

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

THEORETICAL MECHANICS

УДК 531.382

Т. Б. Карлович¹, А. О. Карлович²

¹ Белорусский государственный технологический университет

² ООО «Вирма»

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ВОЛЧКА ТИП-ТОП ПО ГЛАДКОЙ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Волчок тип-топ привлекает к себе внимание благодаря возможности выбора теоретической модели для его описания и проведения с ним простых экспериментов. Во время движения волчок может эффективно переворачиваться на 180° и поднимать свой центр тяжести выше центра сферы, описанной вокруг него. Такое неустойчивое поведение является следствием наличия трения скольжения между волчком и контактной поверхностью. Также в теоретической модели необходимо учитывать сопротивление воздуха при быстром вращении волчка.

В настоящей работе теоретическое описание движения волчка осуществляется на основе нелинейных динамических уравнений, записанных в подвижной системе отсчета. В силу сложности модели получение аналитического решения задачи возможно только в простейших случаях с применением первых интегралов. В литературе широко обсуждается интеграл Джелетта, означающий постоянство проекции кинетического момента на радиус-вектор, проведенный из центра масс в точку касания волчка плоскости. С использованием векторного анализа демонстрируется, что интеграл Джелетта перестает существовать при учете момента сопротивления воздуха.

Также в работе представлено численное решение задачи о движении волчка по абсолютно гладкой поверхности на основе методов Эйлера и Рунге – Кутты. Метод Эйлера является простым в применении, однако из-за малой точности дает расходящееся решение для рассчитываемых параметров. Метод Рунге – Кутта более точный, однако соответствующие расчетные схемы оказываются громоздкими и затратными по времени. Нами рассматриваются рамки применимости обоих методов для получения оптимальной точности с минимальными временными затратами для расчета траектории точки касания волчка горизонтальной поверхности.

Ключевые слова: механическая система, динамически симметричное тело, количество движения, кинетический момент, интеграл Джелетта.

Для цитирования: Карлович Т. Б., Карлович О. А. Использование численных методов для решения задачи о движении волчка тип-топ по гладкой горизонтальной поверхности // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2025. № 2 (296). С. 21–26.

DOI: 10.52065/2520-6141-2025-296-4.

T. B. Karlovich¹, A. O. Karlovich²

¹ Belarusian State Technological University

² LLC “Virma”

USING NUMERICAL METHODS TO SOLVING THE PROBLEM OF MOTION OF A TIP-TOP ON A SMOOTH HORIZONTAL SURFACE

The tip-top attracts attention due the possibility of choosing a theoretical model to describe it and conduct simple experiments with it. During movement, the top can effectively return around by 180° and lift its center of gravity above the center of the sphere described around it. Such non-resistant behavior is a consequence of the presence of sliding friction between the top and the contact surface. Also in theoretical model, it is necessary to take into account the air resistance with the rapid rotation of the top.

In this work, the theoretical description of the movement of the top is carried out on the basis of nonlinear dynamic equations recorded in the moving reference system. Due to complexity of the model, obtaining an analytical solution to the problem is possible only in the simplest cases using

the first integrals. In the literature, the Jellett integral is widely discussed, meaning the constancy of the projection of the kinetic mop on the radius vector drawn from the center of the masses to the point of touching the top of the plane. Using vector analysis, it is demonstrated that the Jellett integral ceases to exist taking into account the air resistance.

The work is also presents a numerical solution to the problem of the movement of the top by absolutely smooth surface based on the methods of Euler and Runge – Kutt. The Euler method is easy to use, however, due to low accuracy, gives diverging values for the parameters calculated. The Runge – Kutt method is more accurate, however, the corresponding calculation schemes turn out to be cumbersome and expendable in time. We examine the framework of the applicability of both methods for obtaining optimal accuracy with minimal time costs for calculating the trajectory of the touching point of the top with the horizontal surface.

Keywords: mechanical system, dynamically symmetrical body, momentum, kinetic moment, Jellett integral.

For citation: Karlovich T. B., Karlovich O. A. Using numerical methods to solving the problem of motion of a tip-top on a smooth horizontal surface. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2025, no. 2 (296), pp. 21–26 (In Russian).

DOI: 10.52065/2520-6141-2025-296-4.

