведена попытка их практического применения на системе управления тепловыми режимами в теплице [34].

Поиск решений при наличии запаздывания был рассмотрен в публикации [35]. Также был предложен подход с применением упредителя Смита [36].

Однако такие регуляторы очень чувствительны к точности моделей объекта управления, что потенциально может повлиять на устойчивость системы [37, 38]. В системах управления регуляторы прямой связи могут быть использованы в двух случаях. Традиционно, основной их задачей является подавление помех, которые оказывают воздействие на технологический объект, что часто встречается в промышленности [39–44]. Однако развивается также и направление, связанное с улучшением динамики системы с обратной связью (данное направление не рассматривается в статье).

В идеальных случаях регулятор прямой связи практически полностью нивелирует действие помех. Но даже с учетом проблемы практической реализации, неидеальный компенсатор позволяет улучшить динамику управления [18]. Критерии эффективности применения компенсатора можно найти в издании [45]. Они определяются по соотношению динамики обратной и прямой связей. На это могут оказать влияние и экономические аспекты [46].

Существуют три варианта построения комбинированных систем (рис. 1–3).

Первый вариант – самый популярный, так как развязывает настройку регулятора обратной связи и компенсатор. Кроме этого, данный подход в меньшей степени подвержен проблеме некачественной работы вследствие расхождения параметров реального объекта и моделей, которые были использованы при синтезе. Введение сигнала для компенсации возмущения передаточной функции H (рис. 2–3) до регулятора в основном обусловлено возможностью реализации расчетного идеального компенсатора [22, 47].

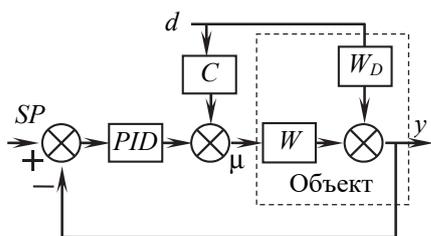


Рис. 1. Классическая структура комбинированной системы первого типа:

SP – сигнал задания; PID – регулятор обратной связи; C – передаточная компенсатора; W, W_D – передаточные функции объекта по каналам управления и возмущения; μ – выход регулятора; d – сигнал возмущения; y – технологический параметр

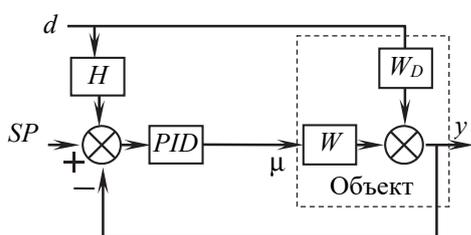


Рис. 2. Классическая структура комбинированной системы первого типа:

H – передаточная компенсатора с учетом настроек ПИД-регулятора

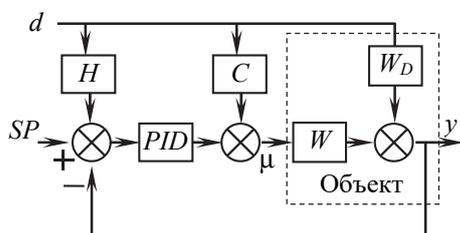


Рис. 3. Расширенный вариант комбинированной системы

Очень часто проблема физической «нереализуемости» решается путем аппроксимации [6] или другим вариантом искусственного увеличения с ограничением на усиление шума [21]. Шум в канале измерения возмущения является иногда большой проблемой при реализации. При применении комбинированных систем стоит оценить его параметры для выбора рациональной структуры.

Эффективность компенсаторов очень сильно зависит от точности модели [48]. Проблема физической реализации может быть решена приближенными методами. Следует учитывать наличие негауссовского шума, как, например, показано в источниках [49–51], где были сделаны попытки подобных вариантов для практического применения.

Несмотря на то, что проблема устойчивости не характерна для регуляторов прямой связи, в некоторых работах [52, 53] утверждается, что

компенсатор не должен настраиваться независимо от контура обратной связи. Проблема робастности в отношении регуляторов прямой связи рассматривается, однако она обычно решается в комплексе совместной работы с регулятором обратной связи и/или алгоритмов систем адаптации [54–56].

Во многом можно согласиться с выводами статьи [48].

1) Большинство существующих контроллеров прямой связи основаны на моделях, поэтому управляемые системы чувствительны к неопределенностям модели и для практического применения необходимы надежные решения.

2) Исследователям необходимо больше ориентироваться на практические задачи, которые могут решить компенсаторы. И здесь хорошая динамика переходных процессов очень редко является первоочередной. Следует ориентироваться больше на решение экономических задач.

3) Практически все компенсаторы используют элементы дифференцирования, что с учетом наличия шумов при изменении возмущения следует принимать во внимание при проектировании.

4) Очень мало работ по учету нелинейностей в системах регулирования с компенсатором.

Во всех процедурах синтеза, которые указаны выше, не учитываются динамические характеристики средств управления. Но очень часто хорошая динамика на выходе средств контроля обращивается высокими динамическими нагрузками для физических параметров технологических процессов. Целью исследования является попытка учесть этот аспект при проектировании.

Методика исследования. Следует не забывать, что потенциальные возможности применения комбинированных систем регулирования сильно зависят от соотношения динамики каналов возмущения и обратной связи. В случае использования структуры на рис. 4 – от соотношения быстродействия W_0 и W_D .

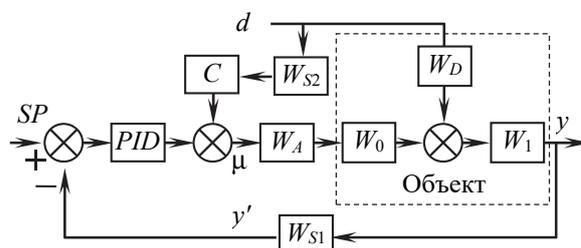


Рис. 4. Структура объекта исследования:

W_A – передаточная функция исполнительного механизма; W_0, W_1 – передаточные функции объекта по каналам управления и возмущения; y' – сигнал с датчика обратной связи

Основной целью исследования является выработка рациональных методик по выбору подходов к настройке подобных систем управления.

По этой причине передаточные функции канала обратной связи и оборудования имели фиксированные значения, за исключением времени запаздывания τ_1 :

$$W_0(s) = \frac{0,87}{3000s^2 + 80s + 1} \exp(-\tau_1 s); \quad (1)$$

$$W_1(s) = \frac{0,87}{133s + 1}; \quad (2)$$

$$W_{S1}(s) = \frac{1}{40s + 1}; \quad (3a)$$

$$W_{S2}(s) = \frac{1}{25s + 1}; \quad (36)$$

$$W_A(s) = \frac{1}{5s + 1}. \quad (4)$$

Поскольку одной из проблем настройки компенсаторов является их реализуемость, было выбрано несколько вариантов передаточных функций канала возмущения:

$$W_{D1}(s) = 1; \quad (5)$$

$$W_{D2}(s) = \frac{1}{910s^2 + 70s + 1} \exp(-\tau_2 s); \quad (6)$$

$$W_{D3}(s) = \frac{1}{(9,3s^2 + 7s + 1)(25s^2 + 11s + 1)} e^{-\tau_2 s}; \quad (7)$$

$$W_{D4}(s) = \frac{1}{(110,3s^2 + 17,23s + 1)} e^{-\tau_2 s}. \quad (8)$$

Коэффициенты передаточной функции $W_{D4}(s)$ были подобраны таким образом, чтобы переходные характеристики $W_{D3}(s)$ и $W_{D4}(s)$ имели минимальное квадратичное отклонение.

Порядок передаточной функции $W_{D3}(s)$ позволяет обеспечить варианты, при которых возможно построение идеальных компенсаторов. Самое сильное воздействие на отклонение на выходе объекта будет оказывать вариант с $W_{D1}(s)$, самое слабое – $W_{D2}(s)$, а $W_{D3}(s)$ и $W_{D4}(s)$ имеют среднее быстродействие между $W_{D1}(s)$ и $W_{D2}(s)$.

На рис. 5 можно видеть переходные процессы для исследованных вариантов динамики канала возмущения без компенсаторов.

Настройки регулятора и компенсатора находились для значений времени запаздывания τ_1 и τ_2 при следующих фиксированных значениях [0,1; 0,3; 1; 3; 10; 30].

Для нахождения настроек ПИД-регулятора использован критерий

$$I_1 = \int_0^{t_M} |y - SP| t^2 dt \rightarrow \min. \quad (9)$$

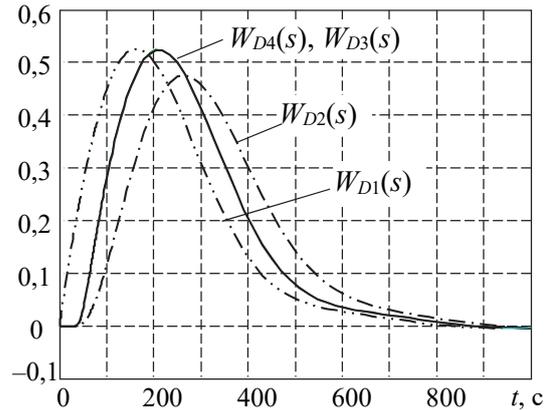


Рис. 5. Переходные процессы при исследованных динамиках канала возмущения для $\tau_1 = \tau_2 = 30$

Как было показано в некоторых предыдущих работах [57], этот интегральный критерий обеспечивает качество переходного процесса при измерении сигнала задания с небольшим перерегулированием, почти минимальным временем регулирования и меньшей нагрузкой на исполнительный механизм по сравнению с *ISE* и некоторыми другими подходами.

Для ПИД-регулятора использовалась параллельная форма:

$$PID = Kp + \frac{1}{Ti s} + Td s. \quad (10)$$

Результаты настройки представлены в табл. 1 и на рис. 6, 7. Как показано, влияние изменения незначительно.

Таблица 1

Настройки регулятора при разных τ_1

PID	τ_1					
	0,1	0,3	1	3	10	30
<i>Kp</i>	1,420	1,420	1,657	1,657	1,618	1,479
<i>Ti</i>	130,6	130,6	115,5	115,5	120,3	133,1
<i>Td</i>	63,09	63,09	85,92	85,92	85,92	85,92

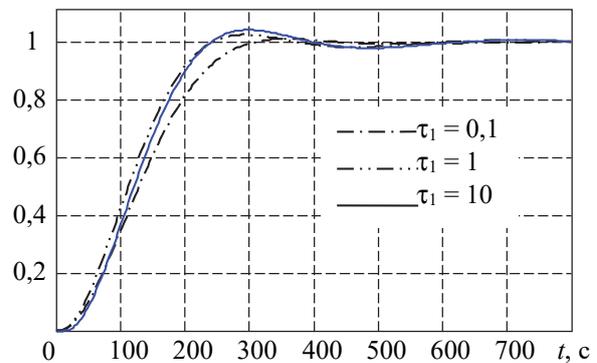


Рис. 6. Переходные процессы основного канала для $\tau_1 = [0,1; 1; 10]$

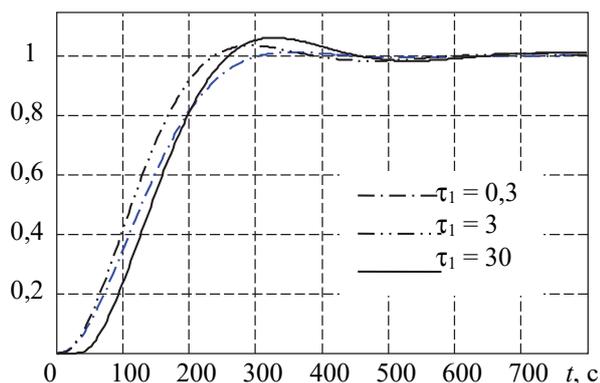


Рис. 7. Переходные процессы основного канала для $\tau_1 = [0,3; 3; 30]$

Синтез компенсаторов по интегральным критериям. Передаточную функцию «идеального» компенсатора (ИК) можно найти как

$$C(s) = \frac{W_D(s)}{W_0(s)W_A(s)W_{S2}(s)}. \quad (11)$$

При такой структуре управления и параметрах передаточных функций определение параметров реализуемого «идеального» компенсатора возможно только при W_{D3} , и только когда $\tau_1 < \tau_2$. Во всех остальных случаях может быть получен приближенный вариант.

Для нахождения параметров компенсаторов использовалась минимизация интегрального критерия:

$$ISE = I_5 = \int_0^{t_M} y^2 dt \rightarrow \min. \quad (12)$$

Как отмечалось в ряде источников [22, 29], наиболее рациональной передаточной функцией компенсатора является вариант форсирующего звена.

$$C_1(s) = \frac{b_1 s + b_0}{a_1 s + 1}. \quad (13)$$

Данный вид компенсатора вытекает из типовых расчетов идеальных компенсаторов, которые в большинстве своем не реализуются. Такой вид позволяет соблюсти баланс между эффективностью, робастностью и минимальным использованием дифференцирования, которое обычно при наличии помех формирует высокое динамическое воздействие на исполнительный механизм.

Кроме этого, он может обеспечить необходимое качество без увеличения уровня шумов на входе исполнительного устройства. Для быстрого нахождения коэффициентов не требуются сложные поисковые алгоритмы. В некоторых случаях возможны варианты использования филь-

тра высокой (ФВЧ) или низкой частоты (ФНЧ). Последние два вида компенсаторов проверялись для всех вариантов системы, но результаты их уступали схеме с C_1 .

В большинстве рассмотренных нами случаев при настройке по интегральному критерию коэффициент a_1 в равенстве (13) стремился к минимальным значениям, но поскольку при реализации на технических системах существуют ограничения, которые обусловлены временем квантования, то в поисковый алгоритм было введено ограничение на минимальное значение 0,02.

Для сравнения были также найдены коэффициенты настроек компенсатора в виде усилительного звена $C_2(s) = k_1$, звеньев второго порядка:

$$C_3(s) = \frac{c_2 s^2 + c_1 s + c_0}{4 \cdot 10^{-4} s^2 + 0,04 s + 1}; \quad (14)$$

$$C_4(s) = \frac{d_3 s + d_2}{(d_1 s)^2 + \sqrt{2} d_1 s + 1}. \quad (15)$$

В последнем варианте для знаменателя использовался вариант коэффициентов Баттерворта.

Поскольку по рассматриваемой теме было получено большое количество данных, то в статье представлены только те результаты, которые позволяют сформировать подход к выбору необходимого вида компенсатора в конкретном случае. Вопросы робастности и использования запаздывания будут рассмотрены в следующих работах. Ниже, в табл. 1–33 приведены коэффициенты компенсаторов C_1, C_2, C_3, C_4 , которые были найдены с помощью численных методов.

Коэффициент c_0 для $W_{D2}(s)$ для всех вариантов запаздывания имел значение 1,142.

Таблица 1

Коэффициенты компенсатора для $W_{D1}(s)$

C_1	τ_1					
	0,1	0,3	1	3	10	30
a_1	0,0200	0,0220	0,0204	0,0201	0,0209	0,0201
b_1	113,3	113,3	113,3	111,1	113,3	118,1
b_0	0,9253	0,9253	0,9253	0,8872	0,8706	0,8138

Таблица 2

Коэффициент a_1 для $W_{D2}(s)$

τ_1	τ_2					
	0,1	0,3	1	3	10	30
0,1	0,02	0,03	0,0204	0,0256	0,1176	0,0460
0,3	0,021	0,0212	0,0219	0,02	0,1176	0,0919
1	0,0225	0,02	0,0201	0,0201	0,0200	0,0200
3	0,0214	0,0204	0,0236	0,0223	0,0220	0,0601
10	0,0201	0,0203	0,0213	0,0203	0,0224	0,2174
30	0,02	0,0203	0,02	0,021	0,02	0,02

Таблица 3

Коэффициент a_1 для $W_{D3}(s)$

τ_1	τ_2					
	0,1	0,3	1	3	10	30
0,1	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	10,5544
0,3	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	10,5544
1	0,02	0,0266	0,02	0,02	0,02	5,8715
3	0,0204	0,02	0,02	0,02	0,02	4,0048
10	0,02	0,0205	0,02	0,02	0,02	0,1977
30	0,02	0,0205	0,0216	0,0201	0,0205	0,02

Таблица 8

Коэффициент b_0 для $W_{D2}(s)$

τ_1	τ_2					
	0,1	0,3	1	3	10	30
0,1	1,083	1,083	1,1	1,1	1,1	1,126
0,3	1,083	1,083	1,1	1,1	1,1	1,126
1	1,09	1,09	1,077	1,095	1,1	1,126
3	1,074	1,074	1,074	1,09	1,1	1,126
10	1,071	1,071	1,058	1,075	1,09	1,121
30	1,024	1,024	1,026	1,03	1,05	1,094

Таблица 4

Коэффициент a_1 для $W_{D4}(s)$

τ_1	τ_2					
	0,1	0,3	1	3	10	30
0,1	0,0202	0,0210	0,0205	0,0211	0,0203	0,0200
0,3	0,0215	0,0209	0,0215	0,0203	0,0202	0,0200
1	0,0202	0,0200	0,0216	0,0214	0,0200	0,0203
3	0,0216	0,0222	0,0212	0,0201	0,0200	0,0203
10	0,0203	0,0200	0,0205	0,0200	0,0203	0,0209
30	0,0201	0,0225	0,0213	0,0203	0,0200	0,0201

Таблица 9

Коэффициент b_0 для $W_{D3}(s)$

τ_1	τ_2					
	0,1	0,3	1	3	10	30
0,1	0,9253	0,9253	0,9253	0,9253	0,9253	0,9253
...	0,9253	0,9253	0,9253	0,9253	0,9253	0,9253
10	0,9253	0,9253	0,9253	0,9253	0,9253	0,9253
30	0,8706	0,8706	0,8872	0,8872	0,9253	0,9253

Таблица 5

Коэффициент b_1 для $W_{D2}(s)$

τ_1	τ_2					
	0,1	0,3	1	3	10	30
0,1	51,83	51,83	51,52	48,81	44,76	20,92
0,3	52,64	52,64	51,52	49,58	44,76	21,06
1	53,68	53,68	52,64	50,55	44,76	22,53
3	55	55	54,15	52,64	46,53	24,85
10	61,41	60,49	60,49	59,1	52,64	33,93
30	66,25	66,25	66,25	66,25	66,25	52,31

Таблица 10

Коэффициент b_0 для $W_{D4}(s)$

τ_1	τ_2					
	0,1	0,3	1	3	10	30
0,1	0,9253	0,9253	0,9253	0,9253	0,9253	0,9253
...	0,9253	0,9253	0,9253	0,9253	0,9253	0,9253
10	0,9253	0,9253	0,9253	0,9253	0,9253	0,9253
30	0,8706	0,8706	0,8872	0,8872	0,9253	0,9253

Таблица 6

Коэффициент b_1 для $W_{D3}(s)$

τ_1	τ_2					
	0,1	0,3	1	3	10	30
0,1	103,0	104,1	104,1	102,1	96,6	94,6
0,3	104,1	103,0	104,1	102,1	98,5	94,6
1	104,1	104,1	104,1	102,1	98,5	94,6
3	104,1	104,1	104,1	102,1	98,1	94,6
10	106,7	106,7	106,7	106,7	102,1	94,6
30	116,0	116,0	116,0	115,5	113,3	102,1

Таблица 11

Коэффициенты компенсатора для $W_{D1}(s)$

C_1	τ_1					
	0,1	0,3	1	3	10	30
c_0	1,142	1,142	1,142	1,099	1,16	1,157
c_1	113,8	113,8	110,6	110,0	113,3	118,1
c_2	5866	5866	6022	5866	7711	8767

Таблица 7

Коэффициент b_1 для $W_{D4}(s)$

τ_1	τ_2					
	0,1	0,3	1	3	10	30
0,1	104,1	104,1	104,1	103,3	96,9	80,6
0,3	104,1	104,1	104,1	103,3	97,1	80,6
1	104,1	104,1	104,1	101,7	99,0	80,6
3	104,1	104,1	104,1	104,1	99,0	83,7
10	108,7	108,7	106,7	106,7	103,7	89,2
30	116,0	116,0	116,0	114,2	113,3	104,1

Таблица 12

Коэффициент c_0 для $W_{D3}(s)$

τ_1	τ_2					
	0,1	0,3	1	3	10	30
0,1	1,16	1,16	1,16	1,16	1,142	1,142
0,3	1,16	1,16	1,16	1,16	1,16	1,142
1	1,16	1,16	1,16	1,16	1,16	1,142
3	1,16	1,16	1,16	1,16	1,16	1,16
10	1,142	1,142	1,142	1,16	1,16	1,16
30	1,16	1,16	1,16	1,16	1,142	1,16

Таблица 13

Коэффициент c_0 для $W_{D4}(s)$

τ_1	τ_2					
	0,1	0,3	1	3	10	30
0,1	1,16	1,16	1,16	1,16	1,16	1,142
0,3	1,16	1,16	1,16	1,16	1,16	1,142
1	1,16	1,16	1,16	1,16	1,16	1,142
3	1,16	1,16	1,16	1,16	1,16	1,142
10	1,142	1,142	1,142	1,16	1,16	1,142
30	1,142	1,142	1,16	1,16	1,142	1,16

Таблица 14

Коэффициент c_1 для $W_{D2}(s)$

τ_1	τ_2					
	0,1	0,3	1	3	10	30
0,1	52,64	52,31	51,52	49,58	44,78	21,06
0,3	52,64	52,31	51,52	49,58	44,78	21,06
1	53,44	52,64	52,31	50,55	44,78	22,18
3	55	55	54,49	52,31	44,78	24,85
10	61,41	60,49	60,49	58,21	51,83	33,93
30	66,25	66,25	66,25	66,25	66,25	51,52

Таблица 15

Коэффициент c_1 для $W_{D3}(s)$

τ_1	τ_2					
	0,1	0,3	1	3	10	30
0,1	104,1	104,1	104,1	101,4	96,6	80,6
0,3	104,1	104,1	102,5	101,4	95,1	80,6
1	101,7	102,9	101,4	101,4	96,6	80,6
3	104,1	104,1	102,5	102,9	98,4	83,7
10	106,7	106,7	106,7	105,0	102,9	89,2
30	116,0	114,2	115,5	115,0	110,9	102,9

Таблица 16

Коэффициент c_1 для $W_{D4}(s)$

τ_1	τ_2					
	0,1	0,3	1	3	10	30
0,1	104,6	104,6	104,5	104,1	96,62	80,6
0,3	104,1	104,1	104,1	102,5	96,62	80,6
1	104,1	102,5	102,1	101,4	96,62	80,6
3	104,1	104,1	104,1	102,1	99,	83,75
10	108,3	106,7	106,7	106,7	103,3	89,24
30	116	116	116	113,8	112,7	103,3

Таблица 17

Коэффициент c_2 для $W_{D2}(s)$

τ_1	τ_2					
	0,1	0,3	1	3	10	30
0,1	1415	1454	1454	1385	1118	287,6
0,3	1415	1415	1454	1406	1118	287,6
1	1415	1,415	1454	1406	1118	287,6
3	1912	1,912	1415	1454	1118	287,6
10	1935	1935	1935	2006	1454	516,9
30	3013	3013	3097	3097	2773	1454

Таблица 18

Коэффициент c_2 для $W_{D3}(s)$

τ_1	τ_2					
	0,1	0,3	1	3	10	30
0,1	4779	4779	4535	4429	3097	1454
0,3	4779	4779	4535	4429	4071	1454
1	4712	4712	4535	4429	4071	1454
3	4779	4779	4779	4535	4071	1912
10	5414	5414	5313	5210	4535	2544
30	7711	7711	7711	7711	5866	4535

Таблица 19

Коэффициент c_2 для $W_{D4}(s)$

τ_1	τ_2					
	0,1	0,3	1	3	10	30
0,1	4779	4779	4779	4535	4071	1454
0,3	4779	4779	4779	4535	4071	1454
1	4779	4779	4712	4429	4071	1415
3	4966	4966	4779	4535	4071	1912
10	5414	5414	5414	5292	4535	2544
30	7711	7711	7711	7711	5866	4535

Таблица 20

Коэффициент k для $W_{D1}(s)$

τ_1					
0,1	0,3	1	3	10	30
0,9034	0,9034	0,9034	0,9034	0,8735	0,7938

Таблица 21

Коэффициент k для $W_{D2}(s)$

τ_1	τ_2					
	0,1	0,3	1	3	10	30
0,1	1,099	1,099	1,099	1,099	1,099	1,142
0,3	1,099	1,099	1,099	1,099	1,099	1,142
1	1,099	1,099	1,099	1,099	1,099	1,142
3	1,099	1,099	1,099	1,099	1,099	1,142
10	1,099	1,099	1,099	1,099	1,099	1,099
30	0,903	0,903	0,903	0,9034	0,9034	1,099

Таблица 22

Коэффициент k для $W_{D3}(s)$

τ_1	τ_2					
	0,1	0,3	1	3	10	30
0,1	0,9034	0,9034	0,9034	0,9034	0,9034	1,099
...	0,9034	0,9034	0,9034	0,9034	0,9034	1,099
10	0,9034	0,9034	0,9034	0,9034	0,9034	1,099
30	0,8735	0,8735	0,8735	0,8735	0,9034	0,9034

Таблица 23

Коэффициент k для $W_{D4}(s)$

τ_1	τ_2					
	0,1	0,3	1	3	10	30
0,1	0,9034	0,9034	0,9034	0,9034	0,9034	1,099
...	0,9034	0,9034	0,9034	0,9034	0,9034	1,099
10	0,9034	0,9034	0,9034	0,9034	0,9034	1,099
30	0,8735	0,8735	0,8735	0,8735	0,9034	0,9034

Таблица 24

Коэффициенты компенсатора для $W_{D1}(s)$

C_1	τ_1					
	0,1	0,3	1	3	10	30
d_0	0,0201	0,0215	0,0205	0,02	0,02045	0,02030
d_1	0,9466	0,9466	0,9073	0,90	0,8783	0,7987
d_2	113,3	113,3	112,6	113,3	113,3	118,1

Таблица 25

Коэффициент d_1 для $W_{D2}(s)$

τ_1	τ_2					
	0,1	0,3	1	3	10	30
0,1	0,0212	0,0203	0,0204	0,0201	0,0612	0,0203
0,3	0,0208	0,0214	0,0200	0,0204	0,0612	0,0200
1	0,0203	0,0200	0,0215	0,0200	0,0200	0,0366
3	0,0223	0,0205	0,0200	0,0241	0,0210	0,0200
10	0,0201	0,0203	0,0218	0,0200	0,0203	0,1174
30	0,0208	0,0210	0,0202	0,0207	0,0204	0,0200

Таблица 30

Коэффициент d_2 для $W_{D4}(s)$

τ_1	τ_2					
	0,1	0,3	1	3	10	30
0,1	1	1	1	1,02	1,03	1,1
0,3	1	1	1	1,004	1,03	1,1
1	0,9740	0,9889	0,9792	1	1,026	1,094
3	0,97	0,97	0,97	0,9889	1,003	1,074
10	0,9466	0,9466	0,9466	0,9498	0,9778	1,055
30	0,8783	0,8783	0,8783	0,8917	0,9215	0,9845

Таблица 26

Коэффициент d_1 для $W_{D3}(s)$

τ_2	τ_1					
	0,1	0,3	1	3	10	30
0,1	0,0201	0,0205	0,0200	0,0200	0,0205	0,0203
0,3	0,0213	0,0205	0,0216	0,0204	0,0205	0,0200
1	0,0200	0,0210	0,0200	0,0203	0,0200	0,0213
3	0,0204	0,0200	0,0201	0,0200	0,0201	0,0200
10	0,0200	0,0200	0,0209	0,0200	0,0204	0,0212
30	0,0213	0,0201	0,0205	0,0218	0,0216	0,0204

Таблица 31

Коэффициент d_3 для $W_{D4}(s)$

τ_1	τ_2					
	0,1	0,3	1	3	10	30
0,1	52,64	52,31	51,52	49,58	44,78	21,06
0,3	52,64	52,64	51,52	49,58	44,78	21,06
1	53,68	53,68	52,64	50,55	44,78	22,53
3	55	55	54,76	52,64	46,53	24,85
10	61,41	60,49	60,49	59,1	52,64	33,93
30	66,25	66,25	66,25	66,25	66,25	52,31

Таблица 27

Коэффициент d_1 для $W_{D4}(s)$

τ_1	τ_2					
	0,1	0,3	1	3	10	30
0,1	0,0204	0,0204	0,0212	0,0203	0,02	0,0210
0,3	0,02	0,02	0,02	0,0205	0,02	0,0207
1	0,0229	0,0205	0,0210	0,02	0,02	0,0203
3	0,0205	0,0215	0,0208	0,02	0,0203	0,02
10	0,02	0,0202	0,02	0,0207	0,02	0,02
30	0,0204	0,0203	0,0204	0,02	0,0210	0,02

Таблица 32

Коэффициент d_3 для $W_{D3}(s)$

τ_1	τ_2					
	0,1	0,3	1	3	10	30
0,1	104,13	104,1	102,5	101,4	96,62	80,6
0,3	104,13	104,1	104,1	101,4	96,62	80,6
1	104,13	104,1	102,5	101,4	98,09	80,6
3	104,13	104,1	104,1	103,3	99	83,75
10	106,7	106,7	106,7	106,7	102,9	89,24
30	116	116	116	113,8	113,3	103,3

Таблица 28

Коэффициент d_2 для $W_{D2}(s)$

τ_1	τ_2					
	0,1	0,3	1	3	10	30
0,1	1,083	1,083	1,1	1,1	1,1	1,126
0,3	1,083	1,083	1,083	1,1	1,1	1,126
1	1,09	1,09	1,077	1,095	1,1	1,126
3	1,074	1,074	1,074	1,09	1,1	1,126
10	1,071	1,071	1,071	1,074	1,09	1,121
30	1,024	1,024	1,026	1,03	1,05	1,094

Таблица 33

Коэффициент d_3 для $W_{D4}(s)$

τ_1	τ_2					
	0,1	0,3	1	3	10	30
0,1	104,1	104,1	104,1	102,9148	98,46	80,6
0,3	104,1	104,1	104,1	103,3049	98,46	80,6
1	104,1	104,1	104,1	103,3049	99	83,75
3	105,7	104,1	104,1	104,1314	99	83,75
10	107,1	107,1	108,3	106,7	102,5	89,24
30	116	116	116	116	113,3	104,1

Таблица 29

Коэффициент d_2 для $W_{D3}(s)$

τ_1	τ_2					
	0,1	0,3	1	3	10	30
0,1	1	1	1,015	1,009	1,046	1,1
0,3	1	1	1	1,008	1,03	1,1
1	0,9792	0,9908	0,9956	1	1,014	1,094
3	0,97	0,97	0,9848	0,9792	1,02	1,074
10	0,9466	0,9466	0,9466	0,9658	0,9792	1,055
30	0,8783	0,8783	0,8783	0,8826	0,9215	1

Анализ параметров компенсаторов C_1 , C_3 и C_4 , которые были найдены путем минимизации интегральных критериев, несмотря на разные варианты оформления, приводит к одинаковой зависимости от запаздывания в области исследований. Также наблюдается почти полное совпадение для вариантов с передаточной функцией канала возмущения $W_{D3}(s)$ и $W_{D4}(s)$. В основном влияние величины запаздывания на настройку компенсатора начинает существенно сказываться при значениях τ_2 выше 3.

Теоретические варианты синтеза компенсаторов. Для определения параметров идеального

компенсатора воспользуемся формулой (11). В случае $W_{D1}(s)$ получается следующий вариант без шансов на прямую реализацию:

$$C_{10}(s) = \frac{1}{0,87 \exp(-\tau_1 s) \frac{1}{(3000s^2 + 80s + 1)} \frac{1}{(5s + 1)} \frac{1}{(25s + 1)}}, \quad (16)$$

или

$$C_{10} = \frac{375000s^4 + 10^5 s^3 + 5525s^2 + 110s + 1}{0,87 \exp(-\tau_1 s)}. \quad (17)$$

Для $W_{D2}(s)$ порядок числителя также выше знаменателя:

$$C_{20} = \frac{375000s^4 + 10^5 s^3 + 5525s^2 + 110s + 1}{910s^2 + 70s + 1} \times \frac{\exp((\tau_1 - \tau_2)s)}{0,87}. \quad (18)$$

Для передаточной функции канала возмущения $W_{D3}(s)$ можно получить формулу с возможностью прямой реализации идеального компенсатора.

$$C_{30} = \frac{375000s^4 + 10^5 s^3 + 5525s^2 + 110s + 1}{232,5s^4 + 277,3s^3 + 111,3s^2 + 18s + 1} \times \frac{\exp((\tau_1 - \tau_2)s)}{0,87}. \quad (19)$$

И наконец, в последнем варианте передаточная функция идеального компенсатора идентична с точки зрения реализуемости C_{20} :

$$C_{40} = \frac{375000s^4 + 10^5 s^3 + 5525s^2 + 110s + 1}{110,3s^2 + 17,23s + 1} \times \frac{\exp((\tau_1 - \tau_2)s)}{0,87}. \quad (20)$$

Как было отмечено выше, из всех компенсаторов физически реализуемым может быть только C_{30} в случае, если $\tau_1 < \tau_2$. Во всех остальных случаях может быть применена приближенная реализация.

Для решения проблемы превышения порядка числителя над знаменателем в литературе встречаются разные варианты.

Один из них – обеспечить приблизительную реализуемость для C_{20} и C_{40} «деление под углом» полиномов с использованием в компенсаторе той части, которая может быть физически осуществима. При этих преобразованиях может быть два варианта передаточной

функции компенсатора в зависимости от момента остановки процесса деления: а) останавливаем деление, когда степени знаменателя и числителя сравняются; б) останавливаем деление, когда степень числителя будет на один порядок меньше, чем знаменателя.