Введение. Задача о движении волчка тип-топ по неподвижной горизонтальной поверхности является одной из классических задач динамики твердого тела. Она привлекает к себе внимание благодаря возможности проведения эксперимента без сложного оборудования и непосредственному наблюдению эффектного переворота волчка во время движения со шляпки на ножку, сопровождающегося поднятием центра тяжести. Решающее значение в объяснении переворота на 180° связано с наличием трения скольжения между волчком тип-топ и контактной поверхностью. Ввиду сложного математического описания динамического поведения такой механической системы в общем случае решение соответствующих уравнений возможно лишь в численном виде. Отдельные случаи аналитических и точных решений приведены в работах А. В. Карапетяна [1, 2] и А. П. Маркеева [3]. При этом волчок рассматривается в виде сферического объекта с центром тяжести, расположенным ниже центра тяжести сферы. В работах [4, 5] проводились эксперименты с волчками, сделанными вручную и распечатанными на 3D-принтере. Была исследована траектория точки касания волчка горизонтальной поверхности и обнаружено его движение по спирали после переворота на ножку. Качественное поведение волчка на основе приближенного решения описывается в работе [3], однако радиус закручивания спирали в эксперименте [5] оказывается значительно больше, чем в теоретическом предсказании. В работе [5] была предложена модель, включающая сопротивление воздуха [6], оказывающего влияние на движение легкого полого волчка, представляющего собой срезанную на $\frac{1}{4}$ часть диаметра сферическую оболочку.

Основная часть. Рассмотрим описание движения волчка на основе уравнений, включающих теоремы об изменении количества движения и кинетического момента, а также постоянства вектора восходящей вертикали γ и безотрывности движения волчка по горизонтальной поверхности. В качестве неподвижной системы отсчета возьмем систему $Oxyz$, связанную с горизонтальной поверхностью, в качестве подвижной системы отсчета выберем систему $G\xi\eta\sigma$, связанную с волчком и имеющую начало в его центре масс. Также будем использовать систему координат с началом в точке G и осями, расположенными параллельно осям неподвижной системы отсчета ($Gx_1y_1z_1$) (рис. 1).

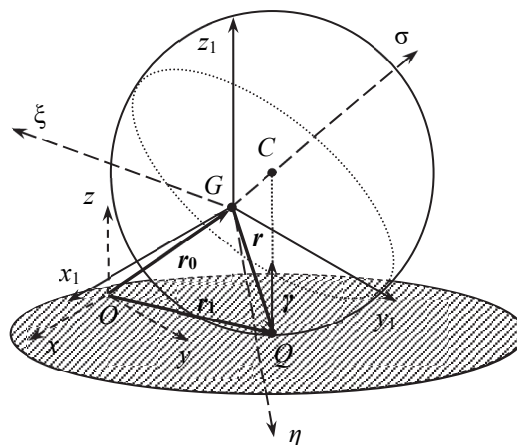


Рис. 1. Схематическое движение сферического волчка по горизонтальной плоскости Oxy

Математическая модель эволюции волчка на горизонтальной поверхности, рассмотренная в работе [3] и дополненная моментом сил сопротивления воздуха (сила сопротивления

воздуха не учитывается из-за малой скорости поступательного движения волчка по сравнению со скоростью вращательного движения), имеет вид

$$\begin{aligned} m\dot{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\omega} \times m\mathbf{v} &= -mg\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{R}, \\ I\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times I\boldsymbol{\omega} &= \mathbf{r} \times \mathbf{R} + \mathbf{M}, \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma} &= 0, \\ (\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\gamma} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где m – масса волчка; $\mathbf{v}$ – скорость центра масс; $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость; $\mathbf{r}$ – радиус-вектор, проведенный из центра масс к нижней точке сферы Q ; $\mathbf{R}$ – реакция, приложенная в точке Q , $\mathbf{R} = \mathbf{F} + \mathbf{N}$; $\mathbf{F}$ – сила трения (учитывается только сила трения скольжения (моменты силы трения, представляемые в виде пары сил вращения и качения, обычно малые и ими пренебрегают); $\mathbf{N}$ – нормальная составляющая реакции; $\mathbf{M}$ – момент сопротивления воздуха. I – тензор инерции волчка относительно главных центральных осей $G\xi$, $G\eta$, $G\sigma$, связанных с его осью симметрии и перпендикулярной ей плоскостью. Предполагается, что моменты инерции относительно осей $G\xi$ и $G\eta$ одинаковы между собой, равны A и отличаются от момента инерции относительно оси $G\sigma$ – C , так что тензор инерции I имеет вид

$$I = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \quad (2)$$

Выражение в скобках последнего уравнения системы (1) есть скорость точки касания волчка горизонтальной поверхности

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \quad (3)$$

Получение аналитических решений системы (1) связано с использованием законов сохранения и симметрии задачи, а также нахождением как можно большего числа интегралов движения. Одним из них является интеграл Джеллетта (Jellett), означающий постоянство линейной комбинации проекций кинетического момента $\mathbf{K} = I\boldsymbol{\omega}$ на вертикаль $\boldsymbol{\gamma}$ и на ось динамической симметрии $G\sigma$.

Покажем, что интеграл Джеллетта, определяемый равенствами

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{r} = \text{const} \text{ или } \dot{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{K} \cdot \dot{\mathbf{r}} = 0, \quad (4)$$

имеет место только в случае отсутствия сопротивления воздуха. Для доказательства равенства воспользуемся разложением вектора $\mathbf{r}$ и его производной на составляющие вектора:

$$\mathbf{r} = ae_{\sigma} - \rho\boldsymbol{\gamma}, \quad \dot{\mathbf{r}} = -\rho\dot{\boldsymbol{\gamma}}, \quad (5)$$

где a – расстояние между центром сферы и центром масс; ρ – радиус сферы. В силу постоянства вектора $\boldsymbol{\gamma}$ в неподвижной системе отсчета справедливо следующее соотношение между вектором $\boldsymbol{\gamma}$ и его производной в подвижной системе отсчета:

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}. \quad (6)$$

С учетом формул (5) и (6) и циклической перестановки в смешанном произведении векторов второе слагаемое в формуле (4) можно представить в виде

$$\mathbf{K} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \rho\boldsymbol{\gamma} \cdot (\mathbf{K} \times \boldsymbol{\omega}). \quad (7)$$

Для расчета первого слагаемого в формуле (4) сначала выразим из второго уравнения системы (1) производную кинетического момента

$$\dot{\mathbf{K}} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K} + \mathbf{r} \times \mathbf{R} + \mathbf{M}. \quad (8)$$

Далее преобразуем векторное произведение угловой скорости и кинетического момента в формуле (8). Для этого разложим оба вектора по базису векторов подвижной системы отсчета $\mathbf{e}_{\xi}$, $\mathbf{e}_{\eta}$, $\mathbf{e}_{\sigma}$ и запишем векторное произведение в виде определителя третьего порядка:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K} &= \boldsymbol{\omega} \times I\boldsymbol{\omega} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_{\xi} & \mathbf{e}_{\eta} & \mathbf{e}_{\sigma} \\ \omega_{\xi} & \omega_{\eta} & \omega_{\sigma} \\ A\omega_{\xi} & A\omega_{\eta} & C\omega_{\sigma} \end{vmatrix} = \\ &= \mathbf{e}_{\xi}(C-A)\omega_{\eta}\omega_{\sigma} - \mathbf{e}_{\eta}(C-A)\omega_{\xi}\omega_{\sigma}. \end{aligned} \quad (9)$$

Затем скалярно умножим левую и правую части формулы (8) на вектор $\mathbf{r}$ и учтем тот факт, что векторное произведение кинетического момента и угловой скорости является вектором, лежащим в плоскости, перпендикулярной оси $G\sigma$ в силу равенства экваториальных моментов инерции относительно осей $G\xi$ и $G\eta$. Тогда первое слагаемое равенства (4) записывается в виде

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{r} &= (-\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K} + \mathbf{r} \times \mathbf{F} + \mathbf{M}) \cdot \mathbf{r} = \\ &= -(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K} + \mathbf{M}) \cdot (ae_{\sigma} - \rho\boldsymbol{\gamma}) = \\ &= -\rho\boldsymbol{\gamma} \cdot (\mathbf{K} \times \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{M} \cdot (ae_{\sigma} - \rho\boldsymbol{\gamma}). \end{aligned} \quad (10)$$