Для C_{20} можно получить варианты:

$$C_{21} = \frac{-414,3s^2 + 36,56s + 1,149}{910s^2 + 70s + 1} e^{(\tau_1 - \tau_2)s}; \quad (21)$$

$$C_{22} = \frac{68,43s + 1,605}{910s^2 + 70s + 1} e^{(\tau_1 - \tau_2)s}. \quad (22)$$

Для C_{40} можно получить варианты:

$$C_{41} = \frac{-4995s^2 - 305,2s + 1,149}{110,3s^2 + 17,23s + 1} e^{(\tau_1 - \tau_2)s}; \quad (23)$$

$$C_{42} = \frac{474,99s + 46,43}{110,3s^2 + 17,23s + 1} e^{(\tau_1 - \tau_2)s}. \quad (24)$$

Как вариант решения проблемы порядков, может быть искусственное его увеличение за счет введения в знаменатель дополнительных корней, как было предложено в (14):

$$C_{50} = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}{(a_{m-1} s^m + \dots + a_0 s + 1)(\tau_s s + 1)^{n-m}}, \quad (25)$$

где n, m – порядок числителя и знаменателя; τ_s – некоторое минимальное значение постоянной времени, которое может реализовано системой исходя из времени квантования (sample time).

В нашем случае могут быть использованы следующие компенсаторы.

$$C_{23} = \frac{375000s^4 + 10^5 s^3 + 5525s^2 + 110s + 1}{(910s^2 + 70s + 1)(4 \cdot 10^{-4} s^2 + 0,04s + 1)} \times \frac{\exp((\tau_1 - \tau_2)s)}{0,87}; \quad (26)$$

$$C_{43} = \frac{375000s^4 + 10^5 s^3 + 5525s^2 + 110s + 1}{(110,3s^2 + 17,23s + 1)(4 \cdot 10^{-4} s^2 + 0,04s + 1)} \times \frac{\exp((\tau_1 - \tau_2)s)}{0,87}, \quad (27)$$

где C_{23}, C_{43} – для второго и четвертого варианта соответственно.

Искусственно увеличить порядок можно не только с учетом технической реализации, но и привлечением численной оптимизации, как это было осуществлено для C_1 – C_4 с использованием интегрального критерия. Для рассмотренных

вариантов структур могут быть предложены следующие варианты:

$$C_{15} = \frac{125s^2 + 20s + 1}{((g_1s)^2 + \sqrt{2}g_1s + 1)((g_2s)^2 + \sqrt{2}g_2s + 1)}; \quad (28)$$

$$C_{24} = \frac{37,5(10s)^4 + 10^5s^3 + 5525s^2 + 110s + 1}{(910s^2 + 70s + 1)(h_2s^2 + h_1s + h_0)}; \quad (29)$$

$$C_{25} = \frac{375000s^4 + 10^5s^3 + 5525s^2 + 110s + 1}{(910s^2 + 70s + 1)(g_1s + 1)(g_2s + 1)} \times \frac{\exp((\tau_1 - \tau_2)s)}{0,87}; \quad (30)$$

$$C_{44} = \frac{37,5(10s)^4 + 10^5s^3 + 5525s^2 + 110s + 1}{(110,3s^2 + 17,33s + 1)(h_2s^2 + h_1s + h_0)}; \quad (31)$$

$$C_{45} = \frac{375000s^4 + 10^5s^3 + 5525s^2 + 110s + 1}{(110,3s^2 + 17,33s + 1)(g_1s + 1)(g_2s + 1)} \times \frac{\exp((\tau_1 - \tau_2)s)}{0,87}. \quad (32)$$

Сравнение и обсуждение результатов настройки. Настроенные параметры компенсаторов были промоделированы в одинаковых условиях при подаче на канал возмущения единичного воздействия типа ступенька. При этом были определены максимальное отклонение u_{max} , максимальное отклонение регулирующего органа исполнительного механизма x_{max} , значение интегрального критерия ISE_{min} . Отклонение исполнительного механизма во многом определяют параметры надежности и серьезно влияют на экономические показатели функционирования.

Для вариантов с компенсатором, которые получались расчетным путем, а не путем минимизации интегрального критерия, производился учет времени запаздывания в тех случаях, когда это физически реализуемо.

Для тех же структур было произведено моделирование при формировании на канале возмущения случайного сигнала и произведена оценка среднеквадратического отклонения значения на выходе σ_y и после исполнительного механизма σ_x . Значения параметров u_{max} , x_{max} , ISE_{min} , σ_y , σ_x были соотнесены с такими же данными для системы без компенсатора $u_{max,0}$, $x_{max,0}$, $ISE_{min,0}$, $\sigma_{y,0}$, $\sigma_{x,0}$. Далее был произведен поиск максимального, минимального, среднего и медианного значений. Данные были отсортированы для каждого из вариантов системы по увеличению медианного значения $ISE_{min,0} / ISE_{min}$ и сведены в табл. 34–53.

Таблица 34

$u_{max,0} / u_{max}$ для $W_{D1}(s)$

Тип компенсатора	max	average	median	min
ФНЧ	1,322	1,260	1,268	1,148
C_2	1,310	1,257	1,266	1,162
ФВЧ	1,308	1,257	1,263	1,165
C_1	2,3	2,066	2,126	1,624
C_4	3,6	3,065	3,235	2,04
C_{15}	15,31	7,456	6,045	5,397
C_3	5,678	4,571	4,91	2,411

Таблица 35

$x_{max} / x_{max,0}$ для $W_{D1}(s)$

Тип компенсатора	max	average	median	min
ФНЧ	1,458	1,417	1,418	1,357
C_2	1,448	1,413	1,427	1,365
ФВЧ	1,441	1,377	1,384	1,276
C_1	2,867	2,847	2,859	2,806
C_4	2,806	2,785	2,785	2,754
C_{15}	15419	4586	2614	1079
C_3	57,02	44,5	39,97	39,3

Таблица 36

$ISE_{min,0} / ISE_{min}$ для $W_{D1}(s)$

Тип компенсатора	max	average	median	min
ФНЧ	2,634	2,305	2,322	1,797
C_2	2,628	2,308	2,324	1,819
ФВЧ	2,666	2,313	2,361	1,657
C_1	11,34	8,729	8,803	4,987
C_4	20,92	15,57	15,84	7,606
C_{15}	471,4	144,8	84,8	63,73
C_3	144,2	92,30	97,19	21,62

Таблица 37

$\sigma_x / \sigma_{x,0}$ для $W_{D1}(s)$

Тип компенсатора	max	average	median	min
ФНЧ	2,528	2,316	2,285	2,026
C_2	2,451	2,304	2,26	2,166
ФВЧ	2,436	2,299	2,252	2,176
C_1	24,25	21,84	21,1	19,96
C_4	24,16	21,78	20,96	20,2
C_{15}	$9,35 \cdot 10^5$	$2,61 \cdot 10^5$	$1,56 \cdot 10^5$	$4,66 \cdot 10^4$
C_3	3575	2816	2767	2324

Таблица 38

$\sigma_y / \sigma_{y,0}$ для $W_{D1}(s)$

Тип компенсатора	max	average	median	min
ФНЧ	1,084	1,05	1,054	1,018
C_2	1,103	1,049	1,052	1,01
ФВЧ	1,069	1,04	1,046	1,006
C_1	1,083	0,9823	0,9733	0,9278
C_4	0,8907	0,6960	0,6542	0,6181
C_{15}	43,44	12,9	8,358	0,5488
C_3	1,061	0,7459	0,6609	0,6195

Для структуры ($W_{D1}(s)$) с самым «быстрым» возмущением произвести расчет идеального компенсатора не представляется возможным. Однако искусственное увеличение порядка знаменателя позволяет существенно повысить эффективность применения компенсатора с помощью решений C_{15} и C_3 (табл. 34–38). При этом решение C_{15} оказалось с наилучшим показателем по уменьшению интегрального критерия и динамического отклонения на выходе. Однако это достигается за счет увеличения максимального отклонения на начальном этапе (табл. 35). Такие воздействия обычно для реальных систем не достижимы. Также оно проигрывает по чувствительности к шумам. Увеличение амплитуды шума наблюдается как на исполнительном механизме (табл. 37), так и на выходе (табл. 38). Недостатком также является зависимость эффективности подавления возмущения от параметров системы.

Результаты работы простейших компенсаторов C_2 , ФНЧ и ФВЧ оказались сравнимыми и качеством работы достаточно низким. Вариант с C_4 оказался примерно в два раза лучше, чем с компенсатором C_1 . При этом существенного увеличения отклонения исполнительного механизма для этого не потребовалось, нет существенной разницы с уровнем шума на исполнительном механизме от более высокого порядка знаменателя этого компенсатора. Следует отметить, что компенсаторы C_1 и C_4 одинаково эффективно работают при всех вариациях запаздывания.

В целом вариант с использованием компенсатора C_4 оказался самым сбалансированным, значительно уменьшилось влияние возмущения на выход без существенного увеличения шума (табл. 38). Это единственный компенсатор, который обеспечивает снижение шумовой составляющей на выходе при всех исследованных вариантах. Применение C_3 возможно только при отсутствии существенной амплитуды шума после датчика и/или при применении схем шумоподавления [58]. Но вариант малоприменим на практике из-за повышенного значения $\sigma_x / \sigma_{x,0}$ и необходимости больших отклонений исполнительного механизма для эффективного функционирования.

Таблица 39

 $u_{\max,0} / u_{\max}$ для $W_{D2}(s)$

Тип компенсатора	max	average	median	min
C_{22}	1,613	1,537	1,556	1,331
C_{21}	1,941	1,799	1,822	1,509
C_2	6,967	3,127	2,726	1,769
C_4	31,14	13,01	10,88	3,899
C_1	31,25	12,99	10,83	3,9
C_3	59,28	30,29	30,64	12,81
C_{25}	3475	706,1	10,88	4,726
C_{24}	24540	2904	365,7	4,572
C_{23}	3634	1968	2447	4,726

Таблица 40

 $x_{\max} / x_{\max,0}$ для $W_{D2}(s)$

Тип компенсатора	max	average	median	min
C_{22}	1,767	1,63	1,614	1,582
C_{21}	1,502	1,394	1,383	1,336
C_2	1,273	1,198	1,223	1,083
C_4	1,733	1,425	1,445	0,9949
C_1	1,733	1,424	1,442	0,9949
C_3	20,72	10,39	9,735	1,9452
C_{25}	3,261	3,188	3,214	3,013
C_{24}	6,470	4,545	4,971	1,293
C_{23}	3,261	3,251	3,249	3,235

Таблица 41

 $ISE_{\min,0} / ISE_{\min}$ для $W_{D2}(s)$

Тип компенсатора	max	average	median	min
C_{22}	2,626	2,365	2,435	1,644
C_{21}	4,797	4,137	4,138	2,591
C_2	77,71	18,11	11,57	4,911
C_4	665,9	198,8	138,2	30,03
C_1	666,1	198,8	138,3	30,04
C_3	2780	1264	1397	205,2
C_{25}	$2,1 \cdot 10^7$	$2,58 \cdot 10^6$	$1,88 \cdot 10^5$	31,1
C_{24}	$1,24 \cdot 10^9$	$1,17 \cdot 10^8$	353849	31,37
C_{23}	$2,1 \cdot 10^7$	$1,01 \cdot 10^7$	$1,18 \cdot 10^7$	31,10

Таблица 42

 $\sigma_x / \sigma_{x,0}$ для $W_{D2}(s)$

Тип компенсатора	max	average	median	min
C_{22}	3,086	2,973	2,962	2,688
C_{21}	2,508	2,44	2,471	2,165
C_2	2,806	2,601	2,619	2,168
C_4	16,92	13,49	14,34	6,265
C_1	16,91	13,45	14,28	6,268
C_3	1735	891,5	883,3	162,3
C_{25}	1051	278,9	264	84,46
C_{24}	5100	708,6	309,2	4,993
C_{23}	295,1	276,8	269,3	264,7

Таблица 43

 $\sigma_y / \sigma_{y,0}$ для $W_{D2}(s)$

Тип компенсатора	max	average	median	min
C_{22}	1,2542	1,0707	1,0678	0,9750
C_{21}	1,1636	1,0092	1,0093	0,9362
C_2	0,9	0,6681	0,7042	0,3373
C_4	0,5834	0,2951	0,2721	0,1554
C_1	0,5833	0,2953	0,2722	0,1558
C_3	0,2275	0,1651	0,1537	0,0961
C_{25}	471,1	44,69	8,544	0,0547
C_{24}	0,4289	0,0849	0,0309	$4,05 \cdot 10^{-4}$
C_{23}	0,4070	0,1209	0,1104	$6,24 \cdot 10^{-4}$

Для варианта системы с $W_{D2}(s)$ (табл. 39–43) самый худший результат показали компенсаторы с делением многочленов и отбрасыванием элементов с дифференцированием. Результаты

их хуже, чем с использованием в качестве компенсатора звена усиления C_2 . Самый лучший вариант был получен для компенсатора C_{23} . Правда, минимальное значение понижения интегрального критерия (≈ 31) близко для нескольких вариантов компенсаторов ($C_{23}, C_{24}, C_{25}, C_1, C_4$). По этому критерию лучшие результаты наблюдаются у компенсатора C_3 . И в целом, для обеспечения стабильных показателей подавления возмущения по максимуму данный компенсатор, как и в предыдущем случае, предпочтителен. Еще следует отметить, что для этого варианта системы компенсатор C_3 обеспечивает лучшее снижение шумовой составляющей на выходе.

В отличие от предыдущей системы, результаты C_1 и C_4 практически совпадают. Данные варианты обеспечивают хорошее уменьшение интегрального показателя и максимального отклонения при небольших требованиях к исполнительному механизму без значительного увеличения помех на ИМ и их уменьшения на выходе.

Таблица 44

$u_{\max,0} / u_{\max}$ ДЛЯ $W_{D3}(s)$

Тип компенсатора	max	average	median	min
C_2	2,046	1,488	1,415	1,262
ФНЧ	1,939	1,502	1,453	1,267
ФВЧ	2,050	1,515	1,451	1,266
C_1	6,481	3,561	3,178	2,029
C_4	9,772	3,885	3,204	2,029
C_3	62,53	24,18	27,89	3,969
C_{30}	129976	18760	3682	3,387

Таблица 45

$x_{\max} / x_{\max,0}$ ДЛЯ $W_{D3}(s)$

Тип компенсатора	max	average	median	min
C_2	1,413	1,351	1,369	1,268
ФНЧ	1,438	1,383	1,42	1,254
ФВЧ	1,464	1,38	1,404	1,25
C_1	2,761	2,513	2,564	1,892
C_4	2,760	2,525	2,576	2,073
C_3	50,19	30,63	30,73	9,799
C_{30}	22,77	22,56	22,66	22,00

Данный вариант исследованной системы с $W_{D3}(s)$ характеризуется возможностью расчета передаточной функции идеального компенсатора C_{30} . Для вариантов обеспечивается максимальное подавление возмущения, однако эффективность такого решения резко снижалась в тех случаях, когда исчезала возможность компенсации запаздывания. Также этот вариант характеризуется резким увеличением шумов на ИМ (табл. 47). В таких случаях более эффективным оказывался вариант с компенсатором C_3 . Следует отметить, что вариант C_3 обеспечивает свое качество подавления за счет формирования максимального отклонения ИМ (табл. 45).

Таблица 46

$ISE_{\min,0} / ISE_{\min}$ ДЛЯ $W_{D3}(s)$

Тип компенсатора	max	average	median	min
C_2	6,467	3,41	3,048	2,178
ФНЧ	6,258	3,433	3,092	2,176
ФВЧ	6,672	3,492	3,125	2,228
C_1	33,80	20,06	18,12	7,836
C_4	133,6	31,36	19,04	7,836
C_3	4822	1658	1638	58,43
C_{30}	$1,40 \cdot 10^{10}$	$1,40 \cdot 10^9$	$2,36 \cdot 10^7$	23,13

Таблица 47

$\sigma_x / \sigma_{x,0}$ ДЛЯ $W_{D3}(s)$

Тип компенсатора	max	average	median	min
C_2	2,235	2,041	2,017	1,761
ФНЧ	2,372	2,123	2,118	1,749
ФВЧ	2,543	2,157	2,146	1,670
C_1	22,89	19,68	21,17	9,584
C_4	22,91	20,34	21,10	15,34
C_3	3293	2024	2182	606,9
C_{30}	305,1	276,7	264,5	260,9

Таблица 48

$\sigma_y / \sigma_{y,0}$ ДЛЯ $W_{D3}(s)$

Тип компенсатора	max	average	median	min
C_2	1,083	0,9606	0,9922	0,7786
ФНЧ	1,0903	0,9748	1,0138	0,7725
ФВЧ	1,0835	0,9736	1,005	0,7726
C_1	0,9958	0,6875	0,7047	0,3977
C_4	0,9985	0,7019	0,7263	0,3821
C_3	0,8170	0,3193	0,2046	0,1724
C_{30}	0,6601	0,1286	0,01784	$8,1 \cdot 10^{-5}$

Таблица 49

$u_{\max,0} / u_{\max}$ ДЛЯ $W_{D4}(s)$

Тип компенсатора	max	average	median	min
C_{42}	0,02756	0,02722	0,02717	0,02696
C_{41}	0,452	0,4319	0,4297	0,4225
C_2	2,025	1,48	1,408	1,257
C_{45}	5,713	2,944	3,163	1,858
C_4	9,172	3,806	3,163	2,005
C_1	9,179	3,779	3,153	2,005
C_3	53,69	23,72	29,54	3,915
C_{43}	2735	473,5	47,11	3,089
C_{44}	17083	997,7	119,3	3,322

Таблица 50

$x_{\max} / x_{\max,0}$ ДЛЯ $W_{D4}(s)$

Тип компенсатора	max	average	median	min
C_{42}	37,5	36,97	37,05	36,39
C_{41}	7,176	7,091	7,118	6,905
C_2	1,416	1,354	1,372	1,271
C_{45}	3,26	3,112	3,153	2,497
C_4	2,762	2,541	2,597	2,084
C_1	2,762	2,538	2,598	2,073
C_3	50,18	31,09	31,40	9,535
C_{43}	26,69	26,43	26,56	25,78
C_{44}	52,14	31,83	31,16	3,375

Таблица 51

 $ISE_{min,0} / ISE_{min}$ для $W_{D4}(s)$

Тип компенсатора	max	average	median	min
C_{42}	$6,99 \cdot 10^{-4}$	$6,91 \cdot 10^{-4}$	$6,9 \cdot 10^{-4}$	$6,86 \cdot 10^{-4}$
C_{41}	0,2571	0,2164	0,2062	0,1982
C_2	6,336	3,364	3,012	2,159
C_{45}	49,51	14	9,854	4,453
C_4	128,7	30,34	18,51	7,689
C_1	128,8	30,36	18,52	7,691
C_3	4537	1488	1539	57,25
C_{43}	$1,28 \cdot 10^7$	$1,93 \cdot 10^6$	6904	21,88
C_{44}	$9,57 \cdot 10^8$	$3,03 \cdot 10^7$	42388	23,29

Таблица 52

 $\sigma_x / \sigma_{x,0}$ для $W_{D4}(s)$

Тип компенсатора	max	average	median	min
C_{42}	83,89	77,05	74,44	73,33
C_{41}	48,4	44,1	42,28	41,43
C_2	2,233	2,053	2,031	1,766
C_{45}	229,3	131,9	150	25,48
C_4	22,86	20,46	21,21	15,85
C_1	22,85	20,41	21,09	15,34
C_3	3285	2052	2247	590,8
C_{43}	1908	1735	1661	1631
C_{44}	17553	3008	1826	15,66

Таблица 53

 $\sigma_y / \sigma_{y,0}$ для $W_{D4}(s)$

Тип компенсатора	max	average	median	min
C_{42}	28,46	27,49	27,42	26,6
C_{41}	3,454	3,305	3,298	3,125
C_2	1,089	0,9681	1,0013	0,7849
C_{45}	0,8759	0,6137	0,6215	0,4094
C_4	1,012	0,7079	0,7348	0,3714
C_1	1,013	0,7081	0,7344	0,3713
C_3	0,8227	0,3160	0,2049	0,1601
C_{43}	0,6975	0,3534	0,2173	0,1855
C_{44}	0,6950	0,1557	0,06363	$7,04 \cdot 10^{-4}$

Результаты работы компенсаторов C_1 и C_4 совпадают в меньшей степени, чем при $W_{D2}(s)$. C_4 работает немного лучше по уменьшению интегрального показателя качества и максимального отклонения ИМ.

Для последней системы характерно, что получение реализуемого путем деления многочленов приводит к ухудшению показателей работы системы, притом по всем показателям качества. В отличие от системы с $W_{D2}(s)$, вариант с численной оптимизацией добавочного элемента в знаменателе занимает низкие позиции по качеству и при этом приводит к большой нагрузке на ИМ (табл. 52). Единственный плюс этого компенсатора по отношению к остальным – снижение шумовой составляющей на выходе системы (табл. 53).

Компенсаторы C_1 и C_4 для данной системы показали средние и малоотличимые результаты.

Сравнивать трех лидеров достаточно сложно. Инвариантная система с C_{44} обеспечивает высокие показатели, однако для нее характерна высокая зависимость этих показателей от величины запаздывания, т. е. физической реализуемости. Минимальные показатели компенсатора C_3 выше, чем у C_{44} и C_{43} , также для данного компенсатора характерна меньшая зависимость от соотношения величины запаздывания. Преимуществом C_{43} является простота синтеза по сравнению с C_3 и C_{44} .

Следует отметить, что несмотря на высокое совпадения по динамике передаточных функций канала возмущения, результаты работы компенсаторов несколько различаются.

Заключение. Выбор подхода к синтезу компенсатора во многом определяется особенностью соотношения динамики канала обратной связи и возмущения, наличием шумов в измерительном канале возмущения и целей применения компенсатора.

Согласование числителя и знаменателя не позволяет успешно решить проблему порядков компенсатора, более того, это может однозначно ухудшить работу комбинированной системы.

Для обеспечения максимального подавления возмущения при их резком изменении стоит использовать, по возможности, «идеальный» расчетный компенсатор. Проблему превышения порядка числителя над знаменателем можно решить путем искусственного введения динамических звеньев с минимальной постоянной, которое может быть обеспечено техническим устройством реализации компенсатора, как это было сделано для C_3 , C_{23} и C_{43} . Для применения этих типов компенсаторов стоит убедиться в возможности исполнительных механизмов обеспечить необходимое управляющее воздействие. Также следует обратить внимание на наличие шумов в измерительном канале.

При высоком уровне шума в измерительном канале и желании снизить нагрузки на ИМ необходимо применять компенсаторы в виде форсирующего звена типа C_1 и C_4 . Использование C_4 может обеспечить лучшее качество, чем C_1 . В целом, данного типа компенсаторы являются самыми сбалансированными: существенно уменьшают отклонения без больших требований к исполнительному механизму, не так сильно зависимы от изменения параметров динамики каналов управления и не способствуют существенному увеличению шума при обработке измерительного сигнала. Данные компенсаторы следует рекомендовать для применения в технологических процессах.

Список литературы

1. Marlin T. E. Process control. New York: McGraw-Hill. 2000. 1018 p.
2. Fujimoto H., Hori Y., Kawamura A. Perfect tracking control based on multirate feedforward control with generalized sampling periods // IEEE Transactions on Industrial Electronics. 2001. Vol. 48 (3). P. 636–644.
3. Isermann R. Digital control systems. Berlin: Springer, 2013. 566 p.
4. Zhou K., Doyle J. C., Glover K. Robust and optimal control. New Jersey: Prentice hall, 1996. 586 p.
5. Elliott S. J., Sutton T. J. Performance of feedforward and feedback systems for active control // IEEE Transactions on Speech and Audio Processing. 1996. Vol. 4 (3). P. 214–223.
6. Process dynamics and control / D. E. Seborg [et al.]. London: Wiley. 2010. 713 p.
7. Seidler R., Noll D., Thiers G. Feedforward and feedback processes in motor control // Neuroimage. 2004. Vol. 22 (4). P. 1775–1783.
8. Levine W. The control handbook. CRC Press and IEEE Press, 1996. 1702 p.
9. Cori R., Maffezzoni C. Practical-optimal control of a drum boiler power plant // Automatica. 1984. Vol. 20 (2). P. 163–173.
10. Abukhalifeh H., Dhib R., Fayed M. Model predictive control of an infrared-convective dryer // Drying Technology. 2005. Vol. 23 (3). P. 497–511.
11. Chue J. M., Hugunin T. D. Feedforward compensation for fly height control in a disk drive. 2010. Nov. 23. US Patent 7,839,595.
12. Li H., Jeong S. K., You S. S. Feedforward control of capacity and superheat for a variable speed refrigeration system // Applied Thermal Engineering. 2009. Vol. 29 (5). P. 1067–1074.
13. Nisenfeld A., Miyasak R. Applications of feedforward control to distillation columns // Automatica. 1973. Vol. 9. P. 319–327.
14. Hovd M., Bitmead R. R. Feedforward for stabilization in the presence of constraints // J. Process Control. 2012. Vol. 22. P. 659–665.
15. A feedforward- feedbackglucose control strategy for type 1 diabetes mellitus / G. Marchetti [et al.] // J. Process Control. 2008. Vol. 18. P. 149–162.
16. Дудников Е. Г. Автоматическое управление в химической промышленности. М.: Химия, 1987. 368 с.
17. Astrom K. J., Hagglund T. Advanced PID Control. Research Triangle Park, USA: ISA Press, 2006. 460 p.
18. Shinskey F. G. Process Control Systems – Application, Design, and Tuning. New York: McGraw-Hill, 1996. 368 p.
19. Coughanowr D. R. Process Systems Analysis and Control. New York, NY, USA: McGraw-Hill, 1991. 566 p.
20. Vilanova R., Visioli A. PID Control in the Third Millennium. London: Springer-Verlag Limited, 2012. 600 p.
21. Brosilow C., Joseph B. Techniques of model-based control. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 2002. 680 p.
22. Hast M., Häggglund T. Design of Optimal Low-Order Feedforward Controllers // IFAC Proceedings. 2012. Vol. 45 (3). P. 483–488.
23. Johansson B. Feedforward control in dynamic situations: PhD dissertation. Linköping University. 2003. 100 p.
24. Garcia C., Morari M. Internal model control. A unifying review and some new results // Industrial & Engineering Chemistry Process Design and Development. 1982. Vol. 21 (2). P. 308–323.
25. Vilanova R. Feedforward control for uncertain systems. Internal model control approach // Proceedings of the IEEE Conference on Emerging Technologies and Factory Automation. 2007. Petras, Greece, 25–28 September. 2007. P. 418–425.
26. Vilanova R., Arrieta O., Ponsa, P. IMC based feedforward controller framework for disturbance attenuation in uncertain systems // ISA Trans. 2009. Vol. 48. P. 439–448.
27. Elso J., Gil-Martínez M., García-Sanz M. Quantitative feedback-feedforward control for model matching and disturbance rejection // IET Control Theory Appl. 2013. Vol. 7. P. 894–900.
28. Morari M., Zafiriou E. Robust Process Control. NJ: Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1989. 487 p.
29. Гринюк Д. А. Компенсаторы для промышленных объектов // Будущее машиностроения России: сб. докл. Четырнадцатой Всероссийской конф. молодых ученых и специалистов, Москва, 21–24 сент. 2021 г.: в 2 т. М., 2022. Т. 2. С. 268–273.
30. Настройка инвариантных систем для промышленных решений / Д. А. Гринюк [и др.] // Химическая технология и техника: материалы 85-й науч.-техн. конф. проф.-преподават. состава, науч. сотрудников и аспирантов (с междунар. участием), Минск, 1–13 февраля 2021 г. Минск: БГТУ. 2021. С. 243–245.

31. Оптимизация времени квантования каскадной системы с компенсатором / Д. А. Гринюк [и др.] // Химическая технология и техника: материалы 86-й науч-техн. конф. проф.-преподават. состава, науч. сотрудников и аспирантов, Минск, 31 января – 12 февр. 2022 г. Минск: БГТУ, 2022. С. 360–362.
32. Guzman J. L., Hagglund T. Simple tuning rules for feedforward compensators // *Journal of Process Control*. 2011. Vol. 21 (1). P. 92–102.
33. Skogestad S. Simple analytic rules for model reduction and PID controller tuning // *Journal of Process Control*. 2003. Vol. 13 (4). P. 291–309.
34. Experimental evaluation of feedforward tuning rules / F. Garcia-Manas [et al.] // *Control Engineering Practice*. 2021. Vol. 114. P. 104877.
35. Predictive feed-forward compensator for dead-time processes / A. Pawlowski [et al.] // *IFAC-PapersOnLine*. 2017. Vol. 50 (1). P. 1239–1244. DOI: 10.1016/j.ifacol.2017.08.348.
36. On the filtered Smith predictor with feedforward compensation / C. Rodríguez [et al.] // *Journal of Process Control*. 2016. Vol. 41. P. 35–46. DOI: 10.1016/j.jprocont.2016.02.00.
37. Goodwin G. C., Graebe S. F., Salgado M. E. *Control system design*. New Jersey: Prentice Hall, 2001. 883 p.
38. Lewin D.R., Scali C. Feedforward control in the presence of uncertainty // *Ind. Eng. Chem. Res.* 1988. Vol. 27. P. 2323–2331.
39. Acceleration feedforward control against rotational disturbance in hard disk drives / A. Jinzenji [et al.] // *IEEE Transactions on Magnetics*. 2001. Vol. 37 (2). P. 888–893.
40. Elliott S. J. Optimal controllers and adaptive controllers for multichannel feedforward control of stochastic disturbances // *IEEE Transactions on Signal Processing*. 2000. Vol. 48 (4). P. 1053–1060.
41. Kempf C. J., Kobayashi, S. Disturbance observer and feedforward design for a high-speed direct-drive positioning table // *IEEE Transactions on Control Systems Technology*. 1999. Vol. 7 (5). P. 513–526.
42. Ghosh R., Narayanan, G. Generalized feedforward control of single-phase PWM rectifiers using disturbance observers // *IEEE Transactions on Industrial Electronics*. 2007. Vol. 54 (2). P. 984–993.
43. Yan M. T., Shiu Y. J. Theory and application of a combined feedback-feedforward control and disturbance observer in linear motor drive wire-edm machines // *International Journal of Machine Tools and Manufacture*. 2008. Vol. 48 (3). P. 388–401.
44. Improved coordinated response and disturbance rejection in the critical sections of paper machines / M. Anibal Valenzuela [et al.] // *IEEE Transactions on Industry Applications*. 2007. Vol. 43 (3). P. 857–869.
45. Corripio A. B. *Tuning of industrial control systems*. Research Triangle Park, USA: ISA Press, 2015. 255 p.
46. Altmann W. *Practical process control for engineers and technicians*. Oxford: Newnes, 2005. 290 p.
47. Guzman J., Hagglund T. Selecting control schemes and tuning rules in feedforward control // *IFAC-PapersOnLine*. 2023. Vol. 56. P. 3253–3258. DOI: 10.1016/j.ifacol.2023.10.1465.
48. Industrial feed-forward control technology: a review / L. Liu [et al.] // *Journal of Intelligent Manufacturing*. 2019. Vol. 30. DOI: 10.1007/s10845-018-1399-6.
49. Stojanovic V., Nedic N. A Nature inspired parameter tuning approach to cascade control for hydraulically driven parallel robot platform // *J. Optim. Theory Appl.* 2016. Vol. 168. P. 332–347. DOI: 10.1007/s10957-015-0706-z.
50. Barkefors A., Sternad, M. Design and analysis of linear quadratic Gaussian feedforward controllers for active noise control // *IEEE Press*. 2014. P. 1777–1791.
51. Stojanovic V., Nedic N. Joint state and parameter robust estimation of stochastic nonlinear systems // *International Journal of Robust & Nonlinear Control*. 2016. Vol. 26 (14). P. 3058–3074.
52. Adam E., Marchetti J. L. Designing and tuning robust feedforward controllers // *Computers & Chemical Engineering*. 2004. Vol. 28 (9). P. 1899–1911.
53. Ferreres G., Roos C. Efficient convex design of robust feedforward controllers // *Proceedings of the 44th IEEE conference on decision and control*. 2005. P. 6460–6465.
54. Robust feedforward tracking control based on sudden disturbance observer and zpet control for optical disk re-cording system / T. Miyazaki [et al.] // *Proceedings of the 8th IEEE international workshop on advanced motion control*. 2004. P. 353–358.
55. Adaptive feedforward and feedback control schemes for sliding mode controlled power converters / S. C. Tan [et al.] // *IEEE Transactions on Power Electronics*. 2006. Vol. 21 (1). P. 182–192.
56. Ko P. J., Wang Y. P., Tien S. C. Inverse-feedforward and robust-feedback control for high-speed operation on piezo-stages // *International Journal of Control*. 2013. Vol. 86 (2). P. 197–209.
57. Анализ эффективности ПИД-регуляторов с двумя степенями свободы с помощью интегральных критериев / Д. А. Гринюк [и др.] // *Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика*. 2018. № 2 (212). С. 82–88.

58. Уменьшение влияния помех измерительного канала на замкнутую систему регулирования / Д. А. Гринюк [и др.] // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2023. № 2 (272). С. 58–70. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-272-2-10.