Из формул (7) и (10) следует, что в случае равенства нулю момента сил сопротивления воздуха $\mathbf{M}$ суммарный результат формул (7) и (10) также равен нулю и интеграл Джеллетта имеет место. Таким образом, система уравнений (1) может быть решена только численными методами [7]. Для более простой системы при $\mathbf{M} = 0$ получение решения в аналитическом виде

возможно лишь для малой силы трения с учетом исследования параметров устойчивости задачи [1–3]. В случае нулевой силы трения имеют место интегралы Джемелта, энергии, проекции угловой скорости на ось динамической симметрии ω_σ , а также сохраняется вектор γ в неподвижной системе отсчета. В результате анализа системы на устойчивость методом множителей Лагранжа в работах [1–3] показано, что в стационарном случае в критических точках будут существовать два вида периодических решений: 1) вращение с постоянной угловой скоростью ω_σ вокруг вертикальной оси симметрии с центром тяжести, расположенным либо выше центра сферы, либо ниже центра сферы на расстоянии a ; 2) вращение шара с угловой скоростью, равной $\lambda \rho r$, который прецессирует с угловой скоростью λ вокруг вертикали, где λ – один из множителей Лагранжа.

В настоящей работе численно решалась задача для скольжения волчка по абсолютно гладкой поверхности в подвижной системе отсчета. Соответствующая система из трех векторных дифференциальных уравнений и одного скалярного уравнения

$$\begin{aligned} m\dot{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\omega} \times m\mathbf{v} &= (N - mg)\boldsymbol{\gamma}, \\ I\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times I\boldsymbol{\omega} &= N\mathbf{r} \times \boldsymbol{\gamma}, \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma} &= 0, \\ \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\gamma} &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

преобразовывались в систему из десяти скалярных уравнений. Локальная производная по времени в момент времени t_k от искомой функции записывалась в виде конечной разности значений функции на последующем и предыдущем шагах:

$$\dot{x}_k = \frac{x_{k+1} - x_k}{h}, \quad (12)$$

где h – шаг по времени: $t_{k+1} = t_k + h$. Такой метод интегрирования уравнений называется методом Эйлера и имеет первый порядок точности. Для решения системы нелинейных уравнений этого может оказаться недостаточным, поэтому параллельно использовался метод Рунге – Кутты четвертого порядка точности. Было проведено сравнение двух методов на примере расчета проекций вектора γ . Соответствующие зависимости представлены на рис. 2. При заданных параметрах проекция γ_σ остается постоянной и рассчитывается одинаково обоими методами. Проекция γ_ξ и γ_η до момента времени $t = 1$ с считаются с приемлемой точностью обоими методами, а в более поздние моменты времени метод Эйлера дает большое расхождение по результатам. Так, в момент времени $t = 4$ с значения расходятся уже в 8 раз.

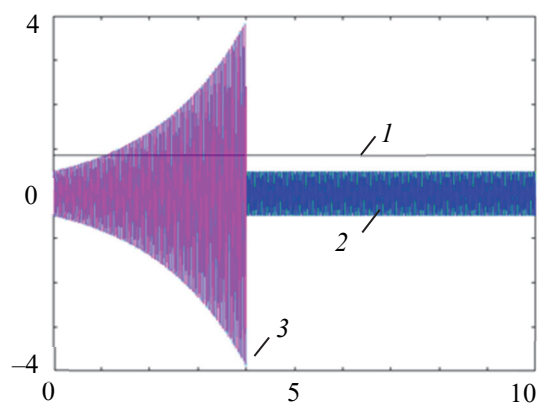


Рис. 2. Зависимость проекций вектора γ от времени для параметров: число точек по времени $L = 100\,000$, $\rho = 19$ мм, $a = 3$ мм, $\omega_{\xi 0} = \omega_{\eta 0} = 0$, $\omega_{\sigma 0} = 160$ рад/с, $\gamma_{\xi 0} = 0$, $\gamma_{\eta 0} = 0,5$, $\gamma_{\sigma 0} = 0,867$;

- 1 – проекция γ_σ , рассчитанная по методам Эйлера и Рунге – Кутта;
2 – проекции γ_ξ и γ_η , рассчитанные по методу Рунге – Кутта;
3 – проекции γ_ξ и γ_η , рассчитанные по методу Эйлера

Аналогичная картина наблюдается при расчете проекций скоростей, что продемонстрировано на рис. 3.