References

1. Marlin T. E. Process control. New York, McGraw-Hill Publ., 2000. 1018 p.
2. Fujimoto H., Hori Y., Kawamura A. Perfect tracking control based on multirate feedforward control with generalized sampling periods. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2001, vol. 48 (3), pp. 636–644.
3. Isermann R. Digital control systems. Berlin, Springer Publ., 2013. 566 p.
4. Zhou K., Doyle J. C., Glover K., Robust and optimal control. New Jersey, Prentice Hall Publ., 1996. 586 p.
5. Elliott S. J., Sutton T. J. Performance of feedforward and feedback systems for active control. *IEEE Transactions on Speech and Audio Processing*, 1996, vol. 4 (3), pp. 214–223.
6. Seborg D. E., Mellichamp D. A., Edgar T. F., Doyle F. J. Process dynamics and control. London, Wiley Publ., 2010. 713 p.
7. Seidler R., Noll D., Thiers G. Feedforward and feedback processes in motor control. *Neuroimage*, 2004, vol. 22 (4), pp. 1775–1783.
8. Levine W. The control handbook. CRC Press and IEEE Press Publ., 1996. 1702 p.
9. Cori R., Maffezzoni C. Practical-optimal control of a drum boiler power plant. *Automatica*, 1984, vol. 20 (2), pp. 163–173.
10. Abukhalifeh H., Dhib R., Fayed M. Model predictive control of an infrared-convective dryer. *Drying Technology*, 2005, vol. 23 (3), pp. 497–511.
11. Chue J. M., Hugunin T. D. Feedforward compensation for fly height control in a disk drive, 2010, Nov. 23. US Patent 7,839,595.
12. Li H., Jeong S. K., You S. S. Feedforward control of capacity and superheat for a variable speed refrigeration system. *Applied Thermal Engineering*, 2009, vol. 29 (5), pp. 1067–1074.
13. Nisenfeld A., Miyasak R. Applications of feedforward control to distillation columns. *Automatica*, 1973, vol. 9, pp. 319–327.
14. Hovd M., Bitmead R. R. Feedforward for stabilization in the presence of constraints. *J. Process Control*, 2012, vol. 22, pp. 659–665.
15. Marchetti G., Barolo M., Jovanovic L., Zisser H., Seborg D. E. A feedforward-feedback glucose control strategy for type 1 diabetes mellitus. *J. Process Control*, 2008, vol. 18, pp. 149–162.
16. Dudnikov Ye. G. *Avtomaticheskoye upravleniye v khimicheskoy promyshlennosti* [Automatic control in the chemical industry]. Moscow, Khimiya Publ., 1987. 368 p. (In Russian).
17. Astrom K.J., Hagglund T. Advanced PID Control. Research Triangle Park, USA, ISA Press Publ., 2006. 460 p.
18. Shinskey F. G. Process Control Systems – Application, Design, and Tuning. New York, McGraw-Hill Publ., 1996. 368 p.
19. Coughanowr D. R. Process Systems Analysis and Control. New York, NY, USA, McGraw-Hill Publ., 1991. 566 p.
20. Vilanova R., Visioli A. PID Control in the Third Millennium. London, Springer-Verlag Limited, 2012. 600 p.
21. Brosilow C., Joseph B. Techniques of model-based control. Englewood Cliffs, Prentice Hall Publ., 2002. 680 p.
22. Hast M., Häggglund T. Design of Optimal Low-Order Feedforward Controllers. *IFAC Proceedings*, 2012, vol. 45 (3), pp. 483–488.
23. Johansson B. Feedforward control in dynamic situations: PhD dissertation. Linköping University, 2003. 100 p.
24. Garcia C., Morari M. Internal model control. A unifying review and some new results. *Industrial & Engineering Chemistry Process Design and Development*, 1982, vol. 21 (2), pp. 308–323.
25. Vilanova R. Feedforward control for uncertain systems. Internal model control approach. *Proceedings of the IEEE Conference on Emerging Technologies and Factory Automation*. 2007. Petras, Greece, 25–28 September, 2007, pp. 418–425.
26. Vilanova R., Arrieta O., Ponsa, P. IMC based feedforward controller framework for disturbance attenuation in uncertain systems. *ISA Trans*, 2009, vol. 48, pp. 439–448.
27. Elso J., Gil-Martínez M., García-Sanz M. Quantitative feedback-feedforward control for model matching and disturbance rejection. *IET Control Theory Appl*, 2013, vol. 7, pp. 894–900.
28. Morari M., Zafiriou E. Robust Process Control. NJ, Prentice Hall, Englewood Cliffs Publ., 1989. 487 p.

29. Hryniuk D. A. Compensators for industrial facilities. *Budushcheye mashinostroyeniya Rossii: sb. dokl. Chetyrnadtsatoy Vserossiyskoy konferentsii molodykh uchenykh i spetsialistov, Moskva, 21–24 sentyabrya, 2021*. [The Future of Mechanical Engineering in Russia: Collection of reports of the Fourteenth All-Russian Conference of Young Scientists and Specialists, Moscow, September 21–24. 2021: in 2 vol.]. Moscow, 2022, vol. 2, pp. 268–273 (In Russian).
30. Hryniuk D. A., Biryukov A. G., Davidovsky N. V., Daineko T. A. Tuning invariant systems for industrial solutions. *Khimicheskaya tekhnologiya i tekhnika: materialy 85-y nauch.-tekhn. konf. prof.-prepodovat. sostava, nauch. sotrudnikov i aspirantov (s mezhdunar. uchastiyem)* [Chemical Technology and Engineering: Proceedings of the 85th Scientific and Technical Conference of Faculty, Researchers and Postgraduates (with International Participation)]. Minsk, 2021, pp. 243–245 (In Russian).
31. Hryniuk D. A., Oliferovich, N. M., Karpovich M. D., Karpyuk P. O. Optimization of the quantization time of a cascade system with a compensator. *Khimicheskaya tekhnologiya i tekhnika: materialy 86-y nauch.-tekhn. konf. prof.-prepodovat. sostava, nauch. sotrudnikov i aspirantov (s mezhdunar. uchastiyem)* [Chemical Technology and Engineering: Proceedings of the 86th Scientific and Technical Conference of Faculty, Researchers and Postgraduates (with International Participation)]. Minsk, BGТУ, 2022, pp. 360–362 (In Russian).
32. Guzman J. L., Hagglund T. Simple tuning rules for feedforward compensators. *Journal of Process Control*, 2011, vol. 21 (1), pp. 92–102.
33. Skogestad S. Simple analytic rules for model reduction and PID controller tuning. *Journal of Process Control*, 2003, vol. 13 (4), pp. 291–309.
34. Garcia-Manas F., Guzman J. L., Rodriguez F., Berenguel M., Hagglund T. Experimental evaluation of feedforward tuning rules. *Control Engineering Practice*, 2021, vol. 114, pp. 104877.
35. Pawlowski A., Rodríguez C., Guzmán J. L., Berenguel M., Dormido S. Predictive feed-forward compensator for dead-time processes. *IFAC-PapersOnLine*, 2017, vol. 50 (1), pp. 1239–1244. DOI: 10.1016/j.ifacol.2017.08.348.
36. Rodríguez C., Normey-Rico J. E., Guzmán J. L., Berenguel M. On the filtered Smith predictor with feedforward compensation. *Journal of Process Control*, 2016, vol. 41, pp. 35–46. DOI: 10.1016/j.jprocont.2016.02.00.
37. Goodwin G. C., Graebe S. F., Salgado M. E. Control system design. New Jersey, Prentice Hall Publ., 2001. 883 p.
38. Lewin D. R., Scali C. Feedforward control in the presence of uncertainty. *Ind. Eng. Chem. Res.*, 1988, vol. 27, pp. 2323–2331.
39. Jinzenji A., Sasamoto T., Aikawa K., Yoshida S., Aruga, K. Acceleration feedforward control against rotational disturbance in hard disk drives. *IEEE Transactions on Magnetics*, 2001, vol. 37 (2), pp. 888–893.
40. Elliott S. J. Optimal controllers and adaptive controllers for multichannel feedforward control of stochastic disturbances. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2000, vol. 48 (4), pp. 1053–1060.
41. Kempf C. J., Kobayashi, S. Disturbance observer and feedforward design for a high-speed direct-drive positioning table. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 1999, vol. 7 (5), pp. 513–526.
42. Ghosh R., Narayanan, G. Generalized feedforward control of single-phase PWM rectifiers using disturbance observers. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2007, vol. 54 (2), pp. 984–993.
43. Yan M. T., Shiu Y. J. Theory and application of a combined feedback-feedforward control and disturbance observer in linear motor drive wire-edm machines. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 2008, vol. 48 (3), pp. 388–401.
44. Anibal Valenzuela M., Bentley J. M., Aguilera P. C., Lorenz R. D. Improved coordinated response and disturbance rejection in the critical sections of paper machines. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 2007, vol. 43 (3), pp. 857–869.
45. Corripio A. B. Tuning of industrial control systems. Research Triangle Park, USA, ISA Press Publ., 2015. 255 p.
46. Altmann W. Practical process control for engineers and technicians. Oxford, Newnes Publ., 2005. 290 p.
47. Guzman J., Hagglund T. Selecting control schemes and tuning rules in feedforward control. *IFAC-PapersOnLine*, 2023, vol. 56, pp. 3253–3258. DOI: 10.1016/j.ifacol.2023.10.1465.
48. Liu L., Tian S., Xue D., Zhang T., Chen, Y.-Q. Industrial feed-forward control technology: a review. *Journal of Intelligent Manufacturing*, 2019, vol. 30. DOI: 10.1007/s10845-018-1399-6.
49. Stojanovic V., Nedic N. A Nature inspired parameter tuning approach to cascade control for hydraulically driven parallel robot platform. *J. Optim. Theory Appl.*, 2016, vol. 168, pp. 332–347. DOI: 10.1007/s10957-015-0706-z.
50. Barkefors A., Sternad M. Design and analysis of linear quadratic Gaussian feedforward controllers for active noise control. *IEEE Press*, 2014, pp. 1777–1791.

51. Stojanovic V., Nedic N. Joint state and parameter robust estimation of stochastic nonlinear systems. *International Journal of Robust & Nonlinear Control*, 2016, vol. 26 (14), pp. 3058–3074.
52. Adam E., Marchetti J. L. Designing and tuning robust feedforward controllers. *Computers & Chemical Engineering*, 2004, vol. 28 (9), pp. 1899–1911.
53. Ferreres G., Roos C. Efficient convex design of robust feedforward controllers. *Proceedings of the 44th IEEE conference on decision and control*, 2005, pp. 6460–6465.
54. Miyazaki T., Ohishi K., Inomata K., Kuramochi K., Koide D., Tokumaru D. Robust feedforward tracking control based on sudden disturbance observer and zpet control for optical disk re-cording system. *Proceedings of the 8th IEEE International workshop on advanced motion control*, 2004, pp. 353–358
55. Tan S. C., Lai Y., Tse C. K., Cheung M. K. Adaptive feedforward and feedback control schemes for sliding mode controlled power converters. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 2006, vol. 21 (1), pp. 182–192.
56. Ko P. J., Wang Y. P., Tien S. C. Inverse-feedforward and robust-feedback control for high-speed operation on piezo-stages. *International Journal of Control*, 2013, vol. 86 (2), pp. 197–209.
57. Hryniuk D. A., Suhorukova I. G., Oliferovich N. M., Orobei I. O. Analysis of the efficiency of PID controllers with two degrees of freedom using integral criteria. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], issue 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2018, no. 2 (212), pp. 82–88 (In Russian).
58. Hryniuk D. A., Oliferovich N. M., Sukhorukova I. G., Deyneka T. A., Klyutko M. V. Reducing the influence of measuring channel interference on a closed-loop control system. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], issue 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2018, no. 2 (272), pp. 58–70 (In Russian). DOI: 10.52065/2520-6141-2023-272-2-10.

Информация об авторах

Гринюк Дмитрий Анатольевич – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры автоматизации производственных процессов и электротехники. Белорусский государственный технологический университет (ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: hryniukda@gmail.com

Дубиковская Екатерина Витальевна – магистрант кафедры автоматизации производственных процессов и электротехники. Белорусский государственный технологический университет (ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: dubikovskayakatya@gmail.com

Олиферович Надежда Михайловна – старший преподаватель кафедры автоматизации производственных процессов и электротехники. Белорусский государственный технологический университет (ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: oliferovich@belstu.by

Сухорукова Ирина Геннадьевна – старший преподаватель кафедры программной инженерии. Белорусский государственный технологический университет (ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: irina_x@rambler.ru

Оробей Игорь Олегович – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры автоматизации производственных процессов и электротехники. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: orobei@tut

Information about the authors

Hryniuk Dzmitry Anatol'yevich – PhD (Engineering), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Automation of Production Processes and Electrical Engineering. Belarusian State Technological University (13a Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: hryniukda@gmail.com

Dubikovskaya Ekaterina Vital'yevna – Master's degree student, the Department of Automation of Production Processes and Electrical Engineering. Belarusian State Technological University (13a Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: dubikovskayakatya@gmail.com

Oliferovich Nadezhda Mikhaylovna – Senior Lecturer, the Department of Automation of Production Processes and Electrical Engineering. Belarusian State Technological University (13a Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: oliferovich@belstu.by

Suhorukova Irina Gennad'yevna – Senior Lecturer, the Department of Software Engineering. Belarusian State Technological University (13a Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: irina_x@rambler.ru

Orobei Igor Olegovich – PhD (Engineering), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Automation of Production Processes and Electrical Engineering. Belarusian State Technological University (13a Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: orobei@tut.by

Поступила после доработки 15.05.2025

ОБРАБОТКА И ПЕРЕДАЧА ИНФОРМАЦИИ PROCESSING AND TRANSMISSION OF INFORMATION

УДК 003.026:004.92

Н. И. Уласевич, Н. А. Жилияк

Белорусский государственный технологический университет

СТЕГАНОГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД НА ОСНОВЕ ВСТРАИВАНИЯ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПОД ЗАКРАШЕННЫЕ УЧАСТКИ В ИЗОБРАЖЕНИЯХ В ФОРМАТЕ SVG

Рассмотрены ключевые характеристики файлов векторной графики, включая уникальную структуру SVG и принципы формирования графических объектов в этом формате. Рассмотрено правило визуального ранжирования для отображения графических объектов. Содержимое файла SVG, отображаемое пользователю, ограничено областью просмотра. Однако при описании фигур в области просмотра необходимо учитывать возможность частичного наложения или полного перекрытия одного элемента другим графическим элементом. На основе анализа вышеперечисленных особенностей параметров отображения и правила отображения геометрических фигур в данной статье обоснован и описан новый стеганографический метод и реализующие его алгоритмы встраивания (извлечения) скрытых данных при использовании векторных изображений формата SVG в качестве стеганоконтейнера. Одним из важных типов элементов таких контейнеров является элемент эллипса. В качестве модифицируемых элементов используются координаты центра фигуры. Внедрение тайной информации осуществляется путем формирования множества ключевых точек, которые затем применяются при построении эллипсов. При этом координаты ключевых точек остаются в пределах существующих фигур, что обеспечивает сохранение визуальной целостности изображения. Метод может использоваться для скрытой передачи данных и защиты электронного контента от несанкционированного применения.

Ключевые слова: стеганография, векторные изображения, SVG-формат, эллипс, правило ранжирования.

Для цитирования: Уласевич Н. И., Жилияк Н. А. Стеганографический метод на основе встраивания дополнительных элементов под закрашенные участки в изображениях в формате SVG // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2025. № 2 (296). С. 76–82.
DOI: 10.52065/2520-6141-2025-296-10.

M. I. Ulasevich, N. A. Zhilyak

Belarusian State Technological University

A STEGANOGRAPHIC METHOD BASED ON EMBEDDING ADDITIONAL ELEMENTS UNDER THE COLORED AREAS IN SVG FORMAT IMAGES

The key features of vector graphics files are considered, including the unique structure of SVG and the principles of forming graphic objects in this format. The rule of visual ranking for displaying graphic objects is considered. The content of SVG file displayed to the user is limited to the viewing area. However, when describing figures in the viewing area it is necessary to take into account the possibility of partial overlapping or full overlapping of one element by another graphic element. On the basis of the analysis of the above mentioned features of display parameters and the rule of displaying geometric figures, this paper substantiates and describes a new steganographic method and algorithms of embedding (extracting) hidden data when using vector images of SVG format as a steganographic container. One of the important types of elements of such containers is an ellipse element. The coordinates of the center of the figure are used as modifiable elements. Implementation of secret information is carried out by forming a set of key points, which are then applied in the construction of ellipses. In this case, the coordinates of key points remain within the existing figures, which ensures the preservation of visual integrity of the image. The method can be used for covert data transmission and protection of electronic content from unauthorized use.

Keywords: steganography, vector graphics, SVG, ellipse, ranking rule.

For citation: Ulasevich N.I., Zhilyak N. A steganographic method based on embedding additional elements under the colored areas in SVG format images. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2025, no. 2 (296), pp. 76–82 (In Russian).

DOI: 10.52065/2520-6141-2025-296-10.

Введение. В настоящий момент информация, обладающая рядом свойств и особенностями использования, приобрела статус одного из важнейших экономических ресурсов. В связи с этим обеспечение безопасности информационных ресурсов является приоритетной задачей в сфере информационных технологий. Данные ресурсы требуют защиты от несанкционированного доступа, хищения, модификации или уничтожения, что обуславливается их высокой ценностью.

Одним из перспективных направлений решения данной проблемы является применение методов цифровой стеганографии, позволяющей осуществлять скрытую передачу данных посредством их внедрения в информационные объекты-носители (стеганоконтейнеры), таким образом, чтобы внесенные изменения не могли быть обнаружены при визуальном отображении [1]. Одним из таких стеганоконтейнеров являются файлы векторной графики, которые в последнее время становятся объектом изучения специалистов в области стеганографии и широко используются при создании web-ресурсов для иконок и логотипов, интерактивных элементов и графиков.

Существует множество форматов, которые хранят векторную графику, например, PDF, AI, EPS, CDR и SVG. Формат SVG (Scalable Vector Graphics) обладает уникальными свойствами из-за использования структуры, основанной на XML-документе, который является текстовым файлом. Из-за данной особенности к таким файлам можно применить методы текстовой стеганографии, методы, используемые для файлов разметки, включающие в себя методы подмены и перестановки атрибутов или метод замены регистров тегов [2–4]. Также возможно использование методов, разработанных для изображений, включающих в себя незначительное изменение существующих координат фигур или изменения цвета изображения [5].

Формат SVG обладает рядом преимуществ по сравнению с другими графическими форматами, включая динамическое отображение данных и интерактивность. Однако расширение сферы его применения в коммерческих web-приложениях для обмена данными или публикация контента сопровождается рисками несанкционированного копирования и распространения информации. Это создает серьезные проблемы в области защиты авторских прав для разработчиков и владельцев веб-ресурсов [6–9].

В данной статье предлагается новый стеганографический метод внедрения (извлечения) данных с использованием векторных изображений, а также описываются алгоритмы его реализации.

Основная часть. Несмотря на то, что SVG-формат является текстовым, его принципиальное значение определяется возможностью предоставлять графические элементы через систему математических координат и параметров. Основными графическими примитивами являются линия, прямоугольник, окружность эллипс, многоугольники и ломаные линии. Они в структуре документа реализуются через систему тэгов с полным набором атрибутов, которые описывают фигуру, учитывая ее особенности. Например, для описания эллипса необходимо использовать тег `<ellipse>` и установить значения атрибутов: sx – координата центра фигуры по оси X , sy – координата центра фигуры по оси Y , rx – величина радиуса по горизонтальной оси [3, 4]. Для создания сложных объектов применяется тег `<path>`, который использует атрибут `-d`, содержащий серию команд и параметров для определения линий фигуры.

Содержимое SVG-файла формируется из графических элементов, порядок отображения которых определяется их расположением в документе. Согласно правилу ранжирования или правилу отображения, элементы, которые были отображены позднее, могут отображаться поверх существующих элементов. Порядок отображения устанавливается расположением элементов в файле.

Для понимания и наглядности действия правила рассмотрим изображение, содержащее три элемента с разной заливкой с частичным наложением элементов.

На рис. 1 показано содержимое изображения из трех прямоугольников. Так как расположение элементов идет в порядке уменьшения размера, то все три фигуры будут отображены пользователю. Исходя из размеров и координат первой фигуры и из того, что она является первой в последовательности отображения, она может быть перекрыта остальными прямоугольниками. Вторая фигура в порядке отображения, исходя из размеров и координат, перекрывает первый прямоугольник. Третья фигура одновременно частично перекрывает первый и второй прямоугольники, которые были отображены ранее (рис. 2).

```

<defs>
<style type="text/css">
<![CDATA[
.str0 {stroke:#2B2A29;stroke-width:2;stroke-miterlimit:22.9256}
.fil1 {fill:#FFED00}
.fil0 {fill:#E31E24}
.fil2 {fill:#BBC274}
]]>
</style>
</defs>
<g id="Слой_x0020_1">
<metadata id="CorelCorpID_0Corel-Layer"/>
<rect class="fil0 str0" x="200" y="200" width="600" height="400"/>
<rect class="fil1 str0" x="250" y="250" width="300" height="300"/>
<rect class="fil2 str0" x="300" y="300" width="400" height="200"/>
</g>

```

Рис. 1. Часть текста файла SVG

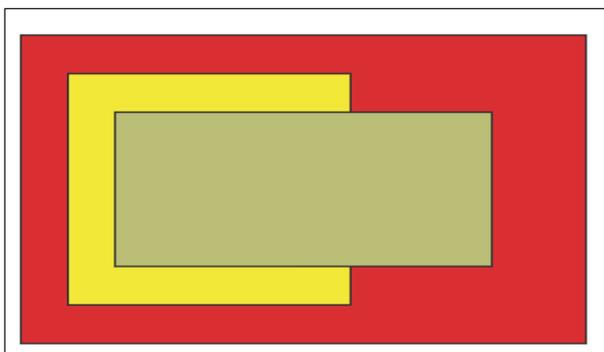


Рис. 2. Файл Svg с тремя прямоугольниками

Содержимое изображения на рис. 3 представлено такими же прямоугольниками, как на рис. 1. Однако во втором случае были добавлены три эллипса с координатами, принадлежащими области первого прямоугольника и расположенные таким образом, чтобы они отображались раньше прямоугольников (рис. 4).

```

<g id="Слой_x0020_1">
<metadata id="CorelCorpID_0Corel-Layer"/>
<ellipse class="fil3 str0" cx="750" cy="400" rx="40" ry="40"/>
<rect class="fil0 str0" x="200" y="200" width="600" height="400"/>
<ellipse class="fil5 str0" cx="500" cy="400" rx="40" ry="40"/>
<rect class="fil1 str0" x="250" y="250" width="300" height="300"/>
<ellipse class="fil4 str0" cx="300" cy="400" rx="40" ry="40"/>
<rect class="fil2 str0" x="300" y="300" width="400" height="200"/>
</g>

```

Рис. 3. Часть текста файла SVG с дополнительными эллипсами

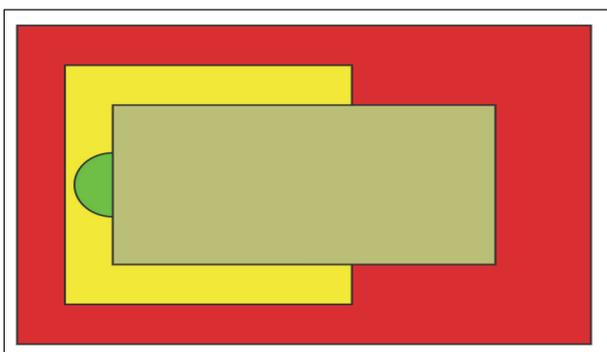


Рис. 4. Файл Svg с дополнительными эллипсами

Таким образом, два эллипса, описанные в содержимом файла, не отображены на экране, а третий эллипс был отображен частично. Как следствие, фигуры со сплошной заливкой скрывают элементы, расположенные в пределах их координат, эти элементы были раньше в порядке отображения.

Кроме того, стоит упомянуть о возможности отсутствия заливки, что приведет к отображению всех скрытых элементов за прямоугольниками (рис. 5). Данная особенность также может быть использована для простейшей стеганографии с простым добавлением элементов без цвета.

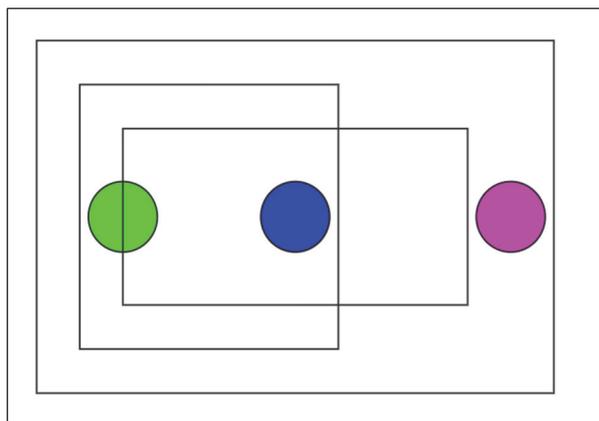


Рис. 5. Файл Svg без заливки прямоугольников

На основе использования вышеперечисленных особенностей отображения и видимости элементов предлагается новый метод встраивания данных в векторные изображения. В качестве встраиваемого элемента выбран эллипс, так как имеется возможность задействовать значения координат центра фигуры и значения величин радиусов для хранения данных.

Для усложнения метода встраивания информации вместо непосредственного внедрения информации в координаты предлагается использовать значения угла наклона прямой и расстояния между встраиваемой точкой и некоторой ключевой координатой. Исходя из предположения, что ключевая точка, от которой будут производиться вычисления расстояния и угла наклона, может быть значительно удалена от встраиваемой точки, целесообразно использовать дробные части вычисляемых величин для хранения данных как части, обладающей большей энтропией.

При небольшом числе элементов с заливкой и высоком разрешении файла процесс выбора каждой встраиваемой точки может занять значительное время. Для ускорения работы алгоритма предполагается использовать дополнительную точку, которая будет находиться на некотором удалении от геометрического центра фигуры.

Для получения проверяемых алгоритмом точек было решено использовать обход точек по

квадрату. Данный метод позволяет уменьшить объем вычислений по сравнению с традиционной круглой спиралью, кроме того, указанный алгоритм гарантирует равномерное покрытие области точками.

В качестве ключей в алгоритме было решено использовать значения двух точек и значения позиций, на которых будет расположена информация. Первое значение – это значение сдвига $D(\Delta x, \Delta y)$ относительно точки центра фигуры и относительно которой будет производиться получение точек для проверки. Вторая точка $C(x, y)$ – это точка, от которой производится вычисление значений угла и расстояния до встраиваемой точки H . Третьим значением ключа является массив элементов $L(x_1, x_2, \dots, x_n)$ с позициями цифр в дробной части расстояния от H до C , в которых будет содержаться информация. Третьим значением ключа является массив элементов $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ с позициями цифр в дробной части угла от H до C , в которых хранится информация.

Алгоритм внедрения дополнительных эллипсов может быть представлен в виде следующей последовательности шагов.

Шаг 1. Считываем файл и сохраняем код графических элементов.

Шаг 2. Преобразуем графические элементы в многоугольники (обозначим M_i).

Шаг 3. Вычисляем геометрические центры многоугольников (обозначим как $C_i(x, y)$).

Шаг 4. Преобразуем полученное секретное сообщение I во внедряемую цифровую последовательность (обозначим ее S).

Преобразование ведется посимвольно с преобразованием каждого символа.

Шаг 5. Создаем регулярные выражения R_L и R_A для значения угла и расстояния.

Регулярные выражения используются для проверки точки H .

Шаг 6. Устанавливаем значение удаленности r .

Шаг 7. Устанавливаем значения $g = 1$, где $g \in [1; 4 \cdot r^2)$.

Шаг 8. Вычисляем значения сдвига для вычисления проверяемой точки $F_g(r)$.

Шаг 9. Устанавливаем значения $i = 0$;

Шаг 10. Выбираем текущий многоугольник M_i .

Шаг 11. Получаем значение приведенного центра $P_i(x, y)$.

$$P_i = C_i + D. \quad (1)$$

Шаг 12. Вычисляем значение проверяемой точки $H(x, y)$.

$$H = P_i + F_g. \quad (2)$$

Шаг 13. Проверяем, принадлежит ли точка H многоугольнику M_i , если не перейти к п. 10 с увеличением i на единицу, иначе к п. 15.

Шаг 14. Вычисляем значения угла наклона прямой из точки H к точке C и оси X (обозначим как a).

$$a = \arctan((P.x - C.x), (P.y - C.y)). \quad (3)$$

Шаг 15. Вычисляем дистанцию от H к точке C (обозначим как l).

$$l = ((P.x - C.x)^2 + (P.y - C.y)^2)^{1/2}. \quad (4)$$

Шаг 16. Проверяем соответствие значения a регулярному выражению R_A и соответствие l регулярному выражению R_L . В случае несоответствия переходим к п. 10 с увеличением значения i на единицу.

Шаг 17. Добавляем позицию точки H в свойство HP объекта M_i .

Шаг 18. Если длина S не равна 0, переходим к п. 19, иначе к п. 22.

Шаг 19. Удаляем первые n символов из S , где n соответствует общему числу позиций в L и A .

Шаг 20. Создаем новые регулярные выражения R_L и R_A .

Шаг 21. Сортируем объекты M в порядке возрастания числа встроенных точек HP и переходим к п. 8 с увеличением значения g на единицу.

Шаг 22. Формируем эллипсы для всех точек, хранящихся в M_iHP .

Шаг 23. Сформируем SVG-файл.

Для извлечения сообщения I из стеганоконтейнера необходимо использовать следующий алгоритм.

Шаг 1. Считываем файл и сохраняем код графических элементов.

Шаг 2. Преобразуем графические элементы в многоугольники (обозначим M_i).

Шаг 3. Вычисляем геометрические центры многоугольников (обозначим как $C_i(x, y)$).

Шаг 4. Обнаруживаем эллипсы, расположенные под фигурами.

Шаг 6. Распределяем найденные эллипсы по M_i в зависимости от расстояния от центра эллипса до P_i .

Шаг 7. Сортируем найденные эллипсы в порядке возрастания расстояния от P_i до центра эллипса.

Шаг 8. Сортируем найденные эллипсы в порядке возрастания угла P_i до центра эллипса.

Шаг 9. Извлекаем данные по ключевым позициям A и L .

Шаг 10. Извлекаем данные по ключевым позициям A и L .

Шаг 11. Сформируем цифровую последовательность.

Шаг 12. Преобразуем сообщение из цифровой последовательности п. 11 в символьную строку.

Для демонстрации предложенного метода нами разработано консольное приложение. В качестве языка программирования был выбран C#.

Кроме того, использовалась библиотека System.Xml.XmlDocument для работы с XML-файлами, а также были созданы классы для работы с фигурами, что упрощает взаимодействие со значениями их атрибутов. Были созданы классы Embedder и Deembedder для реализации функций внедрения и извлечения сообщения. После запуска приложения пользователь может ввести путь к файлу, сообщение, параметры ключевой точки, параметры сдвига центральной точки и позиции значений угла и расстояния, используемые для внедрения информации. Результатом работы является файл с осажденной информацией. Набор эллипсов со встроеным сообщением «bgtu 2025» с использованием одной значащей позиции в значении угла и расстояния представлен на рис. 6.

```
<g id="hidden">
<ellipse class="filf str5" cx="3039962" cy="19313278" rx="40569" ry="38456"/>
<ellipse class="filf str5" cx="17124162" cy="17700571" rx="29945" ry="28428"/>
<ellipse class="filf str5" cx="4584712" cy="24829531" rx="24565" ry="37098"/>
<ellipse class="filf str5" cx="19148876" cy="11813661" rx="28209" ry="22072"/>
<ellipse class="filf str5" cx="12258134" cy="21732941" rx="22146" ry="26563"/>
<ellipse class="filf str5" cx="8004599" cy="18040862" rx="31311" ry="30519"/>
<ellipse class="filf str5" cx="14827320" cy="12409160" rx="24472" ry="46991"/>
<ellipse class="filf str5" cx="6422284" cy="9805992" rx="31748" ry="34145"/>
<ellipse class="filf str5" cx="6422282" cy="9805992" rx="46560" ry="45034"/>
</g>
```

Рис. 6. Набор эллипсов со встроеным сообщением

В представленном варианте использовались параметры ключевой точки $C(15000000, 15000000)$ и значение параметра сдвига $D(200000, 400000)$ и установлена пятая позиция для значений угла и расстояния для хранения информации. Для первой точки, представленной на рис. 6, значение угла наклона $a = 160,168626$ и значение расстояния $l = 12714042,475417$. Следовательно, скрытой информацией является комбинация цифр «21».

Представленный метод был протестирован для выбора оптимального числа позиций, используемых для встраивания информации. В табл. 1 даны замеры времени вычисления координат точек при встраивании информации отдельно в значение угла и расстояния.

Таблица 1
Зависимость времени вычисления точек от числа значимых позиций

Число позиций	Время при использовании значения угла, мс	Время при использовании значения расстояния, мс
1	1,45	8,45
2	4,36	38,63
3	31,28	151,02
4	205,85	1038,12
5	2340,79	8658,35
6	17218,64	78519,05

Исходя из полученных данных можно сделать вывод об оптимальности использования от

одной до четырех позиций для встраивания информации. Кроме того, важно отметить, что время, необходимое для вычисления точек, при использовании только значений угла меньше, чем при использовании значений расстояния.

Метод также был протестирован при использовании комбинации из позиций в значениях угла и расстояния, в которые осуществлялась встраивание информации. В данном случае на максимальное число позиций в одном значении было наложено ограничение, равное двум. Результаты замеров для части комбинаций представлены в табл. 2.

Таблица 2
Время вычисления точек при использовании комбинации значимых позиций

Позиции в значении угла	Позиции в значении расстояния	Время вычисления, мс
5	7	2,57
4, 9	7	14,01
3	9	15,74
9	3, 5	17,79
8, 9	4, 5	75,54
3, 4	9	93,74
8, 9	3, 9	78519,05

Полученные значения позволяют сделать вывод, что неверный выбор позиции может значительно увеличить время вычисления координат точек. Кроме того, исходя из среднего времени вычисления координат точек в комбинации позиций оптимально использовать от двух до четырех позиций.

Заключение. Цифровое изображение, содержащее большое число геометрических фигур с разнообразными стилями, являются хорошим стеганографическим контейнером. Данные файлы позволяют внедрить большой объем информации и устойчивы к изменениям.

Формат SVG позволяет добавлять элементы, которые не видны пользователю из-за перекрытия другими элементами. Расположение данных элементов в больших файлах также является вариативным, так как они должны быть добавлены не позднее, чем отображаемый элемент. Таким образом можно скрыть разнообразные элементы, которые не будут обнаружены при просмотре. На этой основе разработан описанный в статье стеганографический метод. Ввиду особенностей данного метода возможно скрыть практически неограниченный объем информации при высокой площади фигур с заливкой путем резкого увеличения объема файла.

Данный метод можно использовать для внедрения скрытой информации в векторные изображения. Кроме того, при незначительных доработках данный метод может быть применен

для защиты авторского права путем внедрения в векторное изображение водяных знаков.