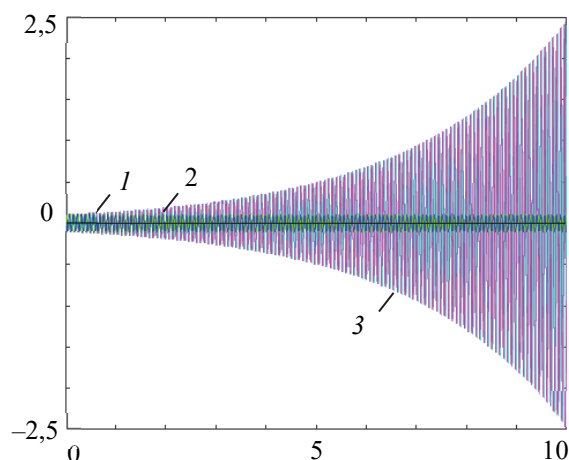


Рис. 3. Зависимость проекций вектора $\mathbf{v}$ от времени для параметров: число точек по времени $K = 100\,000$, $\rho = 19$ мм, $a = 3$ мм, $\omega_{\xi 0} = \omega_{\eta 0} = 0$, $\omega_{\sigma 0} = 80$ рад/с, $\gamma_{\xi 0} = 0$, $\gamma_{\eta 0} = 0,5$, $\gamma_{\sigma 0} = 0,867$, $v_{\xi 0} = 0,1$ м/с, $v_{\eta 0} = v_{\sigma 0} = 0$;

- 1 – проекция $v_{\sigma 0}$, рассчитанная по методам Эйлера и Рунге – Кутта;
2 – проекции $v_{\xi 0}$ и $v_{\eta 0}$, рассчитанные по методу Рунге – Кутта;
3 – проекции $v_{\xi 0}$ и $v_{\eta 0}$, рассчитанные по методу Эйлера

Компонента скорости v_σ совпадает в расчетах обоими методами и остается равной нулю для всех времен. Компоненты скорости v_ξ и v_η осциллируют вокруг нулевого значения и на 10-й секунде разница рассчитанных скоростей по методу Эйлера

и по методу Рунге – Кутты составляет 5 раз. Таким образом, метод Эйлера может использоваться в расчетах только для небольших времен до 1 с, его основным достоинством являются простота и высокая скорость расчета параметров.

Траектория точки касания волчком неподвижной поверхности в подвижной системе отсчета задается вектором $\mathbf{r}$, который определяется по формуле (5). Вычислив проекции вектора γ из системы уравнений (11), можно рассчитать компоненты вектора $\mathbf{r}$ в подвижной системе отсчета. Для того, чтобы определить траекторию точки касания в неподвижной системе отсчета, вначале необходимо воспользоваться матрицей направляющих косинусов:

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix}, \quad (13)$$

где элементы матрицы D задают направляющие косинусы углов поворота осей подвижной системы отсчета относительно осей системы отсчета $Gx_1y_1z_1$, которая движется поступательно относительно неподвижной системы отсчета (рис. 1).

Используя разложение радиус-вектора $\mathbf{r}$ в подвижной и неподвижной системах отсчета

$$\mathbf{r} = \xi \mathbf{e}_\xi + \eta \mathbf{e}_\eta + \sigma \mathbf{e}_\sigma = x_1 \mathbf{i}_1 + y_1 \mathbf{j}_1 + z_1 \mathbf{k}_1, \quad (14)$$

найдем связь между проекциями на оси координат в этих системах отсчета, причем значение координаты z не требуется, так как волчок скользит по горизонтальной поверхности:

$$\begin{aligned} x_1 &= d_{11}\xi + d_{12}\eta + d_{13}\sigma, \\ y_1 &= d_{21}\xi + d_{22}\eta + d_{23}\sigma, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\xi = -r\gamma_\xi, \quad \eta = -r\gamma_\eta, \quad \sigma = a - r\gamma_\sigma, \quad (16)$$

а элементы матрицы направляющих косинусов D в зависимости от времени определяются из уравнений Пуассона:

$$\dot{\mathbf{i}} = \mathbf{i} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\mathbf{j}} = \mathbf{j} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\mathbf{k}} = \mathbf{k} \times \boldsymbol{\omega}. \quad (17)$$