Представляет научный и практический интерес дальнейшее расширение исследований в

данной предметной области, связанных с оценкой пропускной способности канала и уточнением уровня стеганографической стойкости метода к различным типам атак.

Список литературы

1. Урбанович П. П. Защита информации методами криптографии, стеганографии и обфускации. Минск: БГТУ, 2016. 220 с.
2. Blinova E., Shutko N. The use of steganographic methods in SVG format graphic files // Proc. of the 10th Intern. Conf. New Electrical and Electronic Technologies and their Industrial Implementation. Lublin, 2015. P. 45.
3. Text Steganography utilizing XML, HTML And XHTML Markup Languages / S. Imran [et al.] // International Journal of Computational Geometry & Applications. 2017. No. 3. P. 99–116.
4. Almutairi A. A Comparative Study on Steganography Digital Images: A Case Study of Scalable Vector Graphics (SVG) and Portable Network Graphics (PNG) Images Formats // (IJACSA). 2018. Vol. 9, no. 1. P. 170–175.
5. Topology-Preserving Watermarking of Vector Graphics / S. Huber [et al.] // International Journal of Computational Geometry & Applications. 2014. No. 1. P. 61–86. DOI: 10.1142/s0218195914500034.
6. Николайчук А. Н., Урбанович П. П. Стеганография в векторных изображениях // 73-я науч.- техн. конф. учащихся, студентов и магистрантов: сб. науч. работ, Минск, 18–23 апр. 2022 г. Минск: БГТУ, 2022. С. 947–949.
7. Zhou X. and Pan X. Watermark-Based Scheme to Protect Copyright of SVG // International Conference on Computational Intelligence and Security. 2006. P. 1199–1202. DOI: 10.1109/ICCIAS.2006.295245.
8. Badr Almutairi. A New Steganography Method for Scalable Vector Graphics (SVG) Images Based On An Improved LSB Algorithm // International Journal of Computer Science and Network Security. 2019. Vol. 19, no. 10. P. 99–104.
9. Kuznetsov A., & Kononchenko G. Steganographic methods in vector graphics // Radiotekhnika. 2021. No. 2 (205). P. 32–41. DOI: 10.30837/rt.2021.2.205.03.

References

1. Urbanovich P. P. *Zashchita informatsii metodami kriptografii, steganografii i obfuskatsii* [Information protection by cryptography, steganography and obfuscation methods]. Minsk, BG TU Publ., 2016. 220 p. (In Russian).
2. Blinova E., Shutko N. The use of steganographic methods in SVG format graphic files. *New Electrical and Electronic Technologies and their Industrial Implementation. Proc. of the 10th Intern. Conf.* Lublin, 2015, p. 45.
3. Imran S., Khan A., Ahmad B. Text Steganography utilizing XML, HTML And XHTML Markup Languages. *International Journal of Computational Geometry & Applications*, 2017, no. 3, pp. 99–116.
4. Almutairi A. A. Comparative Study on Steganography Digital Images: A Case Study of Scalable Vector Graphics (SVG) and Portable Network Graphics (PNG) Images Formats. *International Journal of Advanced Computer Science and Applications*, 2018, vol. 9, no. 1, pp. 170–175.
5. Huber S., Held, M., Meerwald, P., & Kwitt, R. Topology-preserving watermarking of Vector Graphics. *International Journal of Computational Geometry & Applications*, 2014, no. 1, pp. 61–86. DOI: 10.1142/s0218195914500034.
6. Nikolaichuk A. N., Urbanovich P. P. Steganography in vector images. *73-ya nauchno-tekhnicheskaya konferentsiya uchashchikhsya, studentov i magistrantov: sbornik nauchnykh rabot* [73rd Scientific and Technical Conference of students, undergraduates and undergraduates: collection of scientific papers]. Minsk, 2022, pp. 947–949 (In Russian).
7. Zhou X. and Pan X. Watermark-Based Scheme to Protect Copyright of SVG Data. *International Conference on Computational Intelligence and Security*, 2006, pp. 1199–1202. DOI: 10.1109/ICCIAS.2006.295245.
8. Badr Almutairi. A New Steganography Method for Scalable Vector Graphics (SVG) Images Based On An Improved LSB Algorithm. *International Journal of Computer Science and Network Security*, 2019, vol. 19, no. 10, pp. 99–104.
9. Kuznetsov A., & Kononchenko G. Steganographic methods in vector graphics. *Radiotekhnika*, 2021, no. 2 (205), pp. 32–41. DOI: 10.30837/rt.2021.2.205.03.

Информация об авторах

Уласевич Николай Иванович – магистрант кафедры информационных систем и технологий. Белорусский государственный технологический университет (ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: koliaulasevich@gmail.com

Жиляк Надежда Александровна – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры информационных систем и технологий. Белорусский государственный технологический университет (ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: Ghilyak@belstu.by

Information about the authors

Ulasevich Mikalai Ivanovich – Master’s degree student, the Department of Information Systems and Technologies. Belarusian State Technological University (13a Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: koliaulasevich@gmail.com

Zhilyak Nadezhda Aleksandrovna – PhD (Engineering), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Automation of Production Processes and Electrical Engineering. Belarusian State Technological University (13a Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: Ghilyak@belstu.by

Поступила 25.04.2025

АЛГОРИТМИЗАЦИЯ И ПРОГРАММИРОВАНИЕ

ALGORITHMIC AND PROGRAMMING

UDC 004.272.2

A. A. Prihozhy¹, O. N. Karasik²
¹Belarusian National Technical University
²ISsoft Solutions (part of Coherent Solutions)

LOCALIZATION OF DATA REFERENCES IN BLOCKED HETEROGENEOUS SHORTEST PATHS ALGORITHM FOR CLUSTERED GRAPHS

The increasing size of real systems, for which the problem of shortest paths search is solved, necessitates the use of graph models that break the system into autonomous weakly interacting subsystems. Such models include clustered graphs consisting of weakly connected dense subgraphs (clusters) of different sizes. Block algorithms are an efficient solution to the problem of the all-pairs shortest paths. Heterogeneous block algorithms distinguish four types of unequally sized blocks, operate on models that are adequate to real objects, enable the use of architectural features of computing systems to be considered, and reduce the time it takes to calculate the shortest paths in large graphs. In this paper, two new algorithms for computing blocks of two types are developed. They are part of the heterogeneous block algorithm, consider the properties of clustered graphs, and are built on the specifics of the organization of computing architectures (in particular, multicore processors). An important property of these algorithms is their ability to spatially and temporally localize data references, to reduce data transfer traffic in multilevel memory, and to reduce the number of iterations of loops executed. To develop the algorithms formal methods were used to transform, optimize and prove correctness.

Keywords: shortest path, blocked algorithm, heterogeneous algorithm, multi-core system, throughput.

For citation: Prihozhy A. A., Karasik O. N. Localization of data references in blocked heterogeneous shortest paths algorithm for clustered graphs, 2025, no. 2 (296), pp. 83–90.
DOI: 10.52065/2520-6141-2025-296-11.

A. A. Прихожий¹, О. Н. Карасик²
¹Белорусский национальный технический университет
²Иностранное производственное унитарное предприятие «Иссофт Солюшенз»

ЛОКАЛИЗАЦИЯ ССЫЛОК НА ДАННЫЕ В БЛОЧНОМ ГЕТЕРОГЕННОМ АЛГОРИТМЕ ПОИСКА КРАТЧАЙШИХ ПУТЕЙ В КЛАСТЕРИЗОВАННЫХ ГРАФАХ

Увеличение размеров реальных систем, для которых решается задача поиска кратчайших путей, приводит к необходимости использования графовых моделей, разбивающих систему на автономные слабо взаимодействующие подсистемы. К таким моделям относятся графы, состоящие из различных по размеру слабосвязанных плотных подграфов (кластеров). Блочные алгоритмы являются эффективным решением задачи нахождения кратчайших путей на таких графах. Гетерогенные блочные алгоритмы выделяют четыре типа блоков неравного размера, оперируют моделями, адекватными реальным объектам, позволяют учитывать архитектурные особенности вычислительных систем, сокращают время вычисления кратчайших путей между всеми парами вершин в графах большого размера. В данной статье разработаны два новых алгоритма вычисления блоков двух типов, являющихся частью гетерогенного алгоритма. Они учитывают свойства кластеризованных графов и построены с учетом особенностей организации вычислительных архитектур (в частности, многоядерных процессоров). Важным свойством алгоритмов является способность к пространственно-временной локализации ссылок на данные, уменьшению трафика при передаче данных в многоуровневой памяти и сокращению числа итераций выполняемых циклов. Для создания алгоритмов, их преобразования, оптимизации и доказательства корректности использованы формальные методы.

Ключевые слова: кратчайший путь, блочный алгоритм, разнородный алгоритм, многоядерная система, производительность.

Для цитирования: Прихожий А. А., Карасик О. Н. Локализация ссылок на данные в блочном гетерогенном алгоритме поиска кратчайших путей в кластеризованных графах // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2025. № 2 (296). С. 83–90 (На англ.). DOI: 10.52065/2520-6141-2025-296-11.

Introduction. The classical Floyd-Warshall (*FW*) algorithm [1, 2] solves the all-pairs shortest paths problem (APSP) that is fundamental in numerous graph-based applications. The blocked *FW* algorithm (*BFW*) [3, 4] divides the graph into equally sized subgraphs and homogeneously uses a single procedure to compute all blocks of a distance matrix. The heterogeneous blocked *HBFW* algorithm [5] for dense graphs considers four types of blocks of the same size and uses a separate faster procedure for each type. Works [6 – 10] improve *BFW* and *HBFW* for solving scaling problems, efficient processor utilization, generating dataflow actor networks, reducing power consumption, etc. Work [11] generalizes *BFW* and *HBFW* for handling subgraphs and blocks of unequal sizes. The homogeneous *BFW* and *HBFW* are modified in [12, 13] for finding APSP in clustered graphs. Work [14] proposes the heterogeneous blocked shortest paths algorithm *HBSPCG* for clustered large graphs while considering bridge vertices and edges. The contribution of this paper is the development of two new sub-algorithms of *HBSPCG* for cross block types that localize data references and improve the utilization of processor memory [15].

Main part. Clustered graphs. A directed weighted graph $G = (V, E)$, $|V| = N$ is called clustered if it is partitioned to a set C of clusters, which are dense subgraphs connected by a small number of edges. The vertex set of cluster $c \in C$ is denoted $V(c)$ and the number of vertices in c is denoted $size(c)$. Graph G is represented by a cost-adjacent matrix $W[N \times N]$. The matrix of shortest path distances between vertices is decomposed into the blocked matrix $B[M \times M]$ where $M = |C|$. The graph is sparse if its edge density is low and approaches to 0. A subgraph is dense

if its edge density is high and approaches to 1. Fig. 1 shows an example of directed clustered graph. A vertex of the cluster is called an in-bridge (out-bridge) if it has an incident bridge edge that is outgoing from (incoming to) another cluster.

Heterogeneous blocked algorithm for clustered graphs. In Work [14], we developed a new heterogeneous blocked Algorithm 1 for solving the APSP problem on large, clustered graphs while considering bridge vertices and bridge edges, unequally sized blocks, separate computation procedures for each block type. Four types of blocks (diagonal $D0$, vertical cross $C1$, horizontal cross $C2$ and peripheral $P3$) are computed with separate sub-algorithms $D0CG$, $C1CG$, $C2CG$ and $P3CG$. Algorithm $D0CG$ is optimized by localizing data references to the block elements to achieve higher performance, and algorithms $C1CG$, $C2CG$ and $P3CG$ are optimized to reduce the number of loop iterations due to the usage of input or output bridge vertices instead of all bridge vertices of the clusters.

Algorithm 1: Heterogeneous blocked APSP algorithm for clustered graphs (*HBSPCG*)

```

 $B[M \times M] \leftarrow W[N \times N]$ 
for  $m \leftarrow 1 \dots M$  do
   $D0CG(B, m)$  //  $D0$ 
  for  $c \in \{1 \dots M\}$  and  $v \neq m$  do
     $C1CG(C, B, c, m)$  //  $C1$ 
     $C2CG(C, B, m, c)$  //  $C2$ 
  for  $c, e \in \{1 \dots M\}$  and  $c \neq m$  and  $e \neq m$  do
     $P3CG(C, B, c, m, e)$  //  $P3$ 
return  $B$ 

```

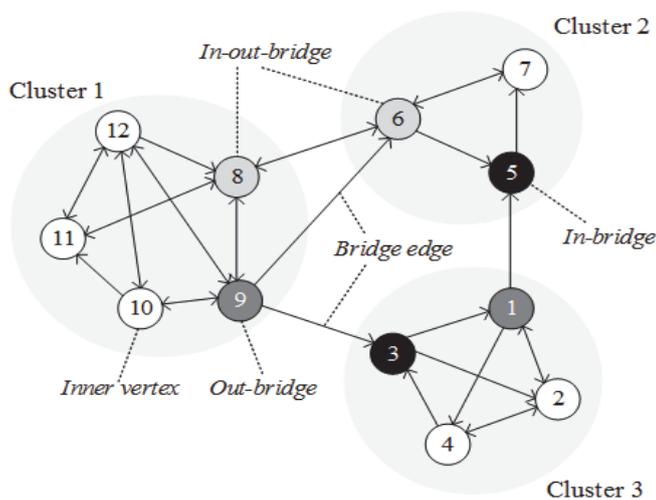


Fig. 1. Example of a clustered graph

Computation of diagonal blocks. Algorithm 2 that is proposed in [14] is an advanced alternative for the classical *FW* algorithm. Its input is the current state $B[m]^0$ of the diagonal block whose elements are considered as edge weights. Its output is the matrix of the shortest path distances between vertices of cluster m . Due to better loop iteration schemes and assignment statement grouping, *DOCG* outperforms *FW* in terms of processor hierarchical memory efficiency.

Algorithm 2: Computation of the diagonal square block $B[m]$ (*DOCGE*)

```

 $B[m] \leftarrow B[m]^0 \quad S \leftarrow \text{size}[m]$ 
for  $k \leftarrow 2, \dots, S$  do
  for  $i, j \in \{1, \dots, k-1\}$  do
     $B[m]_{ij} \leftarrow \min(B[m]_{ij}, B[m]_{i,k-1} + B[m]_{k-1,j})$ 
     $B[m]_{ik} \leftarrow \min(B[m]_{i,k}, B[m]_{ij} + B[m]_{j,k})$ 
     $B[m]_{kj} \leftarrow \min(B[m]_{k,j}, B[m]_{k,i} + B[m]_{i,j})$ 
  for  $i, j \in \{1, \dots, S-1\}$  do
     $B[m]_{ij} \leftarrow \min(B[m]_{ij}, B[m]_{i,S} + B[m]_{S,j})$ 
return  $B[m]$ 

```

Computation of vertical cross blocks. In [14], a vertical cross-block computation algorithm is proposed that uses bridge-vertices of clusters but do not localize data references. In this section, we develop an alternative algorithm that localizes data references and exploits bridge-vertices. Algorithm 3 (*C1CGE*) considers two clusters c and m and has two inputs: a rectangular vertical cross block $B[c, m]$ of type *C1* and dimension $\text{size}(c) \times \text{size}(m)$, and a square diagonal block $B[m]$ of type *D0* and dimension $\text{size}(m) \times \text{size}(m)$. It modifies the $B[c, m]$ block through the $B[m]$ block and keeps $B[m]$ unchanged. F_{in} is the first input bridge vertex in cluster m . The $B[c, m]$ block describes the shortest paths between vertices of cluster c and vertices of cluster m .

Algorithm 3: Computing vertical cross-block $B[c, m]$ by per-column extension upon bridges (*C1CGE*)

```

 $S \leftarrow \text{size}(m)$ 
for  $k \leftarrow F_{in} + 1$  to  $S$  do
  for  $i \leftarrow 1$  to  $\text{size}(c)$  do
    for  $j \leftarrow 1$  to  $k$  do
      if  $\text{InBridge}(k-1)$  then
         $B[c, m]_{ij} \leftarrow \min(B[c, m]_{ij},$ 
           $B[c, m]_{i,k-1} + B[m]_{k-1,j}) \quad // \Theta_{k-1}$ 
      if  $\text{InBridge}(j)$  then
         $B[c, m]_{i,k} \leftarrow \min(B[c, m]_{i,k},$ 
           $B[c, m]_{ij} + B[m]_{j,k}) \quad // \Delta_k$ 
  if  $\text{InBridge}(S)$  then
    for  $i \leftarrow 1$  to  $\text{size}(c)$  do
      for  $j \leftarrow 1$  to  $S-1$  do
         $B[c, m]_{ij} \leftarrow \min(B[c, m]_{ij},$ 
           $B[c, m]_{i,S} + B[m]_{S,j}) \quad // \Theta_N$ 
return  $B[c, m]$ 

```

Unlike the classical blocked Ford-Warshall algorithm assuming equal sizes of all blocks, algorithm *C1CGE* supposes unequal height and width of block $B[c, m]$. Moreover, it uses the input bridge vertices of cluster m to reduce the number of iterations to compute the $B[c, m]$ block. A predicate $\text{InBridge}(v)$ takes value *true* if v is an input bridge-vertex of cluster m and takes value *false* otherwise. *C1CGE* is based on the ideas of column-wise block expansion, computation resynchronization, and locality of data references.

It should be noted that the competitive sub-algorithm *C1US* of algorithm *HBAPSPUS* [11] handles rectangular cross blocks but does not use bridge vertices of cluster m and therefore traverses all vertices of m while computing the shortest paths from cluster c to cluster m . Another competitive sub-algorithm *proc_bridges* of algorithm *CBA* [12] handles rectangular cross blocks and uses all input and output bridge vertices of cluster m , but it is homogeneous because of exploiting a single block calculation procedure for all types of blocks and does not perform the resynchronization of computations and localization of data references.

Theorem 1. Upon termination, Algorithm 3 (*C1CGE*) correctly computes the vertical cross-block $B[c, m]$ through the diagonal block $B[m]$.

Proof. The *C1CGE* algorithm starts with a one-vertex graph and one-column block $B[c, m]^1$ of dimension $\text{size}(c) \times 1$ and then iteratively adds one column k to the block $B[c, m]^{k-1}$ to obtain the block $B[c, m]^k$ of dimension $\text{size}(c) \times k$. To obtain the algorithm, the procedure shown in Fig. 2 is used. The initial state of the block $B[c, m]$ of dimension $\text{size}(c) \times \text{size}(m)$ is denoted $B[c, m]^0$.

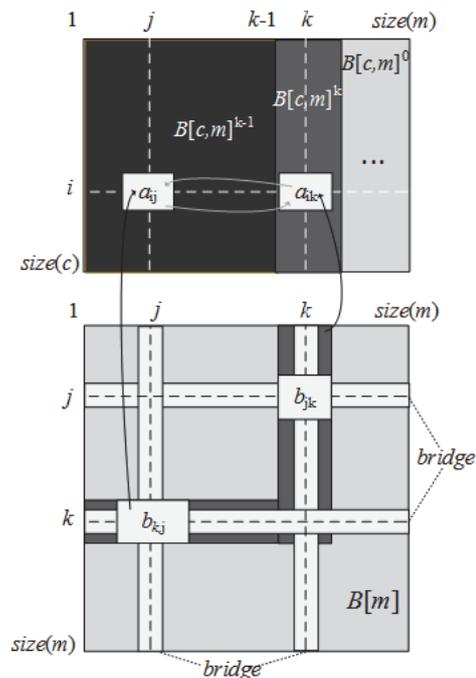


Fig. 2. Adding column k to block $B[c, m]$ in *C1CG* (a_{ij} denotes an element of block $B[c, m]$, and b_{jk} denotes an element of block $B[m]$)

The *C1CGE* algorithm uses two operations Δ_k and Θ_k for computing the block. Operation Δ_k computes using (1) the column k of $B[c, m]^k$ through the block $B[c, m]^{k-1}$ and the column k of block $B[m]$:

$$B[c, m]_{ik}^{j+1} = \min \begin{pmatrix} B[c, m]_{ik}^j \\ B[c, m]_{ij}^{k-1} + B[m]_{jk} \end{pmatrix} \quad (1)$$

for $i = 1 \dots \text{size}(c), j = 1 \dots k - 1$; vertex j is an input bridge of cluster m .

Operation Θ_k recalculates the block $B[c, m]^{k-1}$ to block $B[c, m]^k$ through column k using (2):

$$B[c, m]_{ij}^k = \min \begin{pmatrix} B[c, m]_{ij}^{k-1} \\ B[c, m]_{ik}^k + B[m]_{kj} \end{pmatrix} \quad (2)$$

for $i = 1 \dots \text{size}(c), j = 1 \dots k - 1$; vertex k is an input bridge of cluster m .

The behavior of *C1CGE* can be described as the following sequence of operation pairs (Δ_k, Θ_k) :

$$(\Delta_1, \Theta_1), (\Delta_2, \Theta_2) \dots (\Delta_k, \Theta_k) \dots (\Delta_N, \Theta_N). \quad (3)$$

The sequence (3) is interpreted with Algorithm 4. Operation Δ_k is executed when the vertex with number j is an input bridge of cluster m , and operation Θ_k is executed when the vertex k is an input bridge. The two nests of loops along i and j cannot be merged into one nest because the operations Δ_k and Θ_k cannot be executed simultaneously due to the mutual data dependences.

Algorithm 4: Recurrent procedure for computing vertical cross-block upon bridges (*C1CGE*)

```

S ← size(m)
for k ← Fin + 1 to S do
  for i ← 1 to size(c) do
    for j ← 1 to k - 1 do
      if InBridge(j) then
        B[c, m]_{i,k} ← min (B[c, m]_{i,k}, // Δk
                          B[c, m]_{ij} + B[m]_{j,k})
    for i ← 1 to size(c) do
      for j ← 1 to k - 1 do
        if InBridge(k) then
          B[c, m]_{ij} ← min (B[c, m]_{ij}, // Θk
                            B[c, m]_{i,k} + B[m]_{k,j})
  return B[c, m]
    
```

We resynchronize the computation process by rewriting sequence (3) to sequence (4).

$$\Delta_1, (\Theta_1, \Delta_2), (\Theta_2, \Delta_3) \dots (\Theta_{k-1}, \Delta_k) \dots (\Theta_{N-1}, \Delta_N), \Theta_N. \quad (4)$$

Fig. 3 illustrates the resynchronized process and Algorithm 5 realizes it. Its two nests of loops along i and j perform operations Θ_{k-1} and Δ_k . They can be merged into one loop nest, resulting in Algorithm 3. The theorem is proved.

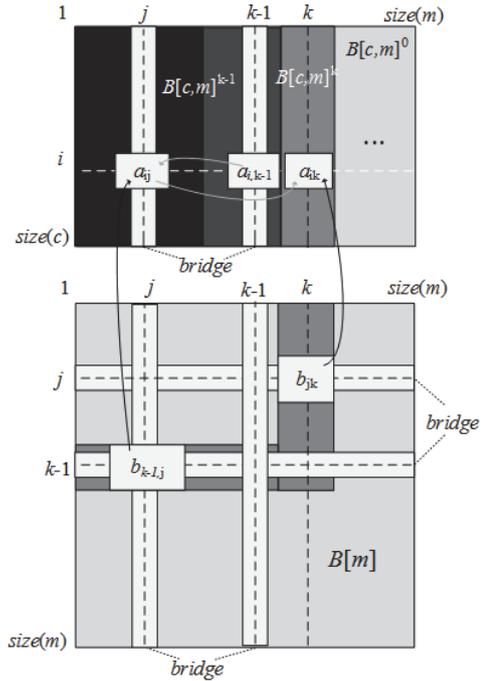


Fig. 3. Resynchronized process of adding a column

Algorithm 5: Computing vertical cross-block $B[c, m]$ by per-column extension upon bridges (*C1CGE*)

```

S ← size(m)
for k ← Fin + 1 to S do
  for i ← 1 to size(c) do
    for j ← 1 to k do
      if InBridge(k - 1) then
        B[c, m]_{ij} ← min (B[c, m]_{ij}, // Θ_{k-1}
                          B[c, m]_{i,k-1} + B[m]_{k-1,j})
    for i ← 1 to size(c) do
      for j ← 1 to k do
        if InBridge(j) then
          B[c, m]_{i,k} ← min (B[c, m]_{i,k}, // Δk
                              B[c, m]_{ij} + B[m]_{j,k})
  if InBridge(S) then
    for i ← 1 to size(c) do
      for j ← 1 to S - 1 do
        B[c, m]_{ij} ← min (B[c, m]_{ij}, // Θ_N
                          B[c, m]_{i,S} + B[m]_{S,j})
  return B[c, m]
    
```

There is no need to perform the computation of the vertical cross-block $B[c, m]$ with Algorithm 3 if cluster m has no input bridge vertices. If the input bridge vertices are placed at the end of the cluster m vertex list, the number of iterations of the loop along k is reduced to the number of these vertices. In Algorithms 3 - 5, any of the *InBridge*(\cdot) conditions can be omitted while preserving the correctness of the result.

Due to the iteration schemes of the loops along j , the number of conditional assignments is reduced up to 2 and the data references are localized in *C1CGE* compared to the *FW* algorithm. The loops iteratively process the $B[c, m]$ block of growing size $\text{size}(c) \times 1$

to $size(c) \times S$, so the references to the block elements are localized. Traversing only the input bridge-vertices of the m cluster further decreases the number of executions in Θ_{k-1} and Δ_k .

Computation of horizontal cross-blocks. Algorithm *C2CG* calculates the shortest paths connecting the vertices of cluster m to the vertices of cluster c and modifies the horizontal cross-block $B[m, c]$ of dimension $size(m) \times size(c)$ through the diagonal block $B[m]$. The *C2CG* algorithm assumes the sizes of blocks be unequal and exploits bridge vertices of clusters to speed up the computation of the shortest paths. Algorithm 6 is based on the idea of row-by-row block expansion and resynchronization of computations.

Theorem 2. Upon termination, Algorithm 6 (*C2CGE*) correctly computes the horizontal cross-block $B[m, c]$ through the diagonal block $B[m]$.

Algorithm 6: Calculating horizontal cross-block by row-per-row extension upon bridges (*C2CGE*)

```

S ← size(m)
for k ← Fout + 1 to S do
  for i ← 1 to k do
    for j ← 1 to size(c) do
      if OutBridge(k-1) then
        B[m, c]ij ← min (B[m, c]ij,
                       B[m]i,k-1 + B[m, c]k-1,j) // Ωk-1
      if OutBridge(i) then
        B[m, c]kj ← min (B[m, c]kj,
                       B[m]k,i + B[m, c]i,j) // Λk
    if OutBridge(S) then
      for i ← 1 to S-1 do
        for j ← 1 to size(c) do
          B[m, c]ij ← min (B[m, c]ij,
                          B[m]i,S + B[c, m]S,j) // ΩN
  return B[m, c]

```

Proof. In Algorithm 6, F_{out} is the first output bridge vertex in cluster m . The algorithm iteratively adds one row to the $B[m, c]$ block starting from a one-vertex graph and one-row block $B[m, c]^1$ of dimension $1 \times size(c)$. It computes the $B[m, c]^k$ block

of dimension $k \times size(c)$ from the $B[m, c]^{k-1}$ block of dimension $(k-1) \times size(c)$. To obtain the algorithm, the procedure shown in Fig. 4 is used. The initial block state of dimension $size(m) \times size(c)$ is denoted $B[m, c]^0$.

The *C2CGE* algorithm uses two operations Λ_k and Ω_k for recomputing the block. Operation Λ_k computes the row k of block $B[m, c]^k$ through the block $B[m, c]^{k-1}$ and the row k of block $B[m]$:

$$B[m, c]^{i+1}_{kj} = \min \left(\begin{array}{c} B[m, c]^{i}_{kj} \\ B[m]_{ki} + B[m, c]^{k-1}_{ij} \end{array} \right) \quad (5)$$

for $i = 1 \dots k-1, j = 1 \dots size(c)$; vertex i is an output bridge of cluster m . Operation Ω_k recalculates the elements of block $B[m, c]^{k-1}$ through row k of the block using (6):

$$B[m, c]^{k}_{ij} = \min \left(\begin{array}{c} B[m, c]^{k-1}_{ij} \\ B[m]_{ik} + B[m, c]^{k}_{kj} \end{array} \right) \quad (6)$$

for $i = 1 \dots k-1, j = 1 \dots size(c)$; vertex k is an output bridge of cluster m . The behavior of *C2CGE* can be described with sequence (7) of pairs (Λ_k, Ω_k) .

$$(\Lambda_1, \Omega_1), (\Lambda_2, \Omega_2) \dots (\Lambda_k, \Omega_k) \dots (\Lambda_N, \Omega_N). \quad (7)$$

Algorithm 7 realizes sequence (7).

Algorithm 7: Recurrent procedure for computing horizontal cross-block upon bridges

```

for k ← Fout + 1 to size(m) do
  for i ← 1 to k-1 do
    for j ← 1 to size(c) do
      if OutBridge(i) then
        B[m, c]kj ← min (B[m, c]kj,
                       B[m]k,i + B[m, c]i,j) // Λk
    for i ← 1 to k-1 do
      for j ← 1 to size(c) do
        if OutBridge(k) then
          B[m, c]ij ← min (B[m, c]ij,
                          B[m]i,k + B[m, c]k,j) // Ωk
  return B[m, c]

```

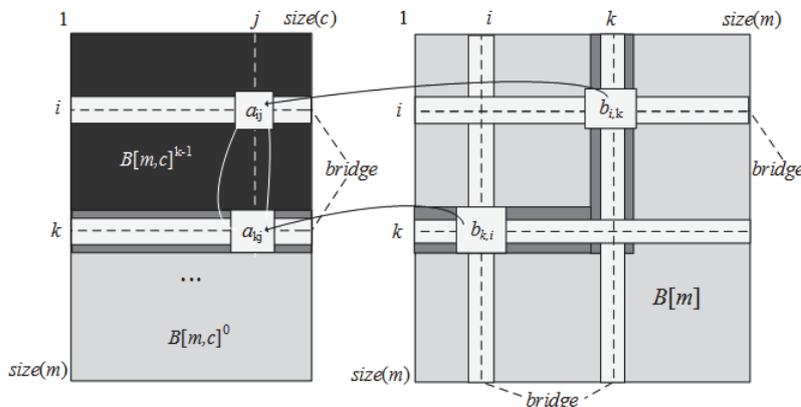


Fig. 4. Adding row k to block $B[m, c]$ in *C2CG* (a_{ij} denotes an element of block $B[m, c]$, and b_{jk} denotes an element of block $B[m]$)

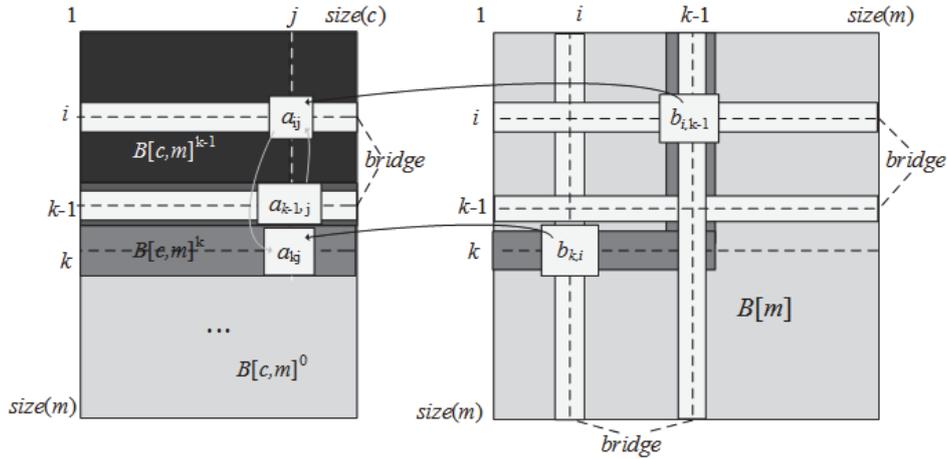


Fig. 5. Resynchronized process of adding a row

It is impossible to merge the Λ_k and Ω_k operations in the algorithm, therefore, we resynchronize the operations to obtain sequence (8).

$$\Lambda_1, (\Omega_1, \Lambda_2), (\Omega_2, \Lambda_3) \dots (\Omega_{k-1}, \Lambda_k) \dots (\Omega_{N-1}, \Lambda_N), \Omega_N. \quad (8)$$

The new computation process shown in Fig. 5 is realized by Algorithm 8. Two nests of loops along i and j perform operations Ω_{k-1} and Λ_k . After merging the nests, Algorithm 8 is transformed to Algorithm 6. The theorem is proved.

Algorithm 8: Calculating horizontal cross-block by row-per-row extension upon bridges (*C2CGE*)

```

S ← size(m)
for k ← Fout + 1 to S do
  for i ← 1 to k do
    for j ← 1 to size(c) do
      if OutBridge(k-1) then
        B[m, c]ij ← min (B[m, c]ij,
                       B[m]i,k-1 + B[m, c]k-1,j) // Ωk-1
  for i ← 1 to k do
    for j ← 1 to size(c) do
      if OutBridge(i) then
        B[m, c]kj ← min (B[m, c]kj,
                       B[m]k,i + B[m, c]i,j) // Λk
if OutBridge(S) then
  for i ← 1 to S-1 do
    for j ← 1 to size(c) do
      B[m, c]ij ← min (B[m, c]ij,
                     B[m]i,S + B[m, c]S,j) // ΩN
return B[m, c]

```

Algorithm 6 does not affect the horizontal cross-block $B[m, c]$ if cluster m has no output bridges. If the output bridge vertices are placed at the end of cluster m vertex list, the number of iterations of the loop along k is reduced to the number of these

vertices. Due to the iteration schemes of the loops along i , the number of the conditional assignments is reduced up to 2 in *C2CGE* compared to the *FW* algorithm. The loops iteratively process the $B[m, c]$ block of growing size $1 \times \text{size}(c)$ to $S \times \text{size}(c)$, so the references to the block elements are localized. Traversing only the output bridge vertices of the m cluster reduces further the number of executions of Ω_{k-1} and Λ_k . Any of the *OutBridge*(\cdot) conditions can be omitted while preserving the correctness of the result in Algorithms 6 – 8.

Computation of peripheral blocks. Algorithm 9 [14] computes a rectangular block $B[c, e]$ over two rectangular blocks $B[c, m]$ and $B[m, e]$. The vertex set $BridgesBest(m)$ is equal to $BridgesIn(m)$ if $|BridgesIn(m)| \leq |BridgesOut(m)|$ and is equal to $BridgesOut(m)$ otherwise. Function $Index(v, m)$ returns the vertex v number in cluster m . *P3CG* speeds up the computation against *FW* depending on the size of the $BridgesBest(m)$ set compared to $\text{size}(m)$.

Algorithm 9: Calculation of peripheral rectangular block upon bridges and unequal block-sizes (*P3CG*)

```

for i ← 1 to size(c) do
  for v ∈ BridgesBest(m) and k ← Index(v, m) do
    for j ← 1 to size(e) do
      B[c, e]ij ← min (B[c, e]ij, B[c, m]i,k + B[m, e]k,j)
return B[c, e]

```

Conclusion. We have proposed new sub-algorithms *C1CGE* and *C2CGE* for computing vertical and horizontal cross-blocks of the heterogeneous all-pairs shortest path algorithm, which speed up computations and improve the locality of references to blocked data and hence aim to improve the operational efficiency of multicore processor hierarchical memory while solving the all-pairs shortest paths problem on large clustered weighted directed and undirected graphs.

References

1. Floyd R. W. Algorithm 97: Shortest path. *Communications of the ACM*, 1962, no. 5 (6), p. 345.
2. Warshall S. A theorem on Boolean matrices. *Journal of the ACM*, 1962, no. 9 (1), p. 11–12.
3. Venkataraman G., Sahni S., Mukhopadhyaya S. A Blocked All-Pairs Shortest Paths Algorithm. *Journal of Experimental Algorithmics (JEA)*, 2003, vol. 8, pp. 857–874.
4. Park J. S., Penner M., and Prasanna V. K. Optimizing graph algorithms for improved cache performance. *IEEE Trans. on Parallel and Distributed Systems*, 2004, no. 15 (9), pp. 769–782.
5. Prihozhy A. A., Karasik O. N. Advanced heterogeneous block-parallel all-pairs shortest path algorithm. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], issue 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2023, no. 1 (266), pp. 77–83.
6. Sangeetha D. P, Sekar S, Parvathy PR., GaneshBabu SRTR and Muthulekshmi M. Optimizing Shortest Paths in Big Data Using the Floyd-Warshall Algorithm, *International Conference on Intelligent Control, Computing and Communications (IC3)*. Mathura, India, 2025, pp. 382–387.
7. Prihozhy A. A. Simulation of direct mapped, k-way and fully associative cache on all-pairs shortest paths algorithms. *System analysis and applied information science*, 2019, no. 4, pp. 10–18.
8. Kumar S., Karthik S., Srilakshmi S. and Dharun Viginesh P. Performance Analysis of Floyd-Warshall Algorithm: Sequential and Parallel Execution Using Intel oneAPI. *8th International Conference on Electronics, Communication and Aerospace Technology (ICECA)*. Coimbatore, India, 2024, pp. 205–211.
9. Prihozhy A. A. Generation of shortest path search dataflow networks of actors for parallel multicore implementation. *Informatics*, 2023, vol. 20, no. 2, pp. 65–84.
10. Prihozhy A. A., Karasik O. N. Influence of shortest path algorithms on energy consumption of multicore processors. *System analysis and applied information science*, 2023, no. 2, pp. 4–12.
11. Prihozhy A. A., Karasik O. N. New blocked all-pairs shortest paths algorithms operating on blocks of unequal sizes. *System analysis and applied information science*, 2023, no. 4, pp. 4–13.
12. Karasik O. N., Prihozhy A. A. Blocked algorithm of finding all-pairs shortest paths in graphs divided into weakly connected clusters. *System analysis and applied information science*, 2024, no. 2, pp. 4–10.
13. Prihozhy A. A., Karasik O. N. Blocked algorithm of shortest paths search in sparse graphs partitioned into unequally sized clusters. *Big Data and Advanced Analytics X*. Minsk, 2024, pp. 262–271.
14. Prihozhy A. A., Karasik O. N. Heterogeneous blocked all-pairs shortest paths algorithm for clustered weighted graphs. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*, 2025, no. 3 (Paper forthcoming).
15. Prihozhy A. A. Optimization of data allocation in hierarchical memory for blocked shortest paths algorithms. *System analysis and applied information science*, 2021, no. 3, pp. 40–50.

Список литературы

1. Floyd R. W. Algorithm 97: Shortest path // *Communications of the ACM*. 1962. No. 5 (6). P. 345.
2. Warshall S. A theorem on Boolean matrices // *Journal of the ACM*. 1962. No. 9 (1). P. 11–12.
3. Venkataraman G., Sahni S., Mukhopadhyaya S. A Blocked All-Pairs Shortest Paths Algorithm // *Journal of Experimental Algorithmics (JEA)*. 2003. Vol. 8. P. 857–874.
4. Park J. S., Penner M., and Prasanna V. K. Optimizing graph algorithms for improved cache performance // *IEEE Trans. on Parallel and Distributed Systems*. 2004. No. 15 (9). P. 769–782.
5. Prihozhy A. A., Karasik O. N. Advanced heterogeneous block-parallel all-pairs shortest path algorithm // *Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика*. 2023. № 1 (266). С. 77–83.
6. Sangeetha D. P, Sekar S, Parvathy PR., GaneshBabu SRTR and Muthulekshmi M. Optimizing Shortest Paths in Big Data Using the Floyd-Warshall Algorithm // *International Conference on Intelligent Control, Computing and Communications (IC3)*. Mathura, India. 2025. P. 382–387.
7. Prihozhy A. A. Simulation of direct mapped, k-way and fully associative cache on all-pairs shortest paths algorithms // *System analysis and applied information science*. 2019. No. 4. P. 10–18.
8. Performance Analysis of Floyd-Warshall Algorithm: Sequential and Parallel Execution Using Intel oneAPI / S. Kumar [et al.] // *8th International Conference on Electronics, Communication and Aerospace Technology (ICECA)*. Coimbatore, India. 2024. P. 205–211.
9. Prihozhy A. A. Generation of shortest path search dataflow networks of actors for parallel multicore implementation // *Informatics*. 2023. Vol. 20, no. 2. P. 65–84.
10. Prihozhy A. A., Karasik O. N. Influence of shortest path algorithms on energy consumption of multicore processors // *System analysis and applied information science*. 2023. No. 2. P. 4–12.
11. Prihozhy A. A., Karasik O. N. New blocked all-pairs shortest paths algorithms operating on blocks of unequal sizes // *System analysis and applied information science*. 2023. No. 4. P. 4–13.

12. Karasik O. N., Prihozhy A. A. Blocked algorithm of finding all-pairs shortest paths in graphs divided into weakly connected clusters // System analysis and applied information science. 2024. No. 2. P. 4–10.
13. Prihozhy A. A., Karasik O. N. Blocked algorithm of shortest paths search in sparse graphs partitioned into unequally sized clusters // Big Data and Advanced Analytics X. Minsk, 2024. P. 262–271.
14. Prihozhy A. A., Karasik O. N. Heterogeneous blocked all-pairs shortest paths algorithm for clustered weighted graphs // Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. 2025. No. 3 (Paper forthcoming).
15. Prihozhy A. A. Optimization of data allocation in hierarchical memory for blocked shortest paths algorithms // System analysis and applied information science. 2021. No. 3. P. 40–50.

Information about the authors

Prihozhy Anatoly Alexievich – DSc (Engineering), Professor, Professor, Department of Computer and System Software. Belarusian National Technical University (65 Nezavisimosti Ave., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: prihozhy@bntu.by

Karasik Oleg Nikolaevich – PhD (Engineering), Tech Lead. ISsoft Solutions (5 Chapayeva str., 220034, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: karasik.oleg.nikolaevich@gmail.com

Информация об авторах

Прихожий Анатолий Алексеевич – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры программного обеспечения информационных систем и технологий. Белорусский национальный технический университет (пр-т Независимости 65, 220013, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: prihozhy@bntu.by

Карасик Олег Николаевич – кандидат технических наук, ведущий инженер. Иностранное производственное унитарное предприятие «Иссофт Солюшенз». (ул. Чапаева 5, 220034, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: karasik.oleg.nikolaevich@gmail.com

Received 15.04.2025

УДК 004.056.55

А. В. Кизино, О. А. Новосельская

Белорусский государственный технологический университет

**АЛГОРИТМЫ И ПРОГРАММНОЕ СРЕДСТВО ГЕНЕРАЦИИ КЛЮЧА
ДЛЯ ПОСЛЕДУЮЩЕГО КОДИРОВАНИЯ ИНФОРМАЦИИ
В ЗАЩИТНЫХ ВЕКТОРНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЯХ**

Рассмотрены теоретические и практические аспекты построения алгоритмов и программного средства для генерации ключей, предназначенных для последующего кодирования информации в защитных векторных изображениях. К подобного рода изображениям относят в первую очередь гильюши, которые являются векторными и воспроизводятся специальными способами печати. Однако для внедрения информации в электронные документы необходимо кодирование информации. В статье описаны основные функции для реализации кодирования информации в защитных векторных изображениях. Уделено внимание формированию контейнера, обеспечивающего целостность и конфиденциальность информации, с использованием комбинации симметричных и асимметричных алгоритмов шифрования, а также хэш-функций. Рассмотрены недостатки централизованных систем хранения ключей и показаны риски, связанные с их компрометацией. В качестве альтернативы предложен метод, аналогичный электронной подписи, что соответствует требованиям законодательства Республики Беларусь. Описан алгоритм генерации ключа на основе анализа траектории движения мыши пользователя. Предложенный метод обеспечивает высокую степень уникальности и криптостойкости формируемых ключей за счет использования биометрических и поведенческих параметров, что существенно затрудняет подбор или повторное воспроизведение ключа. Экспериментальная часть включает разработку программного средства с визуальным интерфейсом, позволяющего фиксировать параметры движения мыши и формировать массив значений, преобразуемых в криптографический ключ. Анализ стабильности и повторяемости результатов подтвердил надежность метода. Полученные ключи интегрируются в структуру защитного векторного изображения, что позволяет не только повысить уровень защиты, но и реализовать возможность внедрения скрытой информации в элементы фирменного стиля или электронную документацию.

Ключевые слова: гильюш, генерация ключа, векторная графика, защита информации, электронная подпись, RSA, случайные последовательности, криптография.

Для цитирования: Кизино А. В., Новосельская О. А. Алгоритмы и программное средство генерации ключа для последующего кодирования информации в защитных векторных изображениях // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2025. № 2 (296) С. 91–98.

DOI: 10.52025/2520-6141-2025-296-12.

A. V. Kizino, O. A. Novoselskaya

Belarusian State Technological University

**ALGORITHMS AND SOFTWARE FOR KEY GENERATION
FOR SUBSEQUENT ENCODING OF INFORMATION
IN PROTECTIVE VECTOR IMAGES**

Theoretical and practical aspects of algorithms and software for the generation of cryptographic keys for the subsequent encoding of information in protective vector images are considered. Such images include first of all guilloches, which are vector images and are reproduced by special printing methods. However, for implementation the information into electronic documents it is necessary to encode information. The basic functions for realization the information coding in protective vector images are described in the article. Attention is paid to the formation of a cryptographic container ensuring the integrity and confidentiality of information using a combination of symmetric and asymmetric encryption algorithms, as well as hash functions. The disadvantages of centralized key storage systems are considered and the risks associated with their compromise are shown. As an alternative, an approach similar to electronic signature is proposed, which meets the requirements of the legislation of the Republic of Belarus. The algorithm of key generation based on the analysis of user's mouse movement trajectory is described. The proposed method provides a high degree of uniqueness and cryptostability of the generated keys due to the use of biometric and behavioural parameters, which significantly complicates the selection or repeated reproduction of the key. The experimental part includes the development of a software tool with a visual interface, which allows to fix the mouse movement parameters and form an array of values converted

into a cryptographic key. Analysis of stability and repeatability of the results confirmed the reliability of the method. The obtained keys are integrated into the structure of the protective vector image, which allows not only to increase the level of protection, but also to realize the possibility of introducing hidden information into elements of corporate identity or electronic documentation.

Keywords: guilloche, key generation, vector graphics, information security, digital signature, RSA, random sequences, cryptography.

For citation: Kizino A. V., Novoselskaya O. A. Algorithms and software for key generation for subsequent encoding of information in protective vector images. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2025, no. 2 (296), pp. 91–98 (In Russian).

DOI: 10.52025/2520-6141-2025-296-12.

Введение. Основу защиты документов, используемых в качестве ценных бумаг, составляют специальные штриховые изображения, которые воспроизводятся на бумаге специальными способами печати [1–4]. Это является средством защиты полиграфической продукции от фальсификации и злоупотреблений.

Предварительно проводился анализ состава и структуры подобных изображений. В качестве базовых элементов обычно используются штриховые изображения, представленные в виде простейших фигур или полиномов [5–8]. Как правило, их называют гильошами. Самым простым способом формирования гильошей является использование стандартных фигур или полиномов n -степени с заданными аффинными преобразованиями (масштабирования, вращения, переноса). В дальнейшем их воспроизводят специальными красками и специальными видами печати.

Анализ структуры гильошей показал, что они хорошо воспроизводятся средствами векторной графики. Дальнейшее изучение параметров гильошей [3, 9, 10] позволило сформировать идею векторного кодирования информации за счет управления параметрами векторного изображения, такими как вид и толщина линий, их частота и расстояние между ними. Наиболее распространенными технологиями векторного кодирования на текущий момент являются системы European Article Number (EAN) и Quick Response code (QR) [11, 12]. В этих системах используются параметры штрихов как элементов внедрения закодированной информации. Существенным отличием предлагаемого метода является внедрение уникального ключа, который должен генерироваться случайным или псевдослучайным образом. Причем генерируемый ключ должен быть персонализированным для конкретного пользователя. Данная идея и послужила основой для поиска вариантов генерации ключа при создании защитных векторных изображений.

Защитные векторные изображения будут строиться на основе сгенерированной случайной последовательности чисел и их преобразовании в заданные параметры штрихов (вид и толщина линий, параметры штрихов и пробелов в штрихпунктирных линиях, при этом расстояние между

линиями является фиксированным). Для задания вышеуказанных параметров необходимо сформировать персонализированный ключ кодирования, который в дальнейшем будет являться криптографическим контейнером, обеспечивающим как целостность данных, так и их конфиденциальность.

Современные подходы к защите таких контейнеров подразумевают комбинацию симметричных и асимметричных алгоритмов шифрования с использованием хэш-функций для верификации. В работе [13] рассмотрены теоретические аспекты генерации ключей по алгоритмам AES (Advanced Encryption Standard), Data Encryption Standard (DES), RSA, алгоритмов электронных подписей El Gamal Signature Algorithm (EGSA), Digital Signature Algorithm (DSA), Elliptic Curve Digital Signature Algorithm (ECDSA), алгоритмы хэширования Secure Hash Algorithm (SHA) и др. Симметричные алгоритмы (AES, DES) используют единый ключ для шифрования (дешифрования), обеспечивая высокую скорость обработки (до 1 Гбит/с для AES-256). Однако их главный недостаток – необходимость безопасной передачи ключа, что создает уязвимости в распределенных системах. Классический RSA, несмотря на существенные вычислительные затраты и требование к длине ключа (рекомендуется более 2048 бит), остается наиболее распространенным решением благодаря простоте интеграции и поддержке в стандартах (PKCS#1, X.509) [14]. Его безопасность основана на сложности факторизации больших чисел: для модуля $N = pq$, где p и q – 1024-битные простые числа, время взлома методом решета числового поля оценивается в $>10^{100}$ операций.

Хэш-функции (SHA-256, SHA3-512) [13, 15] играют критическую роль в обеспечении целостности. Для защиты информации и сохранения целостности данных принято использовать хэш-функции (SHA-256, SHA3-512), которые преобразуют данные в уникальную последовательность фиксированной длины (256 бит для SHA-256). Их коллизийная стойкость (невозможность найти два разных сообщения с одинаковым хэшем) делает их незаменимыми в схемах электронной подписи.

Анализ архитектур ключевых систем показал, что централизованная генерация ключей создает высокую опасность изменения и передачи данных третьим лицам. Компрометация центра [16] приводит к потере и краже данных. Вместо этого предложена децентрализованная двухключевая система, аналогичная механизмам электронной подписи, согласно Закону Республики Беларусь № 113-З [17]. В такой системе: закрытый ключ генерируется и хранится локально на устройстве пользователя; открытый ключ распространяется через доверенный реестр; сеансовый ключ для симметричного шифрования контейнера создается при помощи алгоритма Диффи – Хеллмана. Этот подход, устраняющий риски, связанные с транспортировкой и хранением ключей, соответствует требованиям белорусского законодательства к усиленной квалифицированной электронной цифровой подписи.

Целью настоящего исследования является разработка метода генерации ключа на основе движения мыши, а также оценка эффективности предложенного метода.

Методическая часть. Классический алгоритм RSA основывается на вычислительной сложности факторизации больших чисел [18]. На данный момент он является наиболее часто используемым для генерации числовой последовательности. Максимальное распространение он получил в области передачи защищенных изображений. Однако RSA уязвим к атакам при некорректной генерации простых чисел, а централизованное хранение публичных ключей создает риски компрометации. Также с улучшением технологий и наращиванием вычислительных мощностей возрастает опасность взлома такого ключа путем подбора начальных значений, поэтому в настоящее время требуемая длина ключа возросла с 1024 до 2048 бит. В свою очередь, увеличение длины ключа повышает требования к вычислительной мощности компьютерных систем, что приводит к снижению производительности системы и ограничивает применение данного метода для всех пользователей. Поэтому в работе ставится задача разработки метода генерации ключа, который позволит воспроизводить последовательность, регулирующую по длине и уникальную для каждой генерации.

Поскольку в электронных подписях документов используется поведенческие особенности человека по траектории движения мыши, в работе решено также основываться на данном подходе.

Существует несколько подходов к расчету траектории движения мыши (на основе эллиптических кривых, угловой меры и др.). Использование фиксированной угловой меры и скорости перемещения курсора с заданной частотой считывания позволит зафиксировать координаты курсора и преобразовать их в числовые объекты.

Для расчета угловой меры используются классические формулы расчета угла между векторами. Угол между векторами θ рассчитывается по тригонометрической формуле [19]

$$\theta = \arctan(\Delta y / \Delta x). \quad (1)$$

Определение скорости перемещения v осуществляется по формуле [20]

$$v = \sqrt{\frac{\Delta x^2 + \Delta y^2}{\Delta t}}. \quad (2)$$

Считывание координат положения курсора в единицу времени требует подбора оптимальных параметров интервала и продолжительности считывания, а также размера поля ввода. Для получения массива уникальных объектов необходима фильтрация полученных значений.

Основная часть. Генерация случайной последовательности чисел на основе траектории движения мыши пользователем позволяет создать ключ, уникальный для каждого человека. Его сложно подобрать и невозможно повторить.

Расчет по формулам (1), (2) включает следующие пространственно-геометрические параметры, описывающие перемещение указателя мыши по заданному полю экрана:

- пространственные координаты указателя мыши в определенные моменты времени;
- угол (направление) движения указателя мыши между фиксируемыми координатами;
- скорость движения указателя мыши между фиксируемыми координатами.

Для алгоритмической реализации указанных параметров в методе генерации ключа необходимо выполнить следующие этапы.

1. На начальном этапе необходимо определить параметр T – время генерации ключа, а также случайным образом выбрать число n – временной интервал, с которым будет фиксироваться положение курсора мыши.

2. Далее каждые n секунд записывать положение курсора в границах экранных координат x и y , пока не истечет T секунд.

3. После получения массива точек массив необходимо подвергнуть фильтрации, в результате которого удаляются все повторяющиеся значения.

4. На втором этапе необходимо рассчитать дополнительные параметры, такие как угол (Arc) и скорость (Speed) перемещения курсора. В отличие от координат x и y , которые являются случайными числами, параметры Arc, Speed генерируются на основе предыдущих значений.

5. Полученный массив объектов необходимо снова отсортировать и отфильтровать для вычленения и удаления повторяющихся элементов.

В результате имеем уникальный набор объектов. Количество генерируемых объектов зависит

от ряда факторов, таких как выбранный интервал для фиксации, скорость передвижения мыши, процент охвата рабочей области, время генерации, технические характеристики устройства ввода и время отклика системы. А также размер поля для считывания позиций курсора. Генерация для определения ее оптимальных размера поля и времени проводилась в разных размерах границ областей, паттернах поведения пользователя и времени генерации. В результате исследования проведено 120 генераций для различных комбинаций соотношений времени и размера области. Результаты представлены в таблице.

Таблица

**Подбор оптимальных параметров
для генерации ключа**

Время, с / размер, px	500×500	750×750	1000×1000
10	76	191	195
20	102	275	399
30	151	389	756
60	274	892	1094

Удовлетворительной считается генерация, в результате которой после всех операций и очистки получается массив значений объемом от 250 до 400 значений. Меньший объем точек может быть недостаточным для последующего использования, а больший 400 – избыточным.

В результате установлено, что соотношение, в котором размер области 750×750 px и время генерации 30 с, а также соотношение, в котором размер области 1000×1000 px и время генерации 20 с, являются наиболее предпочтительными, так как в среднем выдают значения, удовлетворяющие выдвинутым выше условиям. Однако вторая пара значений (размер области 1000×1000 px и время генерации 20 с) требует меньших временных затрат.

Для определения стабильности генерации был проведен дополнительный ряд генераций в ранее определенных условиях. Результаты генераций случайных последовательностей объектов представлены на рис. 1.

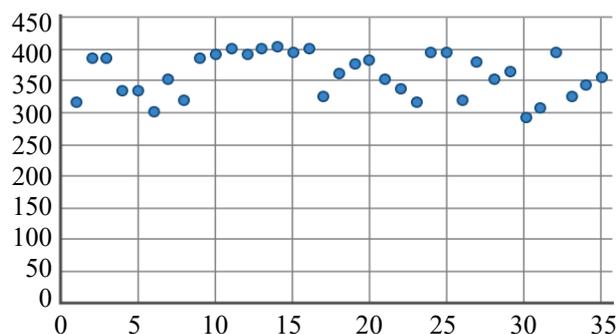


Рис. 1. Распределение числа отфильтрованных значений по номеру генерации

На рис. 1 показано, что после фильтров все полученные последовательности лежат в диапазоне 300–400 объектов, а это является достаточным для формирования ключа. Однако для удовлетворительной генерации необходимо соблюдение ряда требований к пользователю:

- передвижение мыши должно происходить непрерывно на протяжении всего времени генерации;

- не допускается остановка мыши на одной точке длительное время, так как это влечет за собой генерацию одинаковых точек, которые будут удалены, тем самым длина сгенерированной последовательности будет недостаточной;

- необходимо использовать всю область генерации в равном объеме, постоянно перемещая курсор в различных направлениях, захватывая углы и края области;

- по возможности стараться не выходить за пределы рабочей области;

- использовать устройства ввода с высокой или средней чувствительностью, отдавать предпочтение проводным устройствам или беспроводным устройствам новых моделей.

При соблюдении данных требований рассматриваемый метод показывает наилучшие результаты и представляет набор с удовлетворительным количеством уникальных объектов.

Программная реализация приложения для генерации ключа потребовала внедрения ряда функций. Запуск процесса генерации осуществляется функцией `start()`, которая определяет интервалы получения точек и запускает процесс считывания движений пользователя (листинг 1).

```
function start(id) {
  if (flag == false) {

    document.getElementById(id)
      .style.display = "none";

    flag = true;
    time_i = getRandomNumber(25, 50);

    let timerId = setInterval(() =>
      add_arr(),
      time_i);

    setTimeout(() => {
      clearInterval(timerId);

      removeusingSet(arr);
      repeat();
      create_char();
    },
    20000); } }
```

Листинг 1. Фрагмент кода функции `start()`

В листинге 1 интервал для считывания `time_i` выбирается псевдослучайным образом в промежутке (25; 50) мс. Непостоянный интервал позволяет извлекать точки из траектории движения

на различных участках, даже если движения были повторяющимися. Время генерации в 20 000 мс или 20 с определено опытным путем исходя из размера поля 1000×1000 px.

Функция `coordinate(event)` принимает в себя параметр `event`, который отвечает за значение положения мыши в текущий момент. При наличии объекта с таким же набором координат он не записывается. Функция `new_coord(obj)` принимает сгенерированный объект `obj`, в который входят значения x и y . Эта функция переводит данные значения в декартову систему координат для последующих вычислений. Функция `find_ang(obj1, obj2)` принимает два объекта после преобразования и находит угол между двумя векторами по формуле (1). Результат вычисления записывается в параметр `Arc` первого объекта. Функция `speed(obj1, obj2)`, подобно функции `find_ang(obj1, obj2)`, принимает на вход два объекта и возвращает скорость перемещения курсора между двумя зафиксированными точками при использовании формулы (2).

В результате генерации создается массив объектов с полями, представленными в численном виде. При необходимости генерации случайной последовательности используется функция `create_str(arr)`. Функция объединяет объекты в шестнадцатеричную строку и сохраняет ключ в JSON формат. На рис. 2 показан результат вывода полученной строки.

```
{
  "key": "416091ed2572e68a97385372f5e5878544decc066383ecd36d4c785f1b196f9ee49874
67da4e1c3b15d9f5ed9c1d08f8a44d1763feced8f97b0600ff26172754a6a4405590dc419
90f3a5e128a7fec868d13ec2fa001e9ee59dbb39994ce637fb4ff45c55893376decc6801f8d83
8eff008e1f28f2a1b021bb3670b188d8843764b74f545986f3197b657b1437a7865a05113f0c7f
cf793c0be34d84a13323095731f1a6a448101d90468bcf38bcc7a1ccb23dd484b8adde7f7ebd
e893cedb73969c1faead519618b27486d1aa75a72bcd3867e4971d55771bb4311c1ed962e740
995c49ed6e7ed7246b1f08344f3aa07ff46d0fa6fcd5467687a5a4a9b7a09ca77c11f60d19c57
2431024ec160ed97b30392c7f79b0f5f1d76212a26f7ac77f94bf25396c57b39c347156c92b8e3
98b6719248888fa685bc13ac5743245f0f042fcefc6e802f1abd0692f1a9fe1a22edf03b8132d
3f2d3ebc178c50a60b41ef5371a65f174e52b5965a4b87a0b85a4a9937de3548f7fa77c4479269
b5b0e46f457a184138457a2558c745f1a72860462d6fc8bc462d802ff446e060ce1846e06f6477
acd9726cf12e856e7e2a1e2c4d30d902e032d6ad35e4efebc2a46d8aac9f9d418d361218127c
5d392a90315bd7ab7cad5550f0a89c868326224a8153a525a370610547a76a18a79c906d561c04
```

Рис. 2. Сгенерированная последовательность в шестнадцатеричной кодировке

Созданный массив может изменяться в соответствии с требованиями конкретного приложения к ключу. Реализация генерации ключа в виде массива объектов позволяет преобразовать его в словарь для шифрования защитных векторных изображений, где требуется набор уникальных комбинаций параметров для характеристики линий. Для преобразования полученной последовательности в ключ используются дополнительные функции. Функция `find_num_dots(obj)` определяет тип линии, которую будет определять принятый функцией объект, и количество точек, которыми линия будет задаваться, в случае, если линия задана как пунктирная.

Для удаления повторяющихся элементов массива используется функция `check_arr(arr)`,

которая принимает на вход полученный массив объектов после преобразований и возвращает новый массив (листинг 2).

```
function check_arr(res) {
  /* . . . */
  start_arr = Array.from(
    new Set(
      start_arr.map(JSON.stringify))
    .map(JSON.parse);
  for (let i = 0; i < start_arr
    .length; i++) {
    res[i].x = start_arr[i].x;
    res[i].type = start_arr[i].type;
    res[i].dots = start_arr[i].dots;
    res[i].dot_arr = start_arr[i]
      .dot_arr;
  }
  res = res.slice(0, start_arr.length);
  return res;
}
```

Листинг 2. Фрагмент кода функции `check_arr()`

Данная функция проверяет и сохраняет во временный массив упрощенное представление объектов и помещает новый массив в коллекцию, в которой происходит очистка от дублирующих значений.

После всех преобразований данные формируются в ключ в формате словаря, где каждый объект соответствует букве, а каждое поле – параметр линии, которой данная буква будет кодироваться. За преобразование в ключ отвечает функция `save_key(res)`, принимающая на вход массив объектов и возвращающая файл в формате JSON (листинг 3).

```
function save_key(res) {
  const key = {
    characters: [],
    startLine: {
      "stroke": {
        "width": res[0].x,
        "type": res[0].type,
        "dashArray": res[0].dot_arr
      },
      endLine: {
        "stroke": {
          "width": res[1].x,
          "type": res[1].type,
          "dashArray": res[1].dot_arr
        }
      }
    };
  key.characters.push(temp);
}
jsonString = JSON.stringify(key);
}
```

Листинг 3. Код функции `save_key(res)`

Массив `characters` является контейнером для хранения символов с их параметрами шифрования. Поля `startLine` и `endLine` – стартовая и конечная линии, которые шифруются как

равнозначные с остальными буквами алфавита. Поле `plainCharacter` содержит букву, к которой относятся объект с параметрами `cipherCharacter`. Подобным образом каждой букве присваиваются такие же параметры. Объем генерации позволяет создать объекты не только для основного массива букв, но и для дополнительных знаков и символов, которые впоследствии могут быть использованы как дополнительная мера защиты информации. После при помощи встроенной функции `JSON.stringify()` массив конвертируется в формат JSON.

После генерации и преобразований пользователь получает на свое устройство ключ в формате файла JSON. Данный ключ имеет специфическую структуру из-за особенностей строения приложения, в котором он впоследствии будет использован. Средняя длина ключа составляет 9680 бит, что более чем в 4,5 раза превосходит длину ключа в RSA.

Заключение. Для решения задачи генерации ключа, который обеспечит высокую уникальность, разработан метод генерации ключа на основе движения мыши. Установлено, что для получения массива значений объемом от 250 до 400 объектов необходимо задать область регистрации положения курсора 1000×1000 px и время генерации 20 с. Стабильность генерации обеспечивает повторяемость 80%. Для определения вероятности коллизий был проведен анализ сгенерированных последовательностей как до преобразования в ключ, так и после. Анализ показал, что из 120 сгенерированных ключей разной длины не было сгенерировано ни одного ключа, который бы совпал.

Предложенный метод показал высокую производительность по сравнению с методом RSA. Так, благодаря фиксированному времени гене-

рации и асинхронной обработке значений, предложенный метод генерации ключа задействует меньшие вычислительные мощности по сравнению с методом RSA. На системах с 4-ядерными процессорами (тесты проводились на процессоре Intel i3-12100) рассмотренный метод задействовал максимально 10% CPU, в то время как RSA задействует максимально 38%, что соответствует полной загрузке как минимум одного ядра. Результаты сравнения времени генерации и загрузки CPU представлены на рис. 3. На графике показано, что предложенный метод намного менее ресурсозатратный, что делает его эффективным для использования в системах с небольшими вычислительными мощностями в сравнении с RSA.

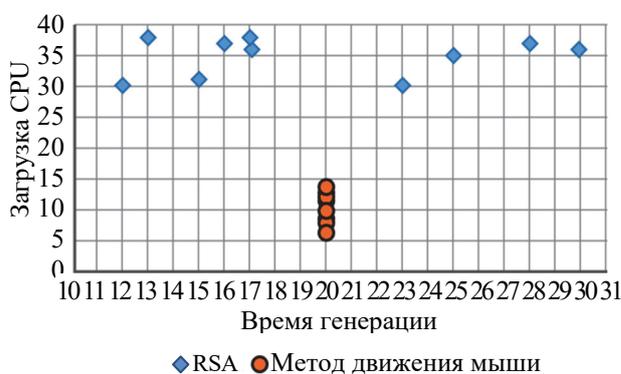


Рис. 3. Сравнение времени генерации и загрузки CPU для RSA и предложенного метода

Метод позволяет корректировать длину последовательности исходя из требований систем, для которых генерируется ключ, тем самым можно избежать потерь вычислительных мощностей и ресурсов, которые потребуются для генерации избыточного ключа другими методами.

Список литературы

1. Richard D. Warner, Richard M. Adams. Introduction to Security Printing. Berkeley, Portland: Graphic Arts Center Publishing Company, 2005. 115 p.
2. Thinger Ch., Paliwal K. Guilloche Pattern for Security in Confidential Documents // International Journal of Innovative Science, Engineering & Technology. 2016. Vol. 3, issue 10. P. 376–378.
3. Алгоритмы и программное средство для генерации защитных изображений печатных документов / О. А. Новосельская [и др.] // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2022. № 1 (254). С. 64–72. DOI: 10.52065/2520-6141-2022-254-1.
4. Liakhovych O., Riznyk V. Guilloche as a special kind of printed documents protection // XII International PhD Workshop OWD 2010, 23–26 October 2010. Wisla, 2010. P. 57–60.
5. Stepien P.J., Gajda R., Marszałek, A. Guilloche in diffractive optically variable image devices. // Optical security and counterfeit deterrence techniques: II, SPIE conference series. 1998. Vol. 3314. SPIE, 4. P. 231–236.
6. Deineko Zh., Shakurova T., Lyashenko V. Guilloche rosette as an element of building complex geometric structures // Journal of Universal Science Research. 2023. Vol. 1 (10). P. 526–534. URL: <https://universalpublishings.com/index.php/jusr/article/view/2269> (дата обращения: 10.04.2025).
7. Abu-Jassar A., Manakov V., Al-Abdallat A. Features of the Formation of Guilloche Rosettes // Journal of Universal Science Research. 2023. Vol. 1 (12). P. 129–138. URL: <https://universalpublishings.com/index.php/jusr/article/view/3175> (дата обращения: 18.04.2025).
8. Liakhovych O., Riznyk V. Investigation of information technologies for creating guilloches // XIII International PhD Workshop OWD 2011, 22–25 October 2011. Wisla, 2010. P. 97–100.