Далее для перехода в неподвижную систему отсчета учтем равенство (см. рис. 1)

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}, \quad (18)$$

где вектор $\mathbf{r}_0$ описывает движение центра масс в неподвижной системе отсчета. В случае абсолютно гладкой поверхности движение центра масс происходит под действием силы тяжести и силы реакции поверхности, направленных вертикально. Тогда проекция центра тяжести на горизонтальную поверхность будет двигаться равномерно со скоростью, равной проекции начальной скорости на плоскость Ox_1y_1 . Типичные траектории движения

на плоскости без трения представлены на рис. 4. В случае отсутствия начальной скорости при раскручивании волчка (кривые 1, 2, 3 на рис. 4) он движется по эллипсу, полуоси которого пропорциональны расстоянию a от центра тяжести до центра сферы, описанной вокруг волчка, а эксцентриситет обусловлен разными моментами инерции относительно осей $G\xi$, $G\eta$ (A) и $G\sigma$ (C). Несовпадение предыдущего витка движения со следующим витком (на рисунке заметны утолщения траектории) связаны с недостаточной точностью расчетов по методу Эйлера. «Дрожащие» траектории обусловлены величиной угловой скорости ω . В случае ненулевой начальной скорости движения центра масс волчка замкнутые траектории становятся спиралевидными (кривые 4, 5, 6 на рис. 4) с постоянным углом наклона к оси x . Размер витка спирали пропорционален расстоянию a , а шаг спирали пропорционален начальной скорости движения центра масс.

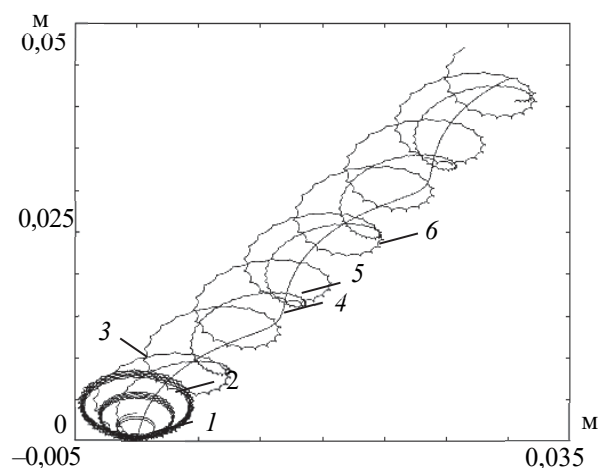


Рис. 4. Траектория точки касания волчка поверхности для параметров: число точек по времени $K = 100\,000$, $\rho = 19$ мм, $\omega_{\xi 0} = \omega_{\eta 0} = 0$, $\omega_{\sigma 0} = 80$ рад/с, $\gamma_{\xi 0} = 0$, $\gamma_{\eta 0} = 0,5$, $\gamma_{\sigma 0} = 0,867$. Для траекторий 1–3 $v_{\xi 0} = v_{\eta 0} = v_{\sigma 0} = 0$, для траекторий 4–6 $v_{\xi 0} = 0,002$ м/с, $v_{\eta 0} = 0,003$ м/с, $v_{\sigma 0} = 0$. Для кривых 1, 4 – $a = 3$ мм; 2, 5 – $a = 6$ мм; 3, 6 – $a = 9$ мм

Закключение. В работе рассмотрена модель волчка тип-топ на основе уравнений нелинейной динамики, включая силу трения скольжения и момент сопротивления воздуха. Показано в векторном виде, что интеграл Джелетта в данной модели имеет место только в случае отсутствия момента сил сопротивления воздуха. Численно решена задача для скольжения волчка по абсолютно гладкой поверхности в подвижной системе отсчета. Показано, что выбор метода численного интегрирования системы уравнений (11) (Эйлера или Рунге – Кутты) существенно сказывается на точности решения. Получены различные траектории точки касания волчка горизонтальной плоскости при его движении в зависимости от его характеристик и начальных условий движения.

Список литературы

1. Карапетян А. В. Глобальный качественный анализ динамики китайского волчка (тип-топ) // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2008. Т. 43, № 3. С. 33–41.
2. Карапетян А. В., Муницына М. А. Динамика волчка тип-топ при вязком трении // Труды МФТИ. 2021. Т. 13, № 1. С. 114–121.
3. Маркеев А. П. К динамике волчка // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1984. № 3. С. 30–38.
4. Карлович Т. Б., Ласовский Р. Н. Исследование кинетических характеристик волчка tip-top с горизонтальной поверхностью при его движении // Информационные технологии: материалы докл. 88-й науч.-техн. конф. проф.-преподават. состава, науч. сотрудников и аспирантов (с междунар. участием), Минск, 29 янв. – 16 февр. 2024 г. Минск: БГТУ, 2024. С. 243–246. URL: <https://elib.belstu.by/bitstream/123456789/67770/1/3.%20Карлович.pdf> (дата обращения: 05.09.2025).
5. Карлович Т. Б., Васеха А. П., Ласовский Р. Н. Экспериментальное исследование траектории точки касания волчка тип-топ с горизонтальной поверхностью при его движении // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2024. № 2 (284). С. 19–24.
6. Раус Э. Дж. Динамика системы твердых тел / под ред. Ю. А. Архангельского и В. Г. Демина. М.: Наука, 1983. Т. 2. 544 с.
7. Килин А. А. Динамика шара Чаплыгина в абсолютном пространстве // Неголономные динамические системы: Интегрируемость, хаос, странные аттракторы: сб. ст. М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исследований, 2002. С. 76–98.

References

1. Karapetyan A. V. Global quality analysis of Chinese spinning top (tippe top) dynamics. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela* [Proceedings of the Russian Academy of Sciences Solid State Dynamics], 2008, vol. 43, no. 3, pp. 33–41 (In Russian).
2. Karapetyan A. V., Munitsyna M. A. Dynamics of a tip-top with viscous friction. *Trudy MFTI* [Proceedings of MFTI], 2021, vol. 13, no. 1, pp. 114–121 (In Russian).
3. Markeev A. P. To the dynamics of a top. *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela* [Izvestiya Academy of Sciences of the USSR. Mechanics TV bodies], 1984, no. 3, pp. 30–38 (In Russian).
4. Karlovich T. B., Lasovsky R. N. Study of kinetic characteristics of tip-top with horizontal surface during its movement. *Informatsionnyye tekhnologii: materialy dokladov 88-y nauchno-tekhnicheskoy konferentsii professorsko-prepodavatel'skogo sostava, nauchnykh sotrudnikov i aspirantov (s mezhdunarodnym uchastyem), Minsk, 29 yanvarya – 16 fevralya 2024 g.* [Information technologies: materials] of reports of the 88th scientific and technical conference of faculty, researchers and postgraduate students (with international participation), Minsk, January 29 – February 16, 2024. Minsk, BG TU, 2024, pp. 243–246. Available at: <https://elib.belstu.by/bitstream/123456789/67770/1/3.%20Карлович.pdf> (accessed 05.09.2025) (In Russian).
5. Karlovich T. B., Vasekha A. P., Lasovsky R. N. Experimental study of the trajectory of the point of contact of a tip-top with a horizontal surface during its movement. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], issue 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2024, no. 2 (284), pp. 19–24 (In Russian).
6. Routh E. J. Dynamics of a system of rigid bodies. V. 2. Ed. Yu. A. Arkhangelsky and V. G. Demin. Moscow, Nauka Publ., 1983. 544 p. (In Russian).
7. Kilin A. A. Dynamics of Chaplygin sphere in absolute space *Negolonomnyye dinamicheskiye sistemy: Integriruyemost', khaos, strannyye attraktory* [Nonholonomic dynamical systems: chaos, integrability, chaos, strange attactors]. Moscow; Izhevsk, In-t komp'yuter. issledovaniy, 2002, pp. 76–98 (In Russian).

Информация об авторах

Карлович Татьяна Борисовна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры механики и конструирования. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: tbkar@mail.ru

Карлович Алексей Олегович – инженер-программист ООО «Вирма» (ул. Казинца, 4, 220099, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: aleksei.karlovich@gmail.com

Information about the authors

Karlovich Tatyana Borisovna – PhD (Physics and Mathematics), Assistant Professor, the Department of Mechanics and Design. Belarusian State Technological University (13a Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: tbkar@mail.ru

Karlovich Aleksei Olegovich – software engineer. LLC “Virma” (4 Kazintsa str., 220099, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: aleksei.karlovich@gmail.com

Поступила 14.05.2025