9. Glissando // Web-site software product Glissando. URL: <http://www.banknotes.ru/glissando.html> (дата обращения: 25.04.2025).
10. Spirograph Guilloche Generator // Web-site Timestretch. URL: https://www.timestretch.com/2020/05/10/spirograph_guilloche_generator.html (дата обращения: 25.04.2025).
11. Roger C. Palmer. The bar code book. Peterborough, Helmers Publishing, Inc. Formerly North American Technology, Inc., 1995. 386 p.
12. GS1 General Specifications Standard. Release 25.0, Ratified, Jan 25. URL: <https://ref.gs1.org/standards/genspecs/> (дата обращения: 05.05.2025).
13. Menezes A., van Oorschot P., Vanstone S. Handbook of Applied Cryptography. Boca Raton, CRC Press, 1996. 810 p.
14. Silverman R. D. A Cost-Based Security Analysis of Symmetric and Asymmetric Key Lengths: RSA Laboratories Bulletin No. 13, April 2000. URL: <http://www.rsasecurity.com.rsalabs/bulletins/> (дата обращения: 05.05.2025).
15. Belazzougui D., Botelho F. C., Dietzfelbinger M. Hash, displace, and compress – Springer Berlin Heidelberg, 2009. 17 p.
16. Duursma I. M., Park S. K. ElGamal type signature schemes for n-dimensional vector spaces // Cryptology ePrint Archive. 2005. Report no. 2005/123. P. 312–325.
17. Об электронном документе и электронной цифровой подписи: Закон Респ. Беларусь, 28.12.2009, №113-3 // Национальный правовой портал Республики Беларусь. URL: <https://pravo.by/document/?guid=3871&p0=H10900113> (дата обращения: 05.05.2025).
18. Rivest R. L., Shamir A., Adleman L. A method for obtaining digital signatures and public-key cryptosystems // Communications of the ACM. 1978. Vol. 21, no. 2. P. 120–126.
19. Grgurich R., Blair H. T. An uncertainty principle for neural coding: Conjugate representations of position and velocity are mapped onto firing rates and co-firing rates of neural spike trains // Hippocampus. 2020 № 30 (4). С. 396–421. DOI: 10.1002/hipo.23197. Epub 2020 Feb 17. PMID: 32065487; PMCID: PMC7154697.
20. Волков В. М., Проконина Е. В. Итерационная реализация разностных схем в методе фиктивных областей для эллиптических задач со смешанными производными // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2019. № 1. С. 69–76. DOI: 10.33581/2520-6508-2019-1.

References

1. Richard D. Warner, Richard M. Adams. Introduction to Security Printing. Berkeley, Portland, Graphic Arts Center Publishing Company Publ., 2005. 115 p.
2. Thinger Ch., Paliwal K. Guilloche Pattern for Security in Confidential Documents. *International Journal of Innovative Science, Engineering & Technology*, 2016, vol. 3, issue 10, pp. 376–378.
3. Novoselskaya O. A., Savchuk N. A., Shcherbakova A. N., Romanenko D. M. Algorithms and Software for Generating Protective Images for Printed Documents. *Trudy BGTU [Proceedings of BSTU]*, 2022, no. 1 (254): Physics and Mathematics. Informatics, issue 3, pp. 64–72 (In Russian). DOI: 10.52065/2520-6141-2022-254-1.
4. Liakhovych O., Riznyk V. Guilloche as a special kind of printed documents protection. *XII International PhD Workshop OWD 2010, 23–26 October*, 2010, pp. 57–60.
5. Stepien P. J., Gajda R., Marszałek A. Guilloche in diffractive optically variable image devices. *Optical security and counterfeit deterrence techniques: II, SPIE conference series*, 1998, vol. 3314. SPIE, 4, pp. 231–236.
6. Deineko Zh., Shakurova T., Lyashenko V. Guilloche rosette as an element of building complex geometric structures. *Journal of Universal Science Research*, 2023, 1 (10), pp. 526–534. Available at: <https://universalpublishings.com/index.php/jusr/article/view/2269> (accessed 10.04.2025).
7. Abu-Jassar A., Manakov V., Al-Abdallat A. Features of the Formation of Guilloche Rosettes. *Journal of Universal Science Research*, 2023, 1 (12), pp. 129–138. Available at: <https://universalpublishings.com/index.php/jusr/article/view/3175> (accessed 18.04.2025).
8. Liakhovych O., Riznyk V. Investigation of information technologies for creating guilloches. *XIII International PhD Workshop OWD, 2011, 22–25 October*, 2011, pp. 97–100.
9. Glissando. *Web-site software product Glissando*. Available at: <http://www.banknotes.ru/glissando.html> (accessed 25.04.2025).
10. Spirograph Guilloche Generator. *Web-site Timestretch*. Available at: https://www.timestretch.com/2020/05/10/spirograph_guilloche_generator.html (accessed 25.04.2025).
11. Roger C. Palmer. The bar code book. Helmers Publishing, Inc. Formerly North American Technology, Inc., 1995. 386 p.
12. GS1 General Specifications Standard. Release 25.0, Ratified, Jan 25. Available at: <https://ref.gs1.org/standards/genspecs/> (accessed 10.04.2025).
13. Menezes A., van Oorschot P., Vanstone S. Handbook of Applied Cryptography. Boca Raton, CRC Press Publ., 1996. 810 p.

14. Silverman R. D. A Cost-Based Security Analysis of Symmetric and Asymmetric Key Lengths: RSA Laboratories Bulletin No. 13, April 2000. Available at: <http://www.rsasecurity.com.rsalabs/bulletins/> (accessed 05.05.2025).
15. Djamel Belazzougui, Fabiano C. Botelho, Martin Dietzfelbinger. Hash, displace, and compress – Springer Berlin. Heidelberg, 2009. 17 p.
16. Duursma I. M., Park S. K. ElGamal type signature schemes for n-dimensional vector spaces. *Cryptography ePrint Archive*, 2005, Report no. 2005/123, pp. 312–325.
17. About an electronic document and an electronic digital signature. The Law of the Republic of Belarus № 113-3 from 28.12.2009. Available at: <https://pravo.by/document/?guid=3871&p0=H10900113> (accessed 05.05.2025).
18. Rivest R. L., Shamir A., Adleman L. A method for obtaining digital signatures and public-key cryptosystems. *Communications of the ACM*, 1978, vol. 21, no. 2, pp. 120–126.
19. Grgurich R, Blair H. T. An uncertainty principle for neural coding: Conjugate representations of position and velocity are mapped onto firing rates and co-firing rates of neural spike trains. *Hippocampus*, 2020, no. 30 (4), pp. 396–421. DOI: 10.1002/hipo.23197. Epub 2020 Feb 17. PMID: 32065487; PMCID: PMC7154697.
20. Volkov V. M., Prakonina A. U. Iterative realization of finite difference schemes in the fictitious domain method for elliptic problems with mixed derivatives. *Zhurnal Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i informatika* [Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics], 2019, no. 1, pp. 69–76. (In Russian). DOI:10.33581/2520-6508-2019-1.

Информация об авторах

Кизино Александра Валентиновна – магистрант факультета информационных технологий. Белорусский государственный технологический университет (ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: kizino@belstu.by

Новосельская Ольга Александровна – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры информатики и веб-дизайна. Белорусский государственный технологический университет (ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: novoselskaya@belstu.by

Information about the authors

Kizino Alexandra Valentinovna – Master’s student, Faculty of Information Technologies. Belarusian State Technological University (13a Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: kizino@belstu.by

Novoselskaya Olga Aleksandrovna – PhD (Engineering), Associate Assistant Professor, the Department of Informatics and Web Design. Belarusian State Technological University (13a Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: novoselskaya@belstu.by

Поступила после доработки 12.05.2025

УДК 004.921

В. А. Ворошень, Д. М. Романенко

Белорусский государственный технологический университет

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ЦВЕТОВЫХ СХЕМ НА ОСНОВЕ КЛАСТЕРИЗАЦИИ ЦВЕТОВЫХ ВЕКТОРОВ И ТОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА РАСТРОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Рассматривается задача автоматизированного анализа цветовых характеристик растровых изображений с помощью построения цветовых схем. В качестве основного способа выделения цветов используется кластеризация с помощью k -средних, позволяющая определить наиболее характерные цвета изображения. Для повышения качества построения цветовых схем применяются этапы предварительной обработки, включающие масштабирование изображения с бикубической интерполяцией и размытие по Гауссу. Объясняется выбор метода интерполяции с учетом наличия на фотографиях шумов и дефектов, влияющих на цвета, а также сохранения существующих цветов. Предложены три разновидности цветовых схем: ключевые цвета, тональные доминанты и акценты. При определении ключевых цветов используется кластеризация всех оттенков, представленных на изображении. Извлечение тональных доминант осуществляется тем же способом для наиболее распространенных цветов изображения. Для определения акцентов используется алгоритм, учитывающий основные особенности восприятия цветов человеком, а также цветовая модель HSV, представляющая оттенок, яркость и насыщенность как отдельные каналы. Полученные цветовые схемы изображений, содержащих памятные цвета, проверены на достоверность с помощью таблиц памятных цветов. Результаты могут быть применимы в таких областях компьютерного зрения, как автоматизированный анализ композиции фотографий, автоматизированная жанровая классификация, анализ жанровых закономерностей наборов фотографий, улучшение алгоритмов рекомендательных систем.

Ключевые слова: растровые изображения, цветовая схема, кластеризация, метод k -средних, ключевые цвета, тональные доминанты, акценты.

Для цитирования: Ворошень В. А., Романенко Д. М. Метод построения цветовых схем на основе кластеризации цветовых векторов и тонального анализа растровых изображений // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2025. № 2 (296) С. 99–109.

DOI: 10.52065/2520-6141-2025-296-13.

V. A. Voroshen, D. M. Romanenko

Belarusian State Technological University

METHOD FOR CONSTRUCTING COLOR SCHEMES BASED ON COLOR VECTOR CLUSTERING AND RASTER IMAGES TONAL ANALYSIS

This paper addresses the problem of automated analysis of the color characteristics of raster images through the construction of color schemes. The primary method used for color extraction is k -means clustering, which allows for the identification of the most representative colors in an image. To enhance the quality of the generated color schemes, preprocessing steps such as image scaling using bicubic interpolation and Gaussian blurring are applied. The choice of the interpolation method is explained, taking into account the presence of noise and defects in the photographs that affect the colors, as well as the preservation of existing colors. Three types of color schemes are proposed: key colors, tonal dominants, and accents. Key colors are determined by clustering all shades present in the image. Tonal dominants are extracted using the same method, focusing on the most prevalent colors. Accents are identified using an algorithm that considers key aspects of human color perception, as well as the HSV color model, which represents hue, brightness, and saturation as separate channels. The resulting color schemes for images containing memorable colors are validated using tables of memorable colors. The proposed approach may find applications in various areas of computer vision, such as automated photo composition analysis, automated genre classification, analysis of genre-specific patterns in photo collections, and enhancement of recommendation system algorithms.

Keywords: raster images, color scheme, clustering, k -means method, key colors, tonal dominants, accents.

For citation: Voroshen V. A., Romanenko D. M. Method for constructing color schemes based on color vector clustering and raster images tonal analysis. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2025, no. 2 (296), pp. 99–109 (In Russian).

DOI: 10.52065/2520-6141-2025-296-13.

Введение. Визуальное искусство, результатом которого становится цифровое изображение, использует цвет в качестве основного средства выразительности наряду с композицией, перспективой и сюжетом. Цвет определяет первое впечатление от изображения, формирует его контекст и влияет на эстетическое восприятие. Это актуально и для фотографии, которая является одним из наиболее выразительных направлений визуального искусства.

Развитие технических средств, технологий обработки изображений, появление вычислительной фотографии [1], а также ускоренный рост создания фотоснимков и их повсеместная доступность приводят к необходимости разработки автоматизированных подходов к анализу изображений не только с физической или технической, но и с художественной точки зрения. Автоматизация целесообразна в случае больших наборов данных, которые невозможно проанализировать вручную.

Одним из способов автоматического анализа растрового изображения является оценка получаемых на его основе цветовых схем – совокупностей доминирующих цветов изображения [2]. Данный подход позволяет существенно упростить анализ, поскольку количество цветов сокращается с сотен тысяч до ограниченного количества основных оттенков, которое можно контролировать, что позволяет получить схемы различной детализации.

Цель данной работы – выявление основных цветовых характеристик, описываемых цветовыми схемами, созданными на основе метода кластеризации k -средних и тонального анализа [3]. При этом для рассматриваемого изображения выполняется предобработка и выделяются цветовые схемы, описывающие его различные аспекты.

Постопоставление цветовых схем фотографий, выполненных в различных жанрах, может найти применение в задачах классификации [4] и стилистической обработки.

Основная часть. Исходным для построения цветовых схем может служить любое растровое изображение. В данном случае используются фотографии, опубликованные на открытом ресурсе 35PHOTO [5]. При этом к изображениям предъявляются следующие требования:

- фотографии должны быть естественными: чрезмерная авторская обработка, влияющая на отображение цвета и его натуральность, не соответствуют тематике исследования;
- предпочтение отдается фотографиям, выполненным в дневное время, поскольку в таком случае становится возможным оценить соответствие выделенных цветов памятным, однако допускается также и съемка в ночное или режимное время [6].

Изображения сохраняются в формате JPG. Данный формат позволяет хранить изображения высокого разрешения, при котором менее заметным становится один из его основных недостатков – сжатие с потерями. Также ресурс 35PHOTO рекомендует загружать фотографии, разрешение которых по большей стороне составляет от 1000 до 2000 пикселей [7], что способствует уменьшению числа артефактов сжатия, которые могут оказать негативное влияние на цвета изображения. По умолчанию информация о цвете изображений хранится с использованием цветового пространства RGB, однако данное пространство не универсально и в некоторых случаях его удобно конвертировать в иное.

Любое изображение (I) можно представить в виде набора пикселей, имеющих определенные характеристики [8]. Каждый такой пиксель описывается вектором p размерности n , где n – количество характеристик пикселя, в данном случае равное трем по числу цветовых каналов: красного, зеленого и синего. Иначе говоря, изображение является тензором размера $H \times W \times 3$, где H и W – высота и ширина изображения в пикселях соответственно, а каждая точка содержит некоторый вектор $c_{i,j} = (R, G, B)$, где $R, G, B \in [0, 255]$ – уровни квантования цвета. Таким образом, изображение можно описать так:

$$I = \{c_{i,j} \mid i = 1 \dots H, j = 1 \dots W\}, c_{i,j} \in^3. \quad (1)$$

Структура цветового вектора c остается неизменной для цветовых пространств, имеющих три компонента, в отличие, например, от четырехэлементной цветовой модели СМΥК.

Исследование цветовых характеристик изображения традиционными методами включает в себя алгоритмы кластеризации и тонального анализа. Поскольку количество разных цветов, присутствующих на изображении, может достигать существенных величин, для упрощения анализа выделяется ряд ключевых цветов, описывающих исходное изображение по тому или иному принципу. Такие цвета в совокупности составляют цветовые схемы, или палитры.

Цветовая палитра должна содержать цвета, наиболее полно описывающие изображение, включая оттенки фона, переднего плана и возможных акцентных цветов.

Для каждого изображения создается по три цветовые схемы: ключевые цвета, тональные доминанты и акценты, каждая из которых со своей стороны раскрывает цветовое содержание изображения.

Ключевые цвета содержат результат проведения кластеризации всех цветов исходного изображения, а именно центры кластеров. Данная цветовая схема описывает разнообразие схожих,

но неодинаковых оттенков и призвана отражать основные цвета, замечаемые глазом. Однако в зависимости от выбранного количества кластеров мелкие детали могут оказаться вне данной схемы, в том числе и акцентные, значимые с точки зрения человека и композиции, но имеющие воплощение лишь в небольшом количестве оттенков на изображении.

Тональные доминанты, в отличие от ключевых цветов, описывают количественное преобладание цветов на изображении. С их помощью становится возможной более точная оценка фона изображения, а также его контраста в случае, когда отличные друг от друга оттенки составляют существенную часть изображения.

И наконец, акценты представляют собой наиболее выделяющиеся цвета, пусть и занимающие малую площадь изображения, но привлекающие внимание. Такие цвета не обязательно должны соответствовать наиболее значимым объектам, однако именно акцентные цвета позволяют визуально выделять объекты на изображении [9], что часто применяется при построении кадра фотографом или художником.

Для создания каждой из цветовых схем используются различные подходы, но одинаковый алгоритм подготовки и предварительной обработки изображения.

Прежде всего было выяснено, что исходный размер изображения слишком велик для автоматической обработки и подвержен ряду недостатков. Связано это с тем, что фотографии в большинстве своем так или иначе содержат шум, будь то импульсный, фотонный или Гауссовский [10], что фактически создает побочные цвета, не имеющие смысловой нагрузки и не запланированные автором фотографии. Кроме того, сама фотография может содержать мелкие текстуры различных оттенков (например, при съемке деревьев, травы или песка). К тому же чрезмерное количество различных оттенков при фиксированном количестве центров кластеров приводит к излишнему усреднению значений цветов, из-за чего цветовая схема меньше соответствует действительности.

Для решения перечисленных проблем изображение подвергается двум стадиям предобработки: размытию и интерполяции с уменьшением размера. При этом можно использовать различные виды интерполяции (рис. 1): бикубическую, билинейную и методом k ближайших соседей. Однако не каждая из этих разновидностей дает одинаково хороший результат.

Сравнение представленных видов интерполяции осуществляется с помощью сопоставления исходного изображения с тем, к которому применена интерполяция. Для этого создано эталонное растровое изображение (эталон), не содержащее шумов и прочих артефактов, присущих фотографиям. Размер данного изображения составляет 550 пикселей в ширину и 440 пикселей в высоту. Также создается копия эталонного изображения с добавленными шумами (шумный эталон), призванная отразить то, как выглядят реальные фотографии.

Эталонные изображения уменьшаются до 50 пикселей в ширину и 40 пикселей в высоту (коэффициент уменьшения по каждой из сторон равен 11), при этом используются различные виды интерполяции. В результате получается набор из шести уменьшенных изображений.

Каждому пикселю уменьшенного изображения соответствует блок из 121 пикселя (11 в ширину и 11 в высоту) эталона. Эффективность интерполяции определяется тем, насколько точно уменьшенное изображение передает реальное.

Проверить это можно, используя среднеквадратическую ошибку (MSE), отражающую среднее отклонение пикселей блока от пикселя уменьшенного изображения.

Для расчета MSE можно воспользоваться формулой [11]

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - Y_i)^2, \quad (2)$$

где N – общее количество попиксельных сравнений; X – в данном случае значение пикселя эталонного изображения, а Y – значение пикселя интерполированного изображения.

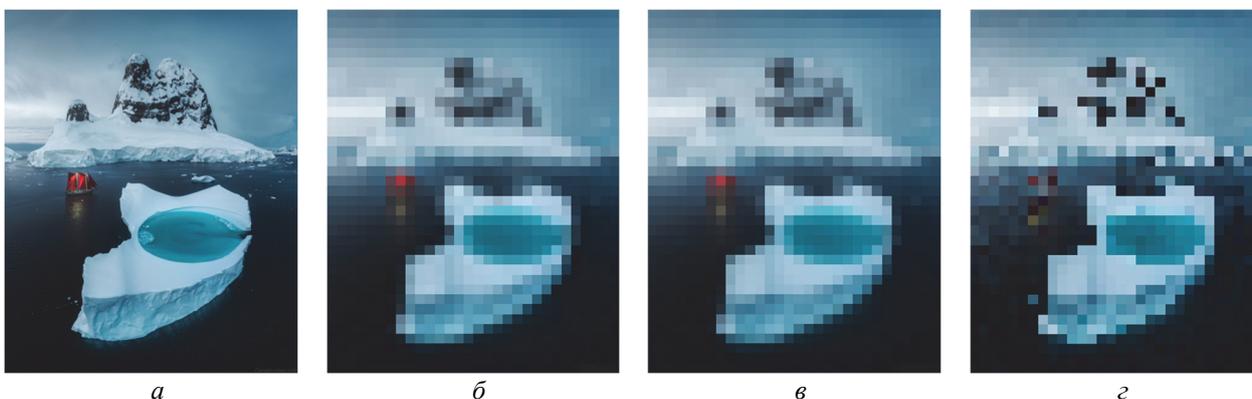


Рис. 1. Методы интерполяции изображения:
 а – исходное изображение; б – бикубическая интерполяция;
 в – билинейная интерполяция; г – метод k ближайших соседей

Также важно учитывать, что MSE в неизменном виде можно использовать для сравнения изображений идентичного размера, тогда как в данной задаче пиксель интерполированного изображения сравнивается с блоком пикселей эталонного. Таким образом, в формулу MSE вводится сумма разниц для пикселей в блоке:

$$MSE = \frac{1}{M \cdot B} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^B (X_{i,j} - Y_i)^2, \quad (3)$$

где M – количество блоков эталонного изображения; B – количество пикселей в блоке; X – значение пикселя j в блоке i ; Y – значение пикселя интерполированного изображения, соответствующего блоку i .

С учетом того, что цвет состоит из трех компонентов, целесообразно рассчитывать MSE отдельно для каждого канала.

Результаты вычисления MSE показаны в табл. 1 для эталонного изображения и в табл. 2 – для эталона с добавленными шумами.

Таблица 1

Сравнение эталонного изображения с его интерполированными копиями

Интерполяция	Канал			
	R	G	B	Среднее
Бикубическая	24,0	24,4	24,9	24,4
Билинейная	25,9	27,1	24,3	25,8
к ближайших соседей	9,3	5,9	8,1	8,1

Таблица 2

Сравнение эталона с добавленными шумами с его интерполированными копиями

Интерполяция	Канал			
	R	G	B	Среднее
Бикубическая	86,7	80,8	75,9	81,1
Билинейная	83,7	84,6	85,1	84,4
к ближайших соседей	87,7	85,9	84,7	86,1

Как видно из представленных данных, бикубическая интерполяция показывает наилучшие результаты (за исключением красного канала) в случае изображения с добавленными шумами, тогда как метод к ближайших соседей существенно превосходит прочие в случае чистого изображения без шумов.

Вопреки кажущемуся превосходству метода к ближайших соседей, на изображениях, имеющих изменения параметров цвета в силу наличия цифровых дефектов (шума, артефактов сжатия и т. д.), что характерно для фотографий, целесообразно использовать метод бикубической интерполяции.

Кроме того, другим немаловажным параметром при выборе метода интерполяции является сохранение акцентных цветов на изображении.

Поскольку цвета – это трехэлементные векторы, между ними в пространстве, в котором они находятся, возможно найти расстояние. Для этого используется Евклидова метрика, рассчитывающаяся по формуле [12]

$$\Delta E = \sqrt{(R_1 - R_2)^2 + (G_1 - G_2)^2 + (B_1 - B_2)^2}, \quad (4)$$

где R, G, B – уровни квантования красного, зеленого и синего соответственно.

Уровни квантования каналов могут принимать значения от 0 до 255, поэтому ненормализованные результирующие значения метрики заключаются в диапазоне между 0 и 441,67. Однако нормализация приводит их к диапазону от 0 до 1, где 0 означает полное сходство векторов, а 1 – их полное различие.

Цвета в данном случае расцениваются как векторы. При этом на исходном изображении (SI) берется проба акцентного цвета, после чего операция повторяется для полученных в результате интерполяции изображений.

Для исходного изображения и изображений, полученных в результате применения бикубической, билинейной интерполяции и интерполяции методом к ближайших соседей соответственно, результат выбора акцентных цветов составил:

- $SI_a = (220, 18, 35)$;
- $BC_a = (171, 42, 51)$;
- $BL_a = (168, 50, 62)$;
- $Na = (99, 41, 53)$.

Результаты вычисления Евклидовой метрики показаны в табл. 3.

Таблица 3

Значения Евклидовой метрики для различных методов интерполяции

Интерполяция	Евклидова метрика
Бикубическая	0,1287
Билинейная	0,1512
К ближайших соседей	0,2818

Таким образом, расчет MSE и Евклидовой метрики показал, что для фотографий, имеющих шум и прочие артефакты, наилучшим вариантом является использование бикубической интерполяции. Кроме того, она хорошо передает цветовое содержание исходного изображения и лучше прочих сохраняет акцентные цвета.

В качестве начального размера для анализа изображения было выбрано значение 200 пикселей, поскольку максимальное количество цветов в таком случае будет равно или даже менее $200 \times 200 = 40\,000$. Такое количество одновременно обеспечивает сохранение основных цветов, упрощает вычисления и уменьшает влияние шумов и возможных артефактов на конечный результат получения цветовых схем. Помимо прочего,

уменьшение размера изображения призвано привести близкие оттенки, расположенные по соседству, к единому значению.

Помимо уменьшения размера и сопутствующей интерполяции, к изображению применяется размытие по Гауссу, преследующее те же цели и показывающее хорошие результаты в области уменьшения шума и сглаживания растровых изображений [13, 14]. Важно заметить, однако, что подобное размытие не обеспечивает полного слияния друг с другом схожих оттенков, но способствует уменьшению их количества.

Обработка и анализ изображения осуществляются с использованием языка программирования Python, а также библиотеки Pillow.

Выделение ключевых цветов осуществляется с помощью кластеризации. В данном случае выбор был сделан в пользу метода k -средних, поскольку он имеет высокую результативность применительно к задаче выделения основных цветов, а также сегментации [15, 16].

Метод k -средних позволяет разбить множество цветовых векторов на фиксированное k_k непересекающихся подмножеств, называемых кластерами так, чтобы отклонение внутри кластеров было минимальным. Алгоритм повторяется до тех пор, пока центры кластеров не перестанут значительно изменяться.

Выбор значения k_k напрямую зависит от желаемого количества ключевых цветов в цветовой схеме, поскольку именно на это число и будет разделяться общее множество векторов исходного изображения. Данное значение существенным образом влияет на качество и работоспособность метода, однако в рамках исследования устанавливается вручную, а не автоматически. Для эффективного получения наилучшего для конкретного изображения значения k_k в дальнейшем планируется разработка метода, основанного на алгоритмах машинного обучения. Сейчас же параметр k_k не является фиксированным и зависит как от самого изображения, так и от цели получения цветовой схемы. Основным критерием выбора является наблюдаемое количество различных оттенков на исходном изображении. Так, в случае, например, фотографии заснеженного города в большом k_k нет смысла, поскольку в результате получится цветовая схема, состоящая из близких оттенков белого и серого. Однако для контрастного и яркого изображения, какими бывают фотографии, относящиеся к жанрам стрит или репортаж, k_k возрастет соразмерно предполагаемым цветовым кластерам, имеющимся на изображении.

В данном случае k_k принимается равным 10, что предоставляет достаточную свободу выбора ключевых цветов изображения.

Полученные в результате применения метода k -средних к изображению центры кластеров ин-

терпретируются как цвета итоговой цветовой схемы. Кластеры в схеме сортируются по выбранному критерию: доле пикселей изображения, попавших в кластер.

Данная цветовая схема призвана описать изображение на уровне главных объектов крупными мазками. Она показывает основные цвета, присутствующие на фотографии, указывает на возможную принадлежность ее некоторому жанру, для которого характерно подобное цветовое сочетание.

Кроме того, с помощью ключевых цветов возможно оценить контрастность и яркость изображения, а также его общую насыщенность.

Пример цветowych схем тестовых изображений показан на рис. 2.

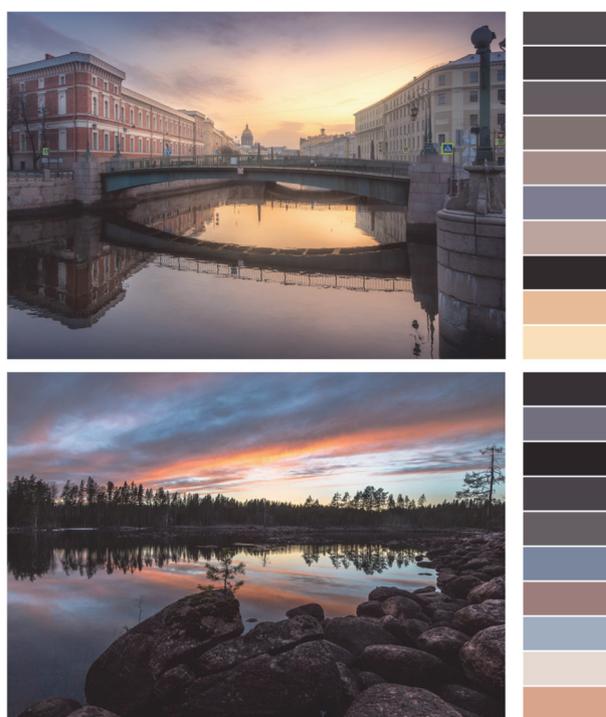


Рис. 2. Ключевые цвета изображений

Важной особенностью создания схемы ключевых цветов является задействование усреднения, лежащего в основе метода k -средних, в связи с чем некоторые близкие по своим значениям, но perceptивно отличающиеся цвета приводятся к единому значению. Это обуславливает возможное отсутствие акцентных и ярких цветов в полученной схеме.

Дополнением данной цветовой схемы служат тональные доминанты – одинаковые цвета, наиболее часто встречающиеся на изображении. Благодаря данной цветовой схеме становится возможным оценить особенности фона и количественно преобладающие оттенки.

Процесс получения тональных доминант также содержит в себе элемент кластеризации, однако вместо анализа всех цветов изображения выбираются

лишь 100 наиболее распространенных, количество повторений которых существенно выше, чем у остальных. Такое значение позволяет соблюсти баланс между разнообразием цветов фона и отсутствием наименее значимых оттенков.

Полученные в результате цвета также подвергаются кластеризации и сортируются в том же порядке, что и в случае ключевых цветов. При этом количество кластеров k_i должно быть выбрано с учетом содержания изображения, что невозможно на данный момент. В связи с этим k_i точно также, как и k_k , принимает значение 10.

Некоторые тональные доминанты, полученные из тестовых изображений, показаны на рис. 3.



Рис. 3. Тональные доминанты изображений

Между ключевыми цветами и тональными доминантами заключается существенная разница, благодаря которой данные схемы могут дополнять друг друга, но не пересекаться полностью. Ключевые цвета описывают все оттенки на изображении, собранные вокруг какого-либо общего центра, усредняющего схожие значения. Однако данная цветовая схема не учитывает количество присутствующих на изображении одинаковых цветов, из-за чего с помощью ключевых цветов невозможно оценить, например, общую яркость изображения. Тональные доминанты, напротив, описывают те цвета, которых количественно больше, благодаря чему становится возможным понять, что содержится на фоне изображения. Это особенно актуально в случае однородного фона, что часто встречается, например, в портретной съемке.

Тональные доминанты могут обнаружить скрытые особенности изображения. Если при подготовке исключить этап размытия, цвета мелких текстур, незаметные человеческому глазу, могут оказать существенное влияние на результат. Например, одной из тональных доминант фотографии желтых цветов может оказаться черный, находящийся между лепестками.

Таким образом, обе цветовые схемы: ключевые цвета и тональные доминанты, – призваны дополнять друг друга. Это отчетливо видно при анализе яркости, который невозможно провести только с помощью ключевых цветов, что продемонстрировано на рис. 4 (слева исходное изображение, посередине ключевые цвета, справа тональные доминанты).



Рис. 4. Сравнение ключевых цветов (посередине) и тональных доминант (справа)

Интересной особенностью работы с цветовыми схемами является их сопоставление. В некоторых случаях наблюдается совпадение центров, что указывает на устойчивость цветовой структуры изображения, однако чаще тональные доминанты значительно отличаются от ключевых цветов, что особенно характерно в случае однородного фона.

Еще одной цветовой схемой являются акценты. Это наиболее яркие и заметные части изображения. Для их получения необходим поканальный анализ рассматриваемого цвета, при этом цветовое пространство RGB плохо подходит для такого анализа, так как значения оттенка кодируются значениями красного, зеленого и синего, из-за чего сложно отследить четкую зависимость между ними и такими параметрами, как насыщенность и яркость. Данным недостатком лишено пространство HSV, имеющее три канала: оттенок, насыщенность и яркость, которые наилучшим образом соответствуют человеческому восприятию цвета [17]. Из-за этого именно оно используется в извлечении акцентов на изображении. Благодаря своей структуре и допустимым значениям в каналах

($H \in [0, 360]$, $S, V \in [0, 100]$) модель также широко распространена в художественной сфере (например, в цифровой живописи).

Для того чтобы получить акцентную схему, необходимо произвести действия в соответствии с алгоритмом.

1. Перевести изображение в цветовое пространство HSV.

2. Определить набор цветов, количество которых на изображении выше среднего, в такой набор будут входить все ключевые цвета и тональные доминанты.

3. Рассчитать взвешенное среднее для каждого из каналов, а также общее количество рассматриваемых цветов.

4. Найти тональные доминанты, также перевести их в модель HSV и, исходя из полученных значений, сделать вывод о высоком или низком ключе изображения.

5. Исключить из рассмотрения цвета малой яркости в случае низкого ключа и большой – в случае высокого.

6. Исключить из рассмотрения цвета с низкой насыщенностью, так как они не могут быть акцентными по определению.

7. Для каждого цвета из потенциально акцентных рассчитать разность оттенка, насыщенности и яркости, после чего рассчитать итоговую метрику контрастного отклонения.

8. Если метрика показывает значения выше 0,5 – цвет признается акцентным.

В случае данной цветовой схемы также возможно применение кластеризации, если количество акцентных цветов k_a больше заданного. В базовом случае их число равно одному.

Для того чтобы найти разность между двумя значениями оттенка, нужно учитывать фактор того, что в модели HSV данный канал принимает значения $H \in [0, 360]$. Также немаловажно, что визуальной репрезентацией канала оттенка является окружность (рис. 5). Эта особенность накладывает ограничения на расчет разности.

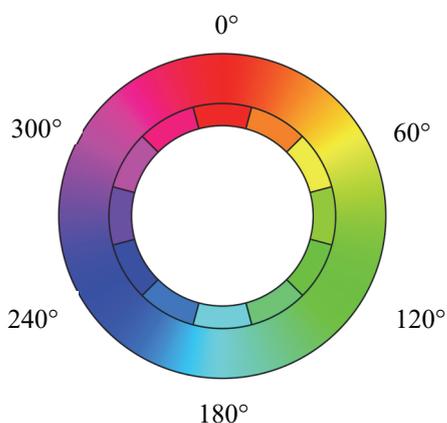


Рис. 5. Значения канала оттенка в виде окружности

Поскольку расстояние, равное искомой разности, между двумя оттенками можно найти по двум дугам, которые зачастую будут иметь разную длину, необходимо выбрать одно значение, которое должно быть минимальным, чтобы верно обозначать разницу в тоне. Также важно учитывать, что расстояние не может быть отрицательным – любое такое значение должно быть взято по модулю. Кроме того, максимальное значение разности оттенков может достигать 180° , что приводится к диапазону от 0 до 1 делением на 180.

Учитывая все вышеперечисленные особенности, разность оттенка можно найти, воспользовавшись формулой

$$\Delta_h = \frac{1}{180} \cdot \min(|h - \bar{h}|, 360 - |h - \bar{h}|), \quad (5)$$

где h – оттенок текущего цвета, а \bar{h} – взвешенное среднее всех оттенков на изображении.

Разность насыщенности и яркости находится похожим образом, за исключением того, что они, в отличие от оттенка, не имеют цикличности, а значит, не требуют дополнительной операции вычитания. Однако они точно также требуют нормализации. Для того чтобы провести ее, необходимо разделить полученную разницу на максимально возможное значение в канале, которое равно 100.

Таким образом, разность насыщенности находится по формуле

$$\Delta_s = \frac{1}{100} \cdot |s - \bar{s}|, \quad (6)$$

где s – оттенок текущего цвета, а \bar{s} – взвешенное среднее всех оттенков на изображении.

Разность яркости находится аналогично.

В качестве итоговой метрики, описывающей степень контрастного отклонения цвета от фона, используется взвешенная сумма каждого канала, что описывается следующей формулой:

$$C = w_h \cdot \Delta_h + w_s \cdot \Delta_s + w_v \cdot \Delta_v, \quad (7)$$

где w_h, w_s, w_v – веса оттенка, насыщенности и яркости соответственно, а $\Delta_h, \Delta_s, \Delta_v$ – разности оттенка, насыщенности и яркости.

При этом веса для всех каналов подбираются экспериментально, их итоговые значения показаны в табл. 4.

Таблица 4

Значения весов каналов для расчета метрики контрастного отклонения

Ключ изображения	Веса		
	оттенка	насыщенности	яркости
Низкий	0	0	1
Высокий	0,6	0,2	0,2
Отсутствует	0,5	0,2	0,3

Количество цветов в акцентной схеме k_a в гораздо большей степени зависит от содержания исходного изображения, чем в случае ключевых цветов и тональных доминант. Акценты есть не на каждом изображении, и часто их количество ограничено одним оттенком.

Пример полученной схемы, состоящей фактически из одного акцентного цвета, для тестовых изображений показан на рис. 6.



Рис. 6. Акценты изображений

Все три вида цветовых схем целесообразно использовать для анализа растровых изображений с разных точек зрения. Также их можно проверить на достоверность, используя таблицы памятных цветов. В фотографии памятными являются такие цвета, которые являются особенно характерными и запоминающимися для определенного объекта или субъекта. Так, например, цвета травы, неба или кожи относятся к памятным. Для удобства использования ряд таких цветов записан в форме таблицы [18], откуда легко получить RGB значения данных цветов.

Выбранная цветовая схема тестового изображения, содержащего в себе памятный цвет, должна также иметь его, пусть и с некоторым отличием в конкретных значениях каналов.

На рис. 7 показано изображение, содержащее памятный цвет – зеленый, цвет травы.

При этом на изображении представлено несколько отличных по яркости и насыщенности зеленых. Пробы памятного цвета (C_p) берутся из

центра изображения и верхнего правого края, в результате чего получаются два значения:

- $C_{p1} = (58, 126, 33)$;
- $C_{p2} = (165, 211, 101)$.



Рис. 7. Тестовое изображение, содержащее памятный зеленый цвет

Выделение двух ключевых цветов (C_k) дает следующие значения:

- $C_{k1} = (61, 122, 36)$;
- $C_{k2} = (119, 178, 75)$.

Результат вычисления Евклидовой метрики для первой пары векторов ΔE_{pk1} равен 0,0958, что соответствует достаточно небольшой разнице между цветами.

Вычисление ΔE_{pk2} дает значение 0,1410.

Результаты показывают большое сходство между предполагаемыми ключевыми цветами и рассчитанными автоматически.

Полученным с помощью кластеризации цветом на таблице памятных соответствуют:

- темно-зеленый: $C_{m1} = (67, 131, 23)$;
- салатный: $C_{m2} = (175, 209, 149)$.

При этом C_{m1} ставится в соответствие C_{k1} , а Евклидово расстояние между ними ΔE_{mk1} составляет 0,0383. Расстояние же между C_{m2} и C_{k2} – $\Delta E_{mk2} = 0,2215$.

Таким образом, разница между предполагаемыми и выделенными ключевыми цветами составляет не более 15%, тогда для выделенных и памятных цветов варьируется от 3,8% до 22%. Это обусловлено тем, что памятные цвета в таблице не содержат конкретных оттенков зеленого, которые бы полностью соответствовали тестовому изображению.

Тестирование результатов выделения тональных доминант осуществляется с помощью изображения, показанного на рис. 8.

Проба цвета берется с неба, имеющего равномерную синюю окраску, а также с песка. У этих двух объектов наиболее однородная окраска, что напрямую соответствует сути схемы тональных доминант.



Рис. 8. Тестовое изображение, содержащее памятный синий цвет

При этом цвета неба и песка принимают следующие значения соответственно:

- $C_{p3} = (0, 95, 203)$;
- $C_{p4} = (253, 242, 232)$.

Выделение двух тональных доминант разработанным методом дает следующие значения:

- $C_{d1} = (1, 100, 203)$;
- $C_{d2} = (252, 238, 224)$.

Отличие в предполагаемом и результирующем цвете неба составило $\Delta E_{pd1} = 0,0115$, что соответствует 1,15% и говорит о высокой степени точности выделения тональных доминант представленным методом.

Евклидово расстояние для цветов песка составило $\Delta E_{pd2} = 0,0204$, то есть 2,04%.

Цвета, выбранные из таблицы памятных цветов и наилучшим образом описывающие оттенки неба и песка, следующие:

- лазурный: $C_{m3} = (6, 89, 158)$;
- слоновая кость: $C_{m4} = (255, 238, 175)$.

Таким образом, разница между тональной доминантой и памятным цветом для неба составляет $\Delta E_{md1} = 0,1055$. То же значение для песка составляет $\Delta E_{md2} = 0,1111$.

Аналогичная проверка осуществляется и для акцентных цветов. Для тестового изображения, показанного на рис. 9, акцентным цветом является цвет кожи.

С изображения берется проба цвета кожи, в результате получается следующее значение: $C_{p5} = (231, 181, 154)$. Выявление акцента с использованием описываемого метода дало значение $C_a = (209, 159, 132)$. Евклидово расстояние между данными цветами составило $\Delta E_{pa} = 0,0863$, что соответствует 8,63%.

В качестве памятного цвета выбран телесный $CD_{m5} = (253, 216, 207)$.

Сравнение тональных доминант с памятным цветом показало довольно значительную разницу $\Delta E_{ma} = 0,2354$. Это обусловлено широким разбросом цветов кожи человека, которые зависят от индивидуальных особенностей, таких как

раса, возраст, пол и т. д. Также на цвет кожи влияют творческое видение фотографа, освещение сцены и итоговая обработка изображения.

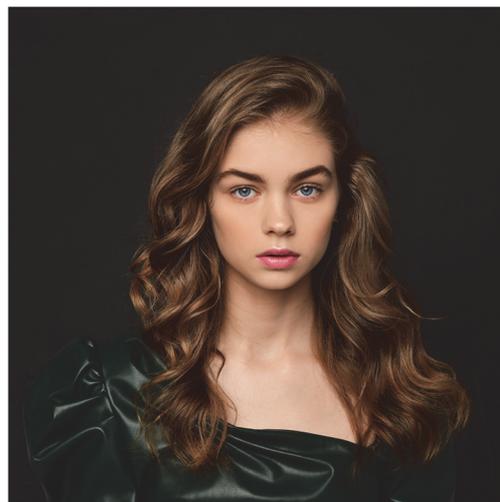


Рис. 9. Тестовое изображение, содержащее памятный цвет кожи

Полученные значения показали, что цветовые схемы соответствуют предполагаемым: значения Евклидова расстояния заключаются между 1,15% и 9,58%. Однако соответствие между цветовыми схемами и памятными цветами имеет большую погрешность (результаты разницы находятся в диапазоне от 3,8% до 23,54%), что связано с унификацией памятных цветов, из-за чего они не могут быть полностью универсальными и полностью отражать любое произвольное изображение.

Заключение. Рассмотрен метод автоматизированного анализа цветовых характеристик растровых изображений, основанный на построении цветовых схем. Определены три разновидности цветовых схем: ключевые цвета, тональные доминанты и акценты. В качестве основного метода извлечения цветовых центров выбран алгоритм кластеризации k -средних. Для повышения достоверности результатов применены методы предварительной обработки изображений, включающие масштабирование с использованием бикубической интерполяции и размытие по Гауссу. Предложен алгоритм выделения акцентных цветов, учитывающий особенности человеческого восприятия и использующий модель HSV. Осуществлена проверка достоверности построенных цветовых схем с применением таблиц памятных цветов, Евклидово расстояние между пробными цветами и цветами из полученных автоматически цветовых схем не превышало 10%. Полученные цветовые представления могут быть использованы для задач автоматизированного анализа композиции изображений, жанровой классификации и оптимизации рекомендательных систем.

Список литературы

1. Kirkpatrick K. The edge of computational photography // *Communications of the ACM*. 2019. Vol. 62, no. 7. P. 14–16. DOI: 10.1145/3329721.
2. Morse B. S. Image-Based Color Schemes // 2007 IEEE International Conference on Image Processing, San Antonio, USA, 16 September – 19 October, 2007. P. 497–500. DOI: 10.1109/ICIP.2007.4379355.
3. Hamerly G., Elkan C. Learning the k in k-means // *Advances in neural information processing systems*. 2003. No. 16. P. 281–288.
4. Cheng Ya., Chen Sh., Image classification using color, texture and regions // *Image and Vision Computing*. 2003. No. 21 (9). P. 759–776. DOI: 10.1016/S0262-8856(03)00069-6.
5. Социальная сеть профессиональных фотографов #35. URL: <https://35photo.pro/> (дата обращения: 24.04.2025).
6. Freeman M. Capturing light: The heart of photography. Burlington: Focal Press, 2014. 257 p.
7. 35PHOTO – фото сайт – фотографии. URL: https://35photo.pro/profile/photo/add_photo/?new=true (дата обращения: 24.04.2025).
8. Ворошень В. А., Романенко Д. М. Формализация и особенности анализа композиции изображений // Повышение качества жизни и обеспечение конкурентоспособности экономики на основе инновационных образовательных и научно-технических разработок: сб. ст. VII Междунар. науч.-техн. конф. «Минские научные чтения – 2024», Минск, 3–5 дек. 2024 г.: в 3 т. Минск, 2024. Т. 1. С. 361–366.
9. Wolfe M. J., Horowitz S. T. What Attributes Guide the Deployment of Visual Attention and How Do They Do It? // *Nature Reviews Neuroscience*. 2004. No. 5 (6). P. 495–501. DOI: 10.1038/nrn1411.
10. Verma R., Ali J. A Comparative Study of Various Types of Image Noise and Efficient Noise Removal Techniques // *International Journal of Advanced Research in Computer Science and Software Engineering*. 2013. No. 3. P. 617–622.
11. Chicco D., Warrens M. J., Jurman G. The coefficient of determination R-squared is more informative than SMAPE, MAE, MAPE, MSE and RMSE in regression analysis evaluation // *Peerj computer science*. 2021. No. 7. P. 623.
12. Wang L., Zhang Y., Feng J. On the Euclidean distance of images // *IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence*. 2005. Vol. 27, no. 8. P. 1334–1339.
13. Eswar S. Noise reduction and image smoothing using gaussian blur. A graduate project in fulfillment of the requirements for the degree of Masters of Science in Electrical Engineering. Northridge, 2015. 89 p.
14. Cadena L. Noise reduction techniques for processing of medical images // *Proceedings of the World Congress on Engineering*. 2017. Vol. 1. P. 5–9.
15. Шмаков М. С., Товмасян А. А. Анализ цветовой палитры изображений для определения преобладающих цветовых тонов // *Труды БГТУ*. 2015. № 9: Издательское дело и полиграфия. С. 120–124.
16. Wu M., Lin Ch., Chang Ch. Brain Tumor Detection Using Color-Based K-Means Clustering Segmentation // *Third International Conference on Intelligent Information Hiding and Multimedia Signal Processing*, Kaohsiung, Taiwan, 26–28 November, 2007. P. 245–250. DOI: 10.1109/IIHMSP.2007.4457697.
17. Vadivel A., Sural Sh., Majumdar A. K. Human color perception in the HSV space and its application in histogram generation for image retrieval // *Electronic Imaging 2005*, 16–20 January, 2005. San Jose, United States. DOI: 10.1117/12.586823.
18. Василевич А. П., Кузнецова С. Н., Мищенко С. С. Цвет теплый, цвет холодный. Как это видится российскому глазу? // *Курсив*. 1994. С. 8–13.

References

1. Kirkpatrick K. The edge of computational photography. *Communications of the ACM*, 2019, vol. 62, no. 7, pp. 14–16. DOI: 10.1145/3329721.
2. Morse B. S. Image-Based Color Schemes. *2007 IEEE International Conference on Image Processing, San Antonio, USA, 16 September – 19 October, 2007*, pp. 497–500. DOI: 10.1109/ICIP.2007.4379355.
3. Hamerly G., Elkan C. Learning the k in k-means. *Advances in neural information processing systems*, 2003, no. 16, pp. 281–288.
4. Cheng Ya., Chen Sh., Image classification using color, texture and regions. *Image and Vision Computing*, 2003, no. 21 (9), pp. 759–776. DOI: 10.1016/S0262-8856(03)00069-6.
5. Social network for professional photographers #35. Available at: <https://35photo.pro/> (accessed 24.04.2025) (In Russian).
6. Freeman M. Capturing light: The heart of photography. Burlington, Focal Press Publ., 2014. 257 p.
7. 35PHOTO – world photography. Available at: https://35photo.pro/profile/photo/add_photo/?new=true (accessed 24.04.2025) (In Russian).

8. Voroshen V. A., Romanenko D. M. Formalization and features of image composition analysis. *Povysheniye kachestva zhizni i obespecheniye konkurentosposobnosti ekonomiki na osnove innovatsionnykh obrazovatel'nykh i nauchno-tekhnicheskikh razrabotok: sbornik statey VII Mezhdunarodnoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii* [Improving the quality of life and ensuring the competitiveness of the economy based on innovative educational and scientific and technical developments: collection of articles of the VII International Scientific and Technical Conference]. Minsk, 2024, vol. 1, pp. 361–366 (In Russian).
9. Wolfe M. J., Horowitz S. T. What Attributes Guide the Deployment of Visual Attention and How Do They Do It? *Nature Reviews Neuroscience*, 2004, no. 5 (6), pp. 495–501. DOI: 10.1038/nrn1411.
10. Verma R., Ali J. A Comparative Study of Various Types of Image Noise and Efficient Noise Removal Techniques. *International Journal of Advanced Research in Computer Science and Software Engineering*, 2013, no. 3, pp. 617–622.
11. Chicco D., Warrens M. J., Jurman G. The coefficient of determination R-squared is more informative than SMAPE, MAE, MAPE, MSE and RMSE in regression analysis evaluation. *Peerj computer science*, 2021, no. 7, p. 623.
12. Wang L., Zhang Y., Feng J. On the Euclidean distance of images. *IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence*, 2005, vol. 27, no. 8, pp. 1334–1339.
13. Eswar S. Noise reduction and image smoothing using gaussian blur. A graduate project in fulfillment of the requirements for the degree of Masters of Science in Electrical Engineering. Northridge, 2015. 89 p.
14. Cadena L. Noise reduction techniques for processing of medical images. *Proceedings of the World Congress on Engineering*, 2017, vol. 1, pp. 5–9.
15. Shmakov M. S., Tovmasyan A.A. The analysis of the color palette of images for determination of the prevailing color tones. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2015, no. 9, Publishing and printing, pp. 120–124 (In Russian).
16. Wu M., Lin Ch., Chang Ch. Brain Tumor Detection Using Color-Based K-Means Clustering Segmentation. *Third International Conference on Intelligent Information Hiding and Multimedia Signal Processing, Kaohsiung, Taiwan, 26–28 November, 2007*, pp. 245–250. DOI: 10.1109/IIHMSP.2007.4457697.
17. Vadivel A., Sural Sh., Majumdar A. K. Human color perception in the HSV space and its application in histogram generation for image retrieval. *Electronic Imaging 2005, 16–20 January, 2005*. San Jose, United States. DOI: 10.1117/12.586823.
18. Vasilevich A. P., Kuznetsova S. N., Mishchenko S. S. The color is warm, the color is cold. How does this look to the Russian eye? *Kursiv* [Kursiv], 1994, pp. 8–13 (In Russian).

Информация об авторах

Ворошень Виктория Алексеевна – магистрант кафедры информационных систем и технологий. Белорусский государственный технологический университет (ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: nikavorosh@gmail.com

Романенко Дмитрий Михайлович – кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой информатики и веб-дизайна. Белорусский государственный технологический университет (ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: rdm@belstu.by

Information about the authors

Voroshen Viktoryia Alekseevna – Master's degree student, the Department of Information Systems and Technologies. Belarusian State Technological University (13a Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: nikavorosh@gmail.com

Romanenko Dmitri Mikhailovich – PhD (Engineering), Associate Professor, Head of the Department of Informatics and Web Design. Belarusian State Technological University (13a Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: rdm@belstu.by

Поступила 12.05.2025

УДК 003.26+004.56+004.627

Н. В. Попеня, Д. М. Романенко

Белорусский государственный технологический университет

**МЕТОД АУДИОСТЕГАНОГРАФИИ ДЛЯ ААС-СЖАТЫХ АУДИОСИГНАЛОВ
НА ОСНОВЕ ЭХО-КОДИРОВАНИЯ И АДАПТИВНОГО КЕПСТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА**

Статья посвящена разработке и исследованию метода аудиостеганографии, предназначенного для работы с аудиосигналами, подверженными ААС-сжатию. Предлагаемый метод основан на эхо-кодировании, при котором бинарная информация встраивается путем добавления к сигналу его ослабленной копии с одной из двух фиксированных временных задержек. Ключевым элементом является алгоритм извлечения данных, использующий адаптивный кепстральный анализ. Особенность анализа заключается в динамическом вычислении порога детектирования эха для каждого аудиоблока на основе статистических характеристик (медианы и стандартного отклонения) его кепстра в областях, свободных от ожидаемых пиков. Такой адаптивный подход обеспечивает надежность обнаружения скрытой информации в условиях значительных искажений, вносимых ААС-сжатием. При встраивании данных в «тихие» сегменты различных типов аудиоконтента и последующем сжатии кодеком ААС (256 кбит/с) достигнута высокая точность восстановления информации, характеризуемая коэффициентом битовых ошибок (BER) менее 6% для большинства тестовых сигналов. Проведен сравнительный анализ BER для сценариев извлечения из исходного сигнала, после сохранения в формате WAV без потерь и после ААС-сжатия. Обсуждается влияние характеристик сигнала на эффективность метода, анализируется характер возникающих ошибок и обосновывается необходимость применения кодов коррекции ошибок для обеспечения безошибочного извлечения.

Ключевые слова: аудиостеганография, эхо-кодирование, кепстральный анализ, адаптивный порог, ААС-сжатие, устойчивость к сжатию.

Для цитирования: Попеня Н. В., Романенко Д. М. Метод аудиостеганографии для ААС-сжатых аудиосигналов на основе эхо-кодирования и адаптивного кепстрального анализа // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2025. № 2 (296). С. 110–119.

DOI: 10.52065/2520-6141-2025-296-14.

N. V. Popenya, D. M. Romanenko

Belarusian State Technological University

**AN AUDIO STEGANOGRAPHY METHOD FOR AAC-COMPRESSED AUDIO SIGNALS
BASED ON ECHO HIDING AND ADAPTIVE CEPSTRAL ANALYSIS**

This article is dedicated to the development and research of an audio steganography method designed for operation with audio signals subjected to AAC compression. The proposed method is based on echo hiding, where binary information is embedded by adding an attenuated copy of the signal at one of two fixed time delays. A key element is the data extraction algorithm, which utilizes adaptive cepstral analysis. The distinctiveness of this analysis lies in the dynamic calculation of the echo detection threshold for each audio block, based on the statistical characteristics (median and standard deviation) of its cepstrum in regions free of expected peaks. This adaptive approach enhances the reliability of detecting hidden information under conditions of significant distortions introduced by AAC compression. The paper presents results of experimental validation, including Bit Error Rate (BER) assessment after AAC compression (256 kbps) on various audio content types. When embedding data into silent segments of various audio content types followed by AAC compression (256 kbps), a high data recovery accuracy was achieved, characterized by a Bit Error Rate (BER) of less than 6% for most test signals. A comparative BER analysis is provided for extraction scenarios from the original signal, after lossless WAV saving, and after AAC compression. The influence of signal characteristics on the method's effectiveness is discussed, the nature of occurring errors is analyzed, and the necessity of employing error correction codes to ensure error-free extraction is substantiated.

Keywords: audio steganography, echo hiding, cepstral analysis, adaptive threshold, AAC compression, compression robustness.

For citation: Popenya N. V., Romanenko D. M. An audio steganography method for AAC-compressed audio signals based on echo hiding and adaptive cepstral analysis. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2025, no. 2 (296), pp. 110–119 (In Russian).

DOI: 10.52065/2520-6141-2025-296-14.

Введение. Обеспечение безопасности и конфиденциальности цифровой информации является одной из ключевых задач современной информатики [1]. Наряду с криптографией, скрывающей содержимое сообщения, активно развивается стеганография – область знаний, посвященная сокрытию самого факта существования тайного канала связи [2]. Основная цель стеганографии – встроить секретное сообщение в цифровой контейнер (например, изображение, аудио- или видеофайл) таким образом, чтобы наличие скрытых данных было невозможно обнаружить стандартными средствами или человеческим восприятием [3].

Видеофайлы, объединяющие визуальную и звуковую информацию, представляют особый интерес в качестве стеганографических контейнеров из-за их большого объема и широкого пространства. Аудиопоток видеофайла обладает значительной перцептивной избыточностью, которую можно использовать для встраивания дополнительной информации [4].

Однако широкое применение алгоритмов сжатия аудио с потерями, таких как AAC (Advanced Audio Coding) [5], создает серьезные препятствия для многих стеганографических методов. Простейшие подходы, например метод наименее значащего бита (LSB), модифицирующий младшие биты амплитудных отсчетов, оказываются крайне неустойчивыми, поскольку информация, внесенная таким способом, необратимо искажается или теряется в процессе квантования и удаления перцептивно незначимых компонент сигнала кодеком [4, 6]. Это существенно ограничивает практическую применимость LSB-методов в реальных сценариях передачи или хранения аудиоданных, особенно если данные подвергаются последующей обработке или сжатию.

Для повышения устойчивости стеганографических систем к сжатию разрабатываются более сложные методы, оперирующие в других областях представления сигнала или использующие его специфические свойства. Одним из таких методов является эхо-кодирование (echo hiding) [7]. Суть метода заключается во внесении в исходный сигнал его копии (эха), ослабленной по амплитуде и задержанной на определенное время. Скрываемая информация кодируется путем выбора одного из нескольких возможных значений временной задержки эха. Предполагается, что короткое эхо с малой амплитудой будет незаметно для слушателя благодаря эффектам маскировки слуховой системы [8], но при этом может быть обнаружено при извлечении с помощью автокорреляционного или кепстрального анализа [9]. Кепстральный анализ позволяет выявить периодичность, внесенную эхом, в виде пика в кепстре

на соответствующей задержке. Эхо-кодирование потенциально более устойчиво к сжатию, чем LSB, так как оно модифицирует глобальные характеристики сигнала, а не отдельные биты отсчетов.

Тем не менее надежное детектирование пиков эха в кепстре после AAC-сжатия остается сложной задачей. Сжатие вносит искажения, которые могут ослаблять или маскировать пики эха, а также добавлять ложные пики, что приводит к ошибкам при извлечении данных.

Целью исследования является экспериментальный анализ и апробация метода аудиостеганографии видеоконтейнеров, основанного на эхо-кодировании, с акцентом на повышении надежности извлечения данных после AAC-сжатия. Для этого предлагается использовать детектор на основе кепстрального анализа с применением адаптивного порога шума, динамически подстраивающегося под характеристики каждого анализируемого аудиоблока. В работе представляются результаты оценки точности восстановления данных после сжатия кодеком AAC (256 кбит/с) и обсуждается применимость метода.

Основная часть. Предлагаемый метод аудиостеганографии предназначен для встраивания скрытой информации M в аудиоконтейнер (аудиопоток A_{in}) цифровых видеоконтейнеров V_{in} . Современные видеофайлы, такие как MP4, AVI, MKV и другие, представляют собой мультимедийные контейнеры, содержащие несколько потоков данных, включая видеоряд (последовательность изображений) и одну или несколько аудиодорожек. Именно такая аудиодорожка, извлеченная из видеофайла и представленная в виде последовательности цифровых отсчетов (сэмплов), служит контейнером для скрытия информации. Реализация метода включает несколько ключевых этапов, обеспечивающих как конфиденциальность и целостность передаваемых данных, так и их скрытность и устойчивость к последующей обработке, в частности к сжатию с потерями. Для обеспечения конфиденциальности и целостности исходное сообщение M предварительно шифруется с использованием алгоритма AES в режиме GCM (Galois/Counter Mode) [10, 11]. Этот режим генерирует как шифротекст, так и тег аутентификации, объединенные в токен C . Для повышения надежности к данным добавляется избыточность с применением специальных корректирующих кодов, что позволяет исправить определенное количество ошибок, возникающих при передаче или сжатию. Также формируется служебный заголовок H , содержащий метаданные, необходимые для корректного извлечения (как минимум, длину исходного шифротекста). Итоговый блок данных,

состоящий из заголовка H и шифротекста S , затем обрабатывается алгоритмом помехоустойчивого кодирования, в результате чего к нему добавляются контрольные символы (или символы избыточности). Полученный блок данных преобразуется в битовый поток E для последующего встраивания.

Ключевой особенностью предлагаемого метода является обеспечение повышенной устойчивости к сжатию с потерями при одновременном сохранении скрытности встраиваемых данных. Устойчивость достигается за счет использования эхо-кодирования, которое модифицирует кепстральные характеристики сигнала [7]. Скрытность обеспечивается путем встраивания данных преимущественно в сегменты аудиосигнала с низкой энергией («тихие» участки), где внесенные изменения менее заметны для человеческого уха [8]. Однако, как показали предварительные эксперименты, AAC-сжатие может изменять характеристики этих «тихих» сегментов, что приводит к проблеме синхронизации при извлечении, если полагаться на повторный анализ тишины. Для решения этой проблемы предлагается использовать синхромаркеры – специальные сигналы, встраиваемые перед блоками данных и устойчивые к сжатию.

Алгоритм встраивания информации можно представить в виде последовательности из нескольких действий.

1. Осуществляется анализ исходного монофонического аудиосигнала $x(t)$ (полученного из A_{in}) для поиска участков, подходящих для скрытия данных. Используется метод, основанный на оценке кратковременной энергии сигнала. Сигнал разбивается на перекрывающиеся временные фреймы длительностью T_{frame} (например, 30 мс) с шагом T_{hop} ($T_{frame} / 2$). Для каждого i -го фрейма $x_i(t)$ вычисляется его спектр с помощью быстрого преобразования Фурье (БПФ) с применением оконной функции (Ханна $w(t)$) для сглаживания краев: $X_i(f) = FFT\{x_i(t)w(t)\}$. Энергия фрейма P_i оценивается как сумма квадратов амплитуд спектральных компонент: $P_i = \sum |X_i(f)|^2$.

2. Фреймы, энергия которых P_i оказывается ниже заданного порога Th_{energy} , помечаются как «тихие». Этот порог является важным параметром, влияющим на количество найденных участков и их характеристики. Последовательности смежных тихих фреймов объединяются в непрерывные «тихие» сегменты. Для дальнейшей обработки отбираются только те сегменты, чья длительность превышает минимально допустимые пороги (Dur_{min} , Dur_{embed}), чтобы обеспечить достаточное пространство для встраивания блока данных или синхромаркера и избежать артефактов

на слишком коротких участках. Результатом этого этапа является список временных интервалов $\{(s_1, e_1), (s_2, e_2), \dots\}$, соответствующих границам (начало s , конец e в сэмплах) подходящих тихих сегментов. На рис. 1 приведен пример результатов анализа тишины для фрагмента одного из тестовых аудиосигналов. Предложенный алгоритм анализа успешно идентифицирует участки сигнала с низкой энергией. Логарифмический масштаб по оси энергии на нижнем графике позволяет наглядно оценить значительное падение энергии в этих сегментах по сравнению с участками активной речи.

3. Для непосредственного скрытия битов подготовленного потока данных E в выбранные «тихие» сегменты используется метод эхо-кодирования. Принцип данного метода заключается во внесении в исходный аудиосигнал искусственного эха – его копии, ослабленной по амплитуде и смещенной во времени. Бинарная информация («0» или «1») кодируется путем выбора одной из двух predetermined временных задержек эха.

4. Пусть для кодирования бита «0» выбрана задержка d_0 , а для бита «1» – задержка d_1 (где $d_0 \neq d_1$, и обе задержки достаточно малы, например, в диапазоне 15–75 мс, чтобы эхо было perceptивно замаскировано, но достаточно велико для разрешения кепстром). Выбранный для встраивания «тихий» сегмент аудиосигнала $x(t)$ разбивается на блоки фиксированной длины T_{seg} (например, 100 мс), соответствующей длине, используемой при кепстральном анализе. Для каждого j -го блока $x_j(t)$, в который необходимо встроить бит b_j , формируется модифицированный блок $x'_j(t)$ по формуле

$$x'_j(t) = x_j(t) + \alpha \times x_j(t - d_{b_j}),$$

где d_{b_j} равно d_0 , если $b_j = 0$, и d_1 , если $b_j = 1$, параметр α – это коэффициент ослабления эха (например, 0,6–0,8), который определяет баланс между устойчивостью (более сильное эхо легче детектировать) и незаметностью (слабое эхо менее слышимо). Важно отметить, что при добавлении эха амплитуда результирующего сигнала может превысить допустимый диапазон (например, $[-1, 1]$ для нормализованных данных), поэтому после суммирования необходимо применять клиппирование (ограничение значений). Модифицированные блоки $x'_j(t)$ затем заменяют исходные блоки в общем аудиопотоке.

Далее рассмотрим процесс извлечения скрытых бит из принятого (и потенциально искаженного AAC-сжатием) аудиосигнала $x''(t)$, который выполняется с помощью кепстрального анализа. Наличие эха с задержкой d в сигнале $x(t)$ приводит к появлению пика в кепстре $c(\tau)$ этого сигнала при «квевренсии» τ , равной задержке d .

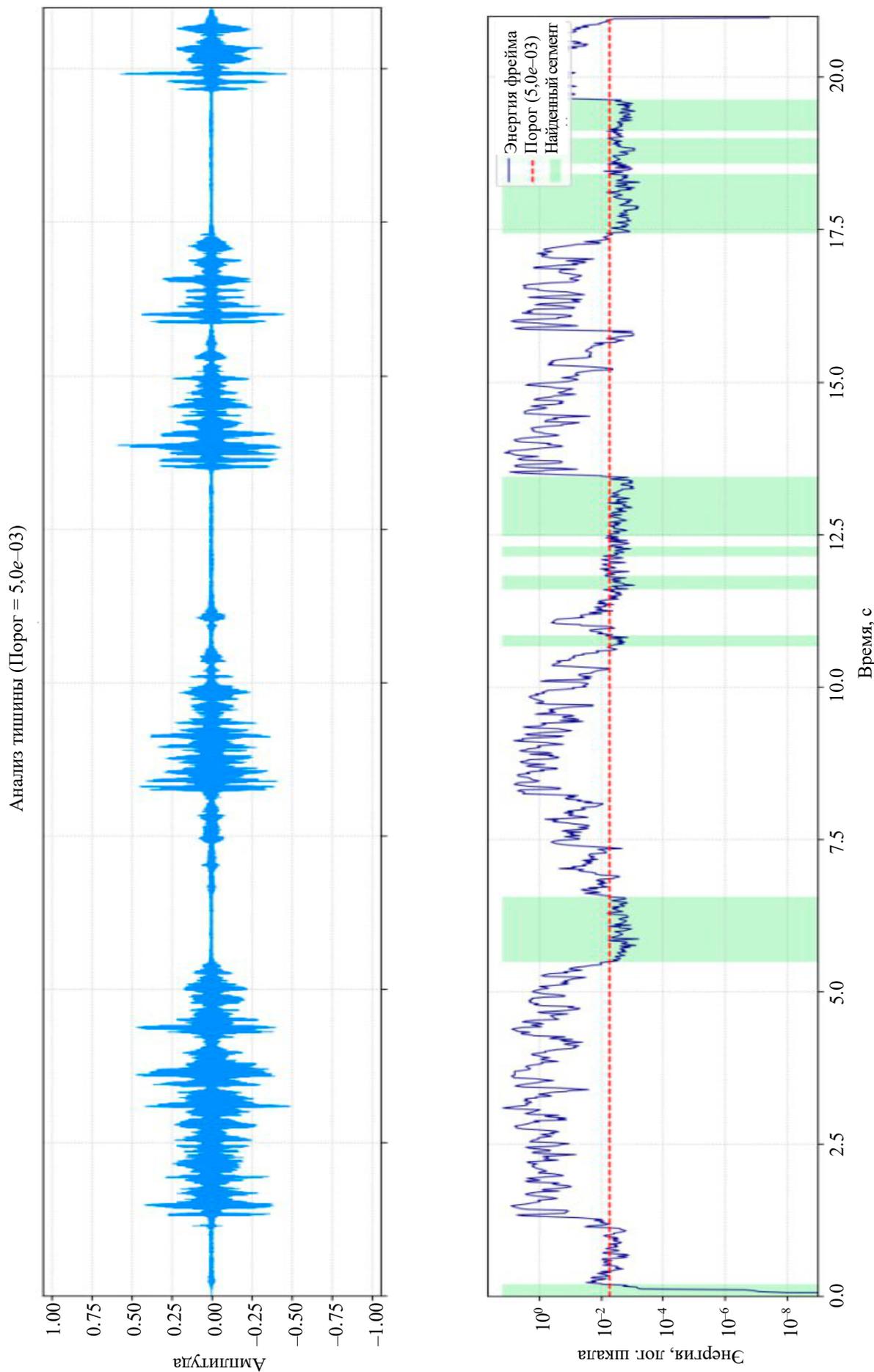


Рис. 1. Пример результатов анализа тишины для фрагмента аудиосигна

Для каждого блока $x''_j(t)$ процедура извлечения информации включает ряд последовательных действий.

1. Вычисление кепстра $c_j(\tau)$ блока $x''_j(t)$.

2. Вычисление адаптивного порога шума NF_j .

Для этого анализируется сам кепстр $c_j(\tau)$ в областях, где заведомо нет ожидаемых пиков эха (т. е., исключая окрестности $d0$, $d1$ и область низких квефренсий). По значениям кепстра в этих «шумовых» областях вычисляется статистическая оценка, например, $NF_j = \text{median}(c_{\text{noise}}) + k_{\text{std}} \times \text{std}(c_{\text{noise}})$. Это позволяет порогу подстраиваться под текущий уровень шума кепстра конкретного блока.

3. Поиск пиков. В кепстре $c_j(\tau)$ ищутся локальные максимумы $Peak0$ и $Peak1$ в небольших

окрестностях ожидаемых квефренсий $d0$ и $d1$ соответственно.

4. Проверка валидности пиков. Найденные пики сравниваются с адаптивным порогом шума: $is_{\text{valid}0} = Peak0 > NF_j$, $is_{\text{valid}1} = Peak1 > NF_j$.

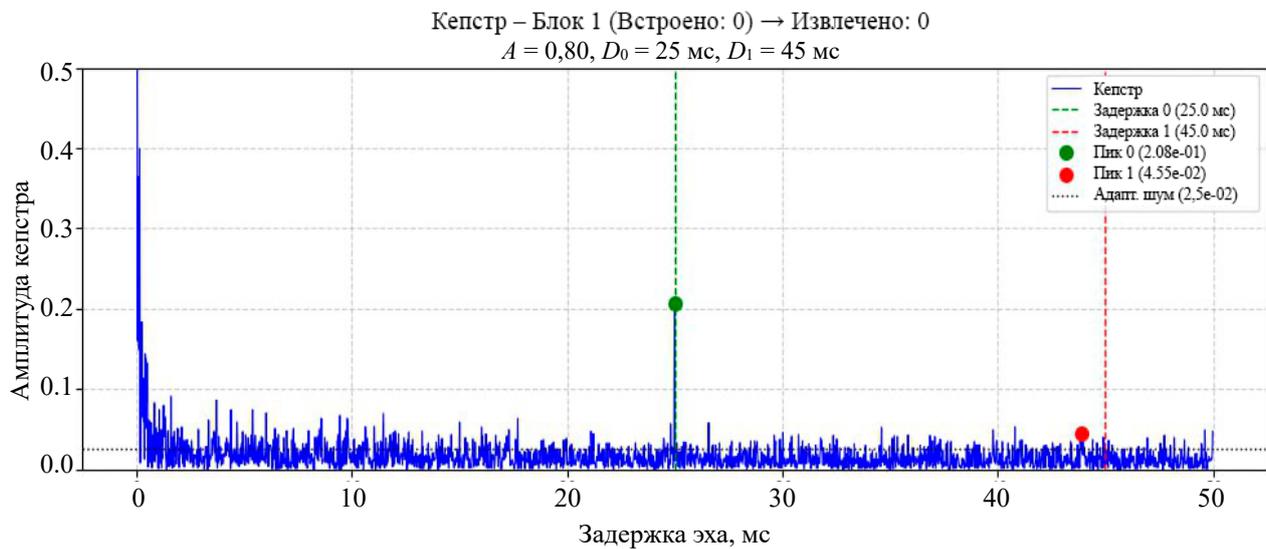
5. Принятие решения. Используется модифицированный детектор:

– если валиден только $Peak1$, декодируется бит «1»;

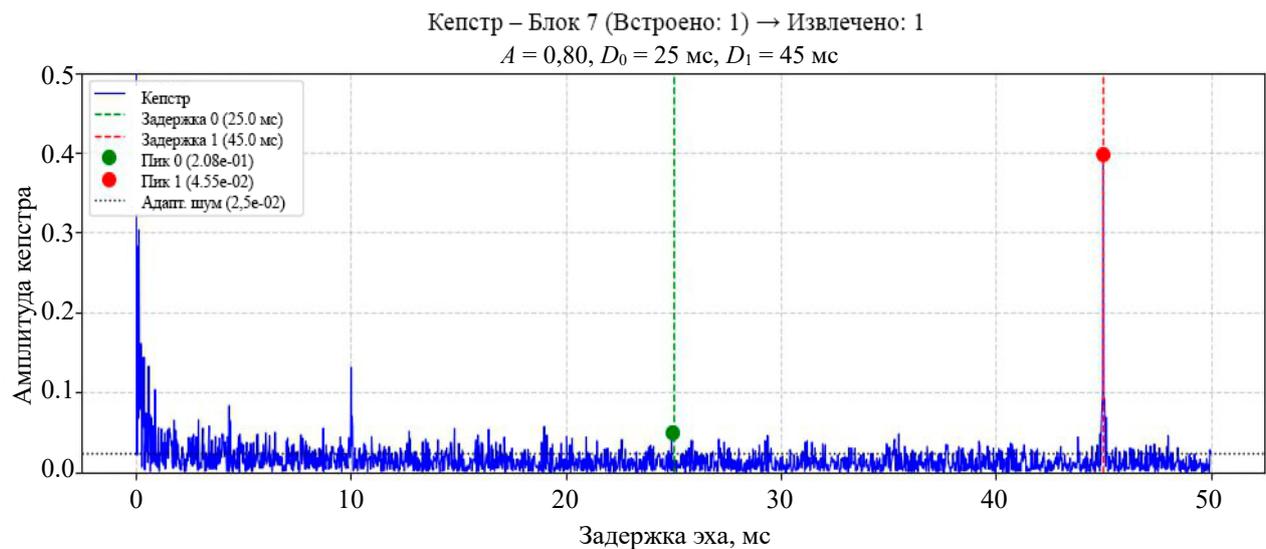
– если валиден только $Peak0$, декодируется бит «0»;

– если оба пика валидны, бит определяется по тому, какой пик выше: «1», если $Peak1 > Peak0$, иначе «0» (рис. 2);

– если оба пика невалидны (ниже адаптивного порога), декодируется бит «0».



а



б

Рис. 2. Иллюстрация работы адаптивного кепстрального детектора:
 а – декодирование бита «0»; б – декодирование бита «1»

Вертикальные линии – ожидаемые квефренсии для $d0$ и $d1$. Маркеры – найденные пики $Peak0$ и $Peak1$ (закрашенные – валидные, т. е. выше адаптивного порога). Горизонтальная пунктирная линия – адаптивный порог шума NF_j , вычисленный для данного блока.

Подход с адаптивным порогом, позволяющий детектору подстраиваться под локальные характеристики кепстра. Такая адаптация обеспечивает лучшую надежность по сравнению с использованием единого фиксированного порога для всего сигнала, особенно при наличии вариаций уровня шума кепстра между различными аудиоблоками, что характерно для сигналов после сжатия с потерями.

Тем не менее применение AAC-кодека модифицирует статистические и спектральные свойства аудиосигнала, в результате чего алгоритм поиска «тихих» сегментов, использованный при встраивании, примененный повторно на этапе извлечения, идентифицирует иной набор временных интервалов. Это делает невозможной точную синхронизацию при извлечении данных. Для обеспечения корректной синхронизации при извлечении предлагается использовать синхромаркеры. Перед каждым блоком аудио $x'_j(t)$, в который встроены данные методом эха, вставляется короткий, уникальный и устойчивый к искажениям маркерный сигнал $m(t)$.

Требование к маркеру $m(t)$ состоит в том, что он должен легко детектироваться в сигнале $x''(t)$ даже после AAC-сжатия и иметь низкую вероятность ложного срабатывания на участках обычного аудио. В качестве маркера используются сигналы с хорошими автокорреляционными свойствами, например шумоподобные, сгенерированные на основе псевдослучайных последовательностей (M -последовательности, коды Баркера, Голда).

Использование синхромаркеров позволяет отказаться от анализа тишины при извлечении и точно локализовать блоки данных, но требует разработки надежного маркера (детектора) и вносит дополнительную избыточность, уменьшая полезную емкость стегоканала.

Для оценки работоспособности и устойчивости предложенного метода эхо-кодирования с кепстральным анализом и адаптивным детектором проведена серия вычислительных экспериментов. Тестирование выполнялось на реальном аудиовизуальном контенте – видеофайлах формата MP4, содержащем видеодорожку (H.264) и стереоаудиодорожку с частотой дискретизации 44,1 кГц (в экспериментах использовался один канал).

В качестве контейнеров использовался набор из видеофайлов формата MP4 (кодек видео H.264, кодек аудио исходный – AAC, частота дискретизации аудио 44,1 кГц, стерео). Длительность тес-

товых фрагментов варьировалась от десятков секунд до нескольких минут. Файлы были подобраны таким образом, чтобы представить различные типы аудиоконтента:

- содержащие записи голоса с различным качеством записи и уровнем фонового шума;
- включающие фрагменты различных жанров музыки, характеризующиеся разной динамикой, спектральной насыщенностью и наличием (отсутствием) пауз;
- содержащие записи окружающей среды с преобладанием стационарных или квазистационарных шумов (шум улицы, гул аппаратуры, природные звуки) при отсутствии доминирующего полезного сигнала;
- объединяющие речь, музыку и фоновые шумы.

Программная реализация алгоритмов выполнена на языке Python с использованием библиотек `moviepy` для работы с медиафайлами, `numpy` и `scipy` для цифровой обработки сигналов (БПФ, ОБПФ, кепстр), `soundfile` для промежуточного сохранения аудио.

На первом этапе проверялась корректность работы алгоритмов встраивания и извлечения в идеальных условиях, без влияния сжатия с потерями. Была сгенерирована псевдослучайная битовая последовательность известной длины ($N = 50$ бит). Исходный аудиосигнал был проанализирован для поиска «тихих» сегментов с использованием порога энергии $Th_{energy} = 0,005$ и минимальной длительности сегмента для обработки $Dur_{embed} = 150$ мс (при длине фрейма 30 мс и минимальной длине тишины 75 мс). Найденные сегменты были разбиты на блоки фиксированной длины $T_{seg} = 100$ мс. Для эхо-кодирования были выбраны следующие параметры: коэффициент ослабления эха $\alpha = 0,8$; задержка для бита «0» $d0 = 25$ мс, задержка для бита «1» $d1 = 45$ мс.

Тестовые биты были встроены в соответствующие блоки копии исходного аудиосигнала. Затем из этого же модифицированного массива в памяти были извлечены биты. Сравнение извлеченной последовательности с исходной показало точность 100%.

Далее модифицированный аудиосигнал был сохранен во временный файл формата WAV (без потерь) и немедленно загружен обратно. Из загруженных данных снова были извлечены биты с использованием тех же параметров. Результат сравнения показал идентичную точность 100%. Это подтверждает, что операции сохранения (загрузки) в формате WAV и используемая библиотека `soundfile` не вносят существенных искажений, влияющих на кепстральный детектор эха. Высокая точность в этих тестах свидетельствует о корректной реализации базовых алгоритмов эхо-кодирования и адаптивного извлечения.

Основной целью экспериментов является оценка устойчивости метода к сжатию с потерями. Для этого был проведен тест, имитирующий реальный сценарий сохранения видеоконтейнера.

В рамках теста сгенерирована новая последовательность из 100 бит. Эти биты были встроены методом эха с теми же параметрами ($\alpha = 0,8$; $d0 = 25$; $d1 = 45$; $len = 100$) в предварительно идентифицированные «тихие» сегменты моноверсии исходного аудиосигнала. Модифицированный аудиосигнал был затем мультиплексирован с исходным видеопотоком (перекодированным с libx264) и сохранен в файл MP4 с использованием аудиокодека AAC с битрейтом 256 кбит/с.

После сохранения стего-контейнер был снова загружен, аудиодорожка (уже прошедшая AAC-сжатие и декодирование) извлечена. Из этого аудиосигнала были извлечены биты эха. Анализируются участки, соответствующие исходным позициям «тихий» сегментов, использованных для встраивания, путем их разбиения на блоки и применения адаптивного кепстрального детектора. Экспериментальная оценка устойчивости метода проводилась на выборке видеофайлов, содержащих аудиоконтент различного типа: речь, музыка, фоновые шумы. Для понимания влияния характеристик контейнера на точность восстановления данных для каждого тестового файла были вычислены акустические признаки в пределах найденных «тихий» сегментов. Результаты оценки устойчивости предложенного метода к AAC-сжатию для различных типов аудиоконтента сведены в таблицу.

Результаты экспериментов по восстановлению данных после AAC-сжатия для различных типов аудиоконтента

Тип файла	RMS, норм.	Центр, Гц	Шир., Гц	Тиш., %	Точн. AAC, %
Смешанный звук	0,0015	6014	5578	45,8	94
Речь тихая	0,0013	7171	5736	62,1	98
Речь громкая	0,0025	6850	5612	18,5	98
Музыка тихая	0,0017	4955	4793	71,2	100
Музыка громкая	0,0031	3211	4432	12,6	98
Фоновый шум громкий	0,0040	3513	4809	11,8	98
Фоновый шум тихий	0,0014	2855	2607	15,3	100
Фоновый шум смешанный	0,0031	3660	4274	22,6	95

В таблице в качестве характеристик тихих сегментов были выбраны:

1) RMS – среднеквадратичное значение амплитуды, усредненное по всем найденным «тихим» участкам, отражающее средний уровень остаточного сигнала или шума;

2) спектральный центроид – среднее значение спектрального центроида по «тихим» сегментам, показывающее преобладающие частоты;

3) спектральная ширина – средняя спектральная ширина, характеризующая разброс энергии по спектру в «тихий» зонах;

4) тишина – процентное соотношение общей длительности всех найденных «тихий» сегментов к общей длительности аудиосигнала;

5) точность AAC – показатель итоговой точности восстановления бит данных, встроенных в блоки модифицированного аудиосигнала перед его AAC-сжатием, и последующего извлечения из сжатого-разжатого сигнала.

Анализ результатов на различных аудиоконтейнерах показал зависимость точности метода от характеристик сигнала. На файлах с относительно низким уровнем фонового шума в «тихий» сегментах ($RMS \approx 0,0013-0,0017$) и простым спектральным составом (низкие значения спектральной ширины) была достигнута высокая точность восстановления данных после AAC-сжатия, составляющая 98–100%. Некоторое снижение точности до 94–95% наблюдалось для файлов со смешанным аудиоконтентом и для записи с выраженными реверберационными характеристиками (фоновый смешанный шум), несмотря на наличие достаточного количества «тихий» сегментов. Это свидетельствует о том, что не только уровень фонового шума, но и его спектральная сложность (например, более высокая спектральная ширина в смешанном звуке) или наличие специфических акустических эффектов (реверберация в смешанном фоновом шуме) в сегментах, выбранных для встраивания (даже если они формально «тихий»), влияют на стабильность кепстрального представления после AAC-сжатия и, как следствие, на надежность детектирования пиков эха. Более высокий или нестационарный уровень шума, а также наличие реверберации могут затруднять работу адаптивного порога или маскировать слабые пики эха, что приводит к увеличению количества ошибок декодирования. Тем не менее стабильно высокая точность (>94%) на разнообразных типах контента подтверждает робастность подхода с адаптивной детекцией по сравнению с методами, использующими фиксированные пороги.

Исследование характера ошибок показало, что в большинстве случаев они являются одиночными независимыми битовыми искажениями. Лишь в одном эксперименте был зафиксирован пакет ошибок длиной 2 бита. Преобладание одиночных ошибок свидетельствует о том, что AAC-сжатие вносит скорее локальные искажения в кепстр, влияющие на решение детектора для отдельных блоков, а не протяженные помехи. Наличие остаточных ошибок предполагает необходимость в дальнейшем использовании кодов коррекции ошибок для гарантированного восстановления данных.

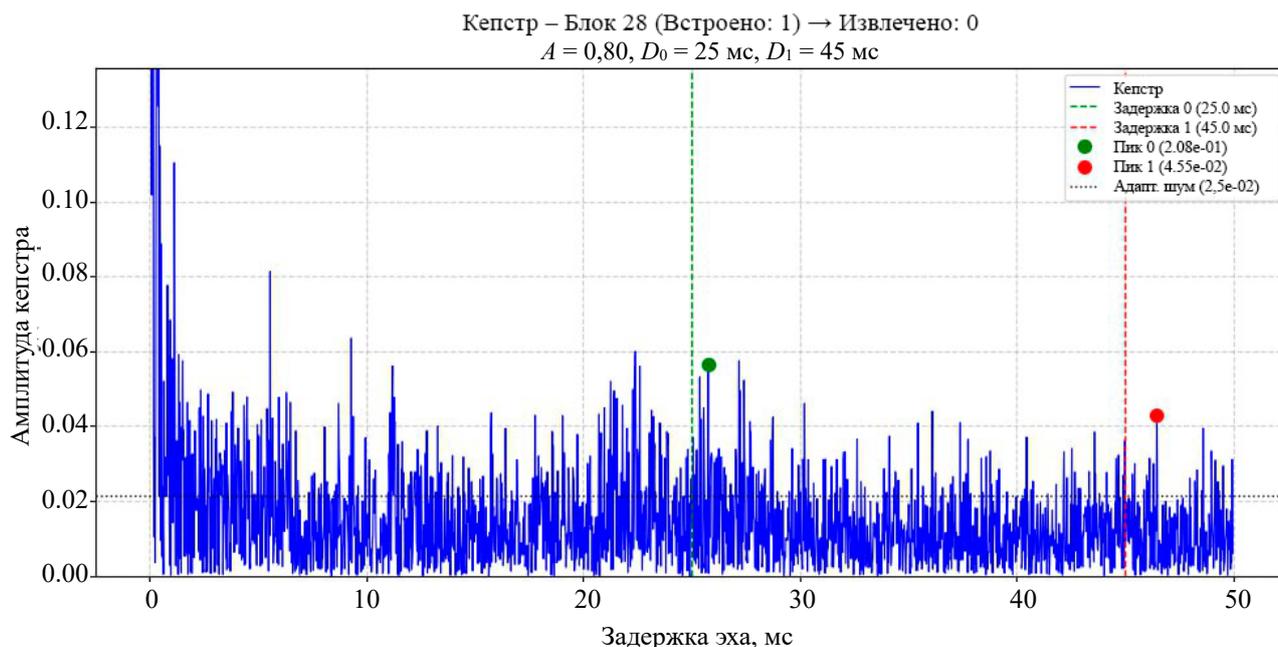


Рис. 3. Иллюстрация неверного декодирования бита

Полученные экспериментальные данные свидетельствуют о принципиальной работоспособности предложенного метода аудиостеганографии на основе эхо-кодирования. Тесты в идеальных условиях показали высокую точность восстановления данных, что подтверждает корректность реализации алгоритмов встраивания эха и его извлечения с помощью кепстрального анализа и адаптивного порога шума.

Ключевым результатом проведенного исследования является экспериментально подтвержденная высокая устойчивость предложенного метода эхо-кодирования к сжатию аудиокодеком AAC с битрейтом 256 кбит/с. Контрольные эксперименты по LSB-встраиванию, проведенные на аналогичных тестовых файлах и с тем же уровнем AAC-сжатия показали точность восстановления скрытых данных на уровне около 50%, что свидетельствует о существенной деградации скрытого. Высокая эффективность предложенного эхо-метода, превосходящая LSB в условиях сжатия, достигается благодаря использованию кепстрального анализа для обнаружения эха и применения адаптивного порога шума. Адаптивный порог, вычисляемый на основе статистик кепстра вне зон ожидаемых пиков, позволяет надежно отделять пики, соответствующие эху, от фонового шума кепстра, уровень которого повышается после сжатия.

Тем не менее наличие ошибок после AAC-сжатия указывает на существующие ограничения метода. Анализ графиков кепстра для ошибочных случаев показывает, что основной причиной ошибок является значительное ослабление или искажение пика эха в кепстре из-за процесса квантования и удаления информации кодеком AAC. В некоторых блоках пик эха может опускаться

ниже адаптивно вычисленного порога шума, что приводит к неверному декодированию бита (рис. 3).

Выбор параметров метода определяется необходимостью найти компромисс между устойчивостью и скрытностью. Представленные результаты высокой устойчивости были получены при встраивании данных в «тихие» блоки аудиосигнала. Хотя эхо-кодирование само по себе считается относительно незаметным [7], добавление эха в «громкие», «нетихие» участки сигнала может повышать вероятность его обнаружения как специализированными алгоритмами стегоанализа, так и, возможно, при внимательном прослушивании.

Встраивание только в «тихие» сегменты повысит скрытность, но, как было показано, требует решения проблемы синхронизации при извлечении после сжатия. Разработка надежных синхромаркеров или методов встраивания информации о позициях является важным направлением для дальнейшего улучшения практической применимости метода.

Заключение. В статье предложен и исследован метод аудиостеганографии на основе эхо-кодирования, предназначенный для использования в видеоконтейнерах и обладающий повышенной устойчивостью к AAC-сжатию. Метод использует две временные задержки для кодирования бит и кепстральный анализ с адаптивным порогом шума для их извлечения.

Экспериментально доказана работоспособность метода и его устойчивость к сжатию аудиокодеком AAC с битрейтом 256 кбит/с, при котором достигнута точность восстановления данных в «тихие» блоки аудиосигнала до 95–99% (в зависимости от аудиоконтента). Показана высокая

эффективность применения адаптивного порога шума для надежного детектирования пиков эха в кепстре после сжатия.

Полученные результаты свидетельствуют о перспективности использования данного метода для задач скрытой передачи данных или встраивания цифровых водяных знаков в аудиопотоки, подверженные сжатию с потерями. Для обеспечения достоверного восстановления информации

необходимо применение кодов коррекции ошибок. Дальнейшие исследования могут быть направлены на разработку методов синхронизации для повышения скрытности путем встраивания только в «тихие» сегменты, на дальнейшее улучшение робастности эхо-детектора, а также на количественную оценку скрытности предложенного метода и его сравнение с другими устойчивыми алгоритмами аудиостеганографии.

Список литературы

1. Урбанович П. П. Защита информации методами криптографии, стеганографии и обфускации. Минск: БГТУ, 2016. 116 с.
2. Шутько Н. П. Защита авторских прав на электронные текстовые документы методами стеганографии // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2013. № 6 (162). С. 131–134.
3. Fridrich J. *Steganography in Digital Media: Principles, Algorithms, and Applications*. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. 438 p.
4. Бранденбург К. Кодирование звука с высоким разрешением // Звукорежиссер. 2001. № 7. С. 99–105.
5. Westfeld A., Pfitzmann A. Attacks on Steganographic Systems // *Information Hiding: Third International Workshop, IH'99, Dresden, Germany, September 29 – October 1, 1999. Proceedings* / ed. A. Pfitzmann. Berlin; Heidelberg: Springer, 2000. P. 61–76 (Lecture Notes in Computer Science; vol. 1768).
6. Techniques for data hiding / W. Bender [et al.] // *IBM Systems Journal*. 1996. Vol. 35, no. 3&4. P. 313–336.
7. Алдошина И. А. Основы психоакустики. М.: [б. и.], 2000. 248 с.
8. Оппенгейм А. В., Шафер Р. В. Цифровая обработка сигналов; пер. с англ.; под ред. С. Я. Шаца. М.: Связь, 1979. 416 с.
9. National Institute of Standards and Technology. Advanced Encryption Standard (AES). Gaithersburg, MD: U.S. Department of Commerce, 2001. 47 p. (Federal Information Processing Standards Publication (FIPS PUB); 197). URL: <https://nvlpubs.nist.gov/nistpubs/FIPS/NIST.FIPS.197.pdf> (дата обращения: 23.04.2025).
10. Dworkin M. Recommendation for Block Cipher Modes of Operation: Galois/Counter Mode (GCM) and GMAC. Gaithersburg, MD: National Institute of Standards and Technology, 2007. 39 p. (NIST Special Publication; 800-38D). URL: <https://nvlpubs.nist.gov/nistpubs/Legacy/SP/nistspecialpublication800-38d.pdf> (дата обращения: 23.04.2025).
11. Морелос-Сарагоса Р. Искусство помехоустойчивого кодирования. Методы, алгоритмы, применение. М.: Техносфера, 2006. 320 с.

References

1. Urbanovich P. P. *Zashchita informatsii metodami kriptografii, steganografii i obfuskatsii* [Information security by methods of cryptography, steganography and obfuscation]. Minsk, BGTU Publ., 2016. 116 p. (In Russian).
2. Shutko N. P. Copyright protection of electronic text documents by steganography methods. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], issue 3, Physics and mathematics. Informatics, 2013, no. 6 (162), pp. 131–134. (In Russian).
3. Fridrich J. *Steganography in Digital Media: Principles, Algorithms, and Applications*. Cambridge, Cambridge University Press Publ., 2010. 438 p.
4. Brandenburg K. High-resolution audio coding. *Zvukorezhisser* [Sound Engineer], 2001, no. 7, pp. 99–105 (In Russian).
5. Westfeld A., Pfitzmann A. Attacks on Steganographic Systems. *Information Hiding: Third International Workshop, IH'99, Dresden, Germany, September 29 – October 1, 1999. Proceedings*. Ed. by A. Pfitzmann. Berlin; Heidelberg, Springer Publ., 2000, pp. 61–76 (Lecture Notes in Computer Science; vol. 1768).
6. Bender W., Gruhl D., Morimoto N., Lu A. Techniques for data hiding. *IBM Systems Journal*, 1996, vol. 35, no. 3&4, pp. 313–336.
7. Aldoshina I. A. *Osnovy psikhoakustiki* [Fundamentals of psychoacoustics]. Moscow, 2000. 248 p. (In Russian).
8. Oppenheim A. V., Schafer R. W. *Tsifrovaya obrabotka signalov* [Digital Signal Processing]. Ed. by S. Ya. Shats. Moscow, Svyaz' Publ., 1979. 416 p. (In Russian).
9. National Institute of Standards and Technology (NIST). FIPS PUB 197: Advanced Encryption Standard (AES). November 26, 2001. 47 p. Available at: <https://nvlpubs.nist.gov/nistpubs/FIPS/NIST.FIPS.197.pdf> (accessed 23.04.2025).

10. Dworkin M. Recommendation for Block Cipher Modes of Operation: Galois/Counter Mode (GCM) and GMAC. NIST Special Publication 800-38D. November, 2007. 39 p. Available at: <https://nvlpubs.nist.gov/nistpubs/Legacy/SP/nistspecialpublication800-38d.pdf> (accessed 23.04.2025).

11. Morelos-Zaragoza R. *Iskusstvo pomekhoustoychivogo kodirovaniya* [The art of error correcting coding. Methods, algorithms, application]. Moscow, Tekhnosfera Publ., 2006. 320 p. (In Russian).

Информация об авторах

Попеня Наталья Владимировна – аспирант кафедры информатики и веб-дизайна. Белорусский государственный технологический университет (ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: ropenya@belstu.by

Романенко Дмитрий Михайлович – кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой информатики и веб-дизайна. Белорусский государственный технологический университет (ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: rdm@belstu.by

Information about the authors

Popenya Natalya Vladimirovna – PhD student, the Department of Computer Science and Web-design. Belarusian State Technological University (13a Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: ropenya@belstu.by

Romanenko Dmitri Mikhailovich – PhD (Engineering), Associate Professor, Head of the Department of Computer Science and Web-design. Belarusian State Technological University (13a Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: rdm@belstu.by

Поступила 12.05.2025

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ	5
МАТЕМАТИКА	5
Якименко А. А. Модальная управляемость одной двумерной системы запаздывающего типа с четырьмя соизмеримыми запаздываниями	5
Можей Н. П. Нередуцируемые пространства, не допускающие эквивалентных связностей с ненулевой алгеброй голономии	11
Стрельченко О. А., Ткаченко В. В., Чепиков А. А. Модель оптимизации планирования производства продуктов разделения воздуха	16
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА	21
Карлович Т. Б., Карлович А. О. Использование численных методов для решения задачи о движении волчка тип-топ по гладкой горизонтальной поверхности	21
ФИЗИКА	27
Пискунович Д. Н., Крылов А. Б., Крук Н. Н. Температурная зависимость кислотно-основных свойств 5,10,15,20-тетраakis-(4-триметиламинофенил)-порфирина	27
Кленицкий Д. В., Гладков Л. Л., Сырбу С. А., Крук Н. Н. Природа уширения полос поглощения NO ₂ -замещенного порфирина	33
Андрианов В. М., Королевич М. В. Расчет и сравнительный анализ ИК спектров 24-эпикастастерона и 28-гомокастастерона (ss-конфигурация) с различной структурой их боковой цепи	44
ИНФОРМАТИКА И ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ	48
МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ И УПРАВЛЕНИЕ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ	48
Janek A., Urbanovich P. P. Digital certificate system in education based on the Ethereum Blockchain platform	48
Гринюк Д. А., Дубиковская Е. В., Олиферович Н. М., Сухорукова И. Г., Оробей И. О. Эффективность работы комбинированных систем регулирования. 1. Общий анализ	58
ОБРАБОТКА И ПЕРЕДАЧА ИНФОРМАЦИИ	76
Уласевич Н. И., Жилияк Н. А. Стеганографический метод на основе встраивания дополнительных элементов под закрашенные участки в изображениях в формате SVG	76
АЛГОРИТМИЗАЦИЯ И ПРОГРАММИРОВАНИЕ	83
Prihozhy A. A., Karasik O. N. Localization of data references in blocked heterogeneous shortest paths algorithm for clustered graphs	83
Кизино А. В., Новосельская О. А. Алгоритмы и программное средство генерации ключа для последующего кодирования информации в защитных векторных изображениях	91
Ворошень А. В., Романенко Д. М. Метод построения цветовых схем на основе кластеризации цветовых векторов и тонального анализа растровых изображений	99
Попеня Н. В., Романенко Д. М. Метод аудиостеганографии для AAC-сжатых аудиосигналов на основе эхо-кодирования и адаптивного кепстрального анализа	110

CONTENTS

PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES	5
MATHEMATICS	5
Yakimenka A. A. Modal controllability of one two-dimensional delayed system with four commensurate delays.....	5
Mozhey N. P. Non-reductive spaces that do not admit equiaffine connections with a nonzero holonomy algebra.....	11
Stralchonak O. A., Tkachenko V. V., Chepikov A. A. Optimization model for air separation product production planning.	16
TEORETICAL MECHANICS	21
Karlovich T. B., Karlovich A. O. Using numerical methods to solving the problem of motion of a tip-top on a smooth horizontal surface.....	21
PHYSICS	27
Piskunovich D. N., Krylov A. B., Kruk M. M. Temperature dependence of acid-base properties of 5,10,15,20-tetrakis-(4-trimethylaminophenyl)-porphyrine.....	27
Klenitsky D. V., Gladkov L. L., Syrbu S. A., Kruk M. M. Origin of broadening of the absorption bands of NO ₂ -substituted porphyrin.....	33
Andriaanov V. M., Korolevich M. V. Calculation and comparative analysis of the of 24-epicastasterone and 28-homocastasterone (ss-configuration) IR spectra with different structures of their side chain.....	40
COMPUTER SCIENCE AND ENGINEERING SCIENCES	48
MODELLING OF PROCESSES AND MANAGEMENT IN TECHNICAL SYSTEMS	48
Janek A., Urbanovich P. P. Digital certificate system in education based on the Ethereum Blockchain platform.....	48
Hryniuk D. A., Dubikovskaya E. V., Oliferovich N. M., Suchorucova I. G., Orobei I. O. Efficiency of feedforward and feedback control systems. I. General analysis	58
PROCESSING AND TRANSMISSION OF INFORMATION	76
Ulasevich M. I., Zhilak N. A. A steganographic method based on embedding additional elements under the colored areas in SVG format images.....	76
ALGORITHMIC AND PROGRAMMING	83
Prihozhy A. A., Karasik O. N. Localization of data references in blocked heterogeneous shortest paths algorithm for clustered graphs	83
Kizino A. V., Novoselskaya O. A. Algorithms and software for key generation for subsequent encoding of information in protective vector images	91
Voroshen V. A., Romanenko D. M. Method for constructing color schemes based on color vector clustering and raster images tonal analysis.....	99
Popenya N. V., Romanenko D. M. An audio steganography method for AAC-compressed audio signals based on echo hiding and adaptive cepstral analysis	110

Редактор *Р. М. Рябая*
Компьютерная верстка *П. В. Ковальцова, Д. А. Кускильдина, Е. А. Матейко*
Корректор *Р. М. Рябая*

Подписано в печать 15.09.2025. Формат 60×84¹/₈.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать ризографическая.
Усл. печ. л. 14.2. Уч.-изд. л. 15.5.
Тираж 39 экз. Заказ .

Издатель и полиграфическое исполнение:
УО «Белорусский государственный технологический университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/227 от 20.03.2014.
ЛП № 3820000001984.
Ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск.