

УДК 519.854.3, 519.854.64, 519.86, 658.5.012.2

О. А. Стрельченко¹, В. В. Ткаченко¹, А. А. Чепиков²

¹Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси

²Белорусский государственный университет

МОДЕЛЬ ОПТИМИЗАЦИИ ПЛАНИРОВАНИЯ ПРОИЗВОДСТВА ПРОДУКТОВ РАЗДЕЛЕНИЯ ВОЗДУХА

В статье рассматривается задача оптимального планирования реального производства продуктов разделения воздуха: жидкого кислорода, азота, аргона и газообразного азота. Перечисленные продукты производятся на двух воздуходелительных установках, имеющих разные режимы работы, производительность и показатели переходных процессов включения и выключения. Для решения задачи предлагается математическая модель поиска выпуска оптимального количества каждого вида продукции в плановом периоде с целью минимизации производственных затрат и с учетом различных производственных и временных ограничений (полное удовлетворение спроса, производительность машин, ограничения на хранение запасов продукции, непрерывность производства, ограничения времени включения и выключения машин). Для улучшения сходимости и поиска оптимального решения предлагается использование вспомогательных переменных в уравнении баланса производства и спроса. Учет времени включения и выключения производственных установок смоделирован в виде ограничений, управляющих логикой различных состояний машин, а также параметром времени переходных состояний.

Ключевые слова: математическая модель, непрерывное производство, оптимизационное планирование, целочисленное линейное программирование.

Для цитирования: Стрельченко О. А., Ткаченко В. В., Чепиков А. А. Модель оптимизации планирования производства продуктов разделения воздуха // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2025. № 2 (296). С. 16–20.

DOI: 10.52065/2520-6141-2025-296-3.

O. A. Stralchonak¹, V. V. Tkachenko¹, A. A. Chepikov²

¹United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus

²Belarusian State University

OPTIMIZATION MODEL FOR AIR SEPARATION PRODUCT PRODUCTION PLANNING

The article considers the problem of optimal planning for real production of air separation products: liquid oxygen, nitrogen, argon and gaseous nitrogen. The listed products are manufactured at two air separation plants with different operating modes, productivity and indicators of transient processes of switching on and off. To solve the problem, a mathematical model is proposed for finding the output of the optimal amount of each type of product in the planning period in order to minimize production costs and taking into account various production and time constraints (full satisfaction of demand, machine productivity, restrictions on storing product stocks, continuity of production, restrictions on the time of switching on and switching off of the machines). To improve convergence and search for the optimal solution, it is proposed to use auxiliary variables in the balance equation of production and demand. Switching on/off time of production units is modeled in the form of constraints controlling the logic of various states of machines, as well as the time parameter of transient states.

Keywords: mathematical model, continuous production, optimized planning, integer linear programming.

For citation: Stralchonak O. A., Tkachenko V. V., Chepikov A. A. Optimization model for air separation product production planning. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2025, no. 2 (296), pp. 16–20 (In Russian).

DOI: 10.52065/2520-6141-2025-296-3.

Введение. В современной химической промышленности, в частности производстве продуктов разделения воздуха (кислорода, азота, аргона как в жидком, так и в газообразном состоянии), отличительной чертой является

его сложность, при которой экономические и технологические факторы взаимосвязаны. Так, например, выпуск продукции должен одновременно учитывать спрос потребителей и производственные возможности (такие,

как режимы производительности, переходные процессы включения-выключения установок, непрерывность производства определенных продуктов), а также ограничения на хранение и стоимость всей цепочки производства и поставки продукции. В таких условиях качество принятия решений при управлении предприятием во многом определяется качеством комплексного планирования выполняемых предприятием операций. В настоящее время существует несколько подходов к формулированию модели оптимального планирования непрерывного производства. Непрерывно-дискретный характер процессов модели можно рассматривать в виде ограничения на минимальное $x'_{\min,j}$ и максимальное $x'_{\max,j}$ количество производимой продукции в периоде t :

$$x'_{\min,j} \delta'_j \leq x'_j \leq x'_{\max,j} \delta'_j,$$

где δ'_j – бинарные дискретные переменные 0 или 1, определяемые включением режима производительности установки [1]. Оптимизация работы воздуходелительной установки в различные фазы производства продукции (сжижение, газообразование) в зависимости от стоимости электроэнергии допускает перепроизводство жидкого кислорода и азота для их повторного использования в процессе испарения и превращения в газообразный продукт [2]. Либо, наоборот, в случае технологической возможности ВРУ (воздуходелительной установки), возможно перепроизводство продукта в газообразном состоянии для его дальнейшего сжижения, чтобы удовлетворить спрос на жидкие продукты.

В случае производства продуктов разделения воздуха, когда происходит производство всех продуктов одновременно [3], рассматривается модель производства не одного продукта раздельно, а решается проблема оптимального планирования многопродуктового производства при удовлетворении детерминированного спроса. Такая необходимость доказывается тем фактом, что результаты оптимизации производства только для одного продукта – кислорода нарушают условия необходимого производства азотных продуктов. При этом, как и в большинстве подобных задач [3–5], связанных с планированием непрерывного производства на установках ВРУ, используется итерационное смешанное целочисленное линейное программирование (MILP – mixed integer linear programming). Для максимального соответствия физической модели процесса производства в модели планирования [3] учитываются такие переменные, как рабочее состояние ВРУ, состояние модулей ожижения

и испарителя, а также количество производимой продукции каждого вида.

Переход к нелинейным моделям и моделированию в многопериодном планировании, когда начальный период делится на несколько частей, сглаживают недостаток стационарной модели производственного процесса, а также учитывают реальные переходные процессы переключения производственных установок [4].

Для представления различных рабочих состояний ВРУ в публикации [5] предложена модель, учитывающая множество возможных переходов состояний функционирования производственной системы. В сочетании с жесткой дискретной моделью MILP данная архитектура применена для решения проблемы планирования непрерывного производства на нескольких ВРУ.

В предлагаемой статье представлена модель оптимизации непрерывного производства продуктов разделения воздуха с учетом известных ограничений (производительности, хранения запасов, состояний машин) с целью минимизации стоимости производства (включая цель минимального количества включений, выключений машин, переключений режимов производительности).

Основная часть. Рассматриваемое производство является специализированным предприятием по выпуску продуктов разделения воздуха: жидких продуктов – кислорода, азота, аргона, а также азота в газообразном состоянии. Важной особенностью данного проекта является требование непрерывного производства газообразного азота, транспортируемого по трубе потребителям. Вышеперечисленные продукты могут производиться на любой из двух имеющихся производственных установках (ВРУ1 и ВРУ2) либо на обеих одновременно в зависимости от спроса и режимов производительности машин. Качественная постановка задачи заключается в определении оптимального по стоимости плана непрерывного производства всех четырех производимых видов продукции с использованием имеющихся ресурсов для полного удовлетворения спроса и с учетом производственных и временных ограничений. Математическая модель формулируется в виде задачи определения размера партии производимой продукции в каждый временной период планирования (минимум – 1 ч) с целью минимизации полной стоимости производства и с учетом имеющихся производственных ограничений (полное удовлетворение спроса, производительность машин, ограничения на хранение запасов продукции, непрерывность производства, ограничения времени включения и выключения машин).

Дано (входные данные):

- $t \in \{1, \dots, T\}$ – последовательность периодов планирования (месяц, сутки, час);
- J – множество видов производимой продукции. $j = 1, 2, 3, 4$.
- Производство на двух производственных установках ($m = 1, 2$). M – множество машин;
- R – множество режимов работы производственных установок-машин, $R = 1, \dots, 24$;
- MR_{mr} – матрица назначения возможных режимов работы r машинам m ;
- P_{rj} – матрица производительности; A_{rj} – матрица обратной производительности;
- $S_m^{\text{off, start, run, switch, shut}}$ – набор возможных состояний машины m . $S_m \in \{\text{off (выключена), start (включение-разогрев), run (номинальный режим), switch (переключение в другой рабочий режим), shut (выключение-остывание)}\}$ (рис. 1);
- TS_{ms} – минимальное время непрерывной работы машины m в состоянии s для продукта j ;
- AS_{ms} – набор состояний, в которые разрешено переходить машине m из состояния s
Например, для $m = 1$ и $s = \text{run}$, $AS_{ms} = \{\text{switch, shut}\}$;
- D_{ij} – спрос на продукцию j в период t ;
- E_{jt} – собственное потребление продукции j ;
- L_{ij} – производственные потери продукции j в период t ;
- IM_{jt} – количество импортируемой продукции j в период t ;
- $I_{\min j}, I_{\max j}$ – минимальное и максимальное количество запасов продукции на складе (емкость для хранения);

- I_{0jt} – запасы продукции j , хранимой на складе на начало периода t ;
- $h_{jt}, sm_{jt}, sp_{mj}, sc_m$ – соответственно стоимость хранения запасов продукции, стоимость импорта продукции (в случае необходимости, например, невозможность производства либо стоимость импорта меньше, чем стоимость производства), себестоимость производства одной единицы продукции j на машине m , стоимость включения-разогрева машины m ;
- Q_{mj}, B_{mj} – нижняя и верхняя граница производительности продукта j на машине m ;
- C_{mt} – максимально возможное время работы машины m в периоде t .

Основные переменные:

- X_{imj} – количество продукции j , производимой на машине m в период t ;
- R_{im} – текущий режим работы машины m в периоде t ;
- $Y_{ims} = 1$, если машина m работает в состоянии s в период t (иначе $Y_{ims} = 0$);
- $Z_{ims} = 1$, если машина m изменяет свое состояние в период t ;
- I_{ij} – запас продукции j на конец периода t ;
- S_{mt}^a – фактическое состояние машины m в момент времени t .

Вспомогательные переменные:

- αl_{ij} – переменная в левой части уравнения баланса для улучшения сходимости;
- αr_{ij} – переменная в правой части уравнения баланса для улучшения сходимости.

Модель состоит из исходных известных данных, целевой функции и ограничений (рис. 2).

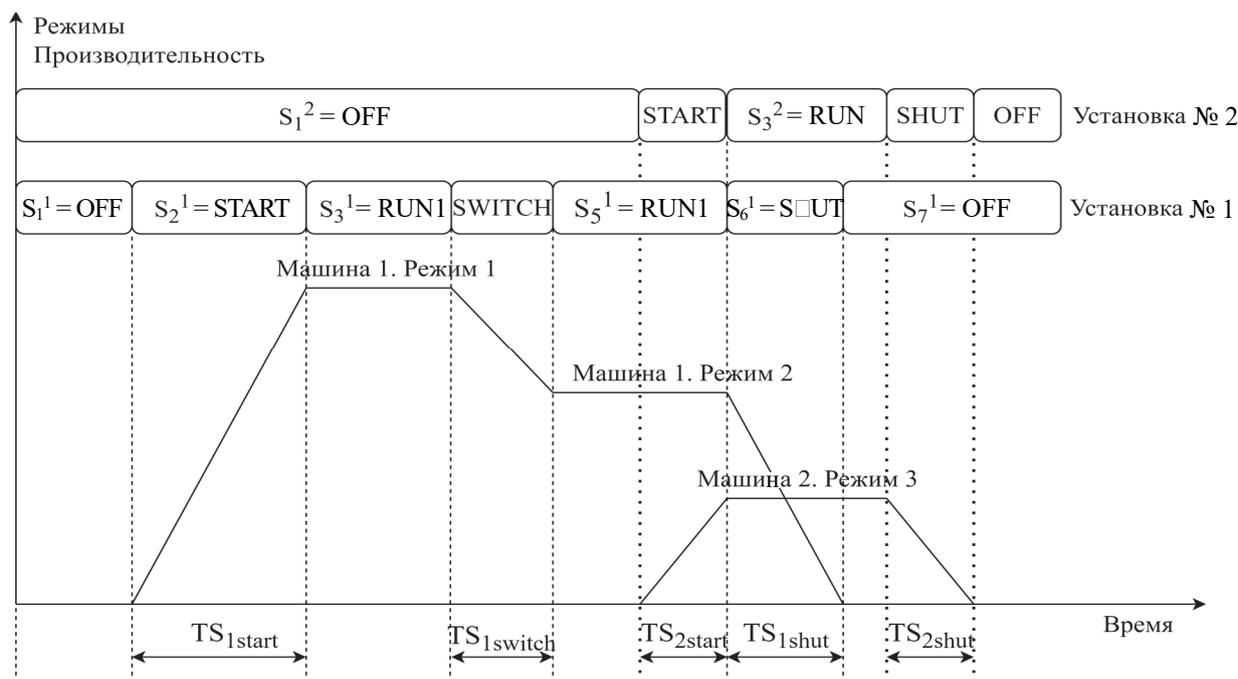


Рис. 1. Переходные процессы производственных установок



Рис. 2. Модель оптимизационного планирования производства продуктов разделения воздуха

Целевая функция заключается в минимизации стоимости производства, включая стоимость хранения продукции, стоимость импорта, себестоимость производства и стоимость запуска производственного оборудования:

$$\begin{aligned} & \text{Min} \sum_t^T [\sum_j^J (h_{jt} I_{jt} + sm_{jt} IM_{jt} + \\ & + \sum_m^M (sp_{mj} X_{tmj} Y_{tms} + sc_m Y_{tms})), \forall s \in S^{\text{run}}, s' \in S^{\text{start}}, \\ & j \in J, m \in M, t \in T. \end{aligned} \quad (1)$$

Ограничения:

Уравнение баланса – в каждый период времени производится такое количество продукции каждого вида, которого было бы достаточно для полного и своевременного удовлетворения потребностей сбыта с учетом начальных запасов, потерь и требований по импорту:

$$\begin{aligned} & I_{j,t-1} + \sum_m^M X_{tmj} + IM_{jt} + \alpha I_{jt} = \\ & = D_{jt} + I_{jt} + E_{jt} + L_{jt} + \alpha r_{jt}, \forall j \in J, t \in T. \end{aligned} \quad (2)$$

Предприятие имеет емкости для хранения запасов произведенной продукции, которые ограничены минимальным и максимальным возможным объемом хранения:

$$I_{\min_j} \leq I_{jt} \leq I_{\max_j}. \quad (3)$$

Количество производимой продукции зависит от режимов и производительности установок:

$$X_{tmj} = \sum_j^J \sum_{r \in MR_{mr}} R_{tm} P_{rj}. \quad (4)$$

Производственные ограничения лежат в диапазоне минимальной и максимальной производительности установок:

$$Q_{jt} M_{tm} \leq X_{tmj} \leq B_{jt} M_{tm}, \forall j \in J, m \in M, t \in T. \quad (5)$$

В каждый период времени машина находится только в одном из возможных состояний:

$$\sum_{s \in S_m} Y_{tms} = 1. \quad (6)$$

Ограничение непрерывного производства состоит в том, что в любой период времени t хотя бы одна машина работает либо в режиме run, либо в режиме switch (для машины 1). При этом время работы в номинальном режиме run определяется обратной производительностью и количеством произведенного продукта, а время работы в режиме switch определяется минимальным временем переключения TS_j^{switch} машины 1.

$$\sum_j^J \sum_m^M (A_{rj} X_{mjt} Y_{tms} + TS_{mjs} Y_{tms}) = C_{mt}, C_{mt} = 1, \quad (7)$$

$$\forall s \in S^{\text{run}}, s' \in S^{\text{switch}}.$$

Гарантируется переключение только в разрешенные состояния для машины m при переходе из периода $(t-1)$ в период t :

$$Y_{t-1ms} + Y_{tms} Z_{tms} = 2, \forall s \in S_m^a, s' \in AS_{ms}. \quad (8)$$

Требуется, чтобы в переходном состоянии ($S = \text{start}, \text{switch}, \text{shut}$) установка работала не менее TS_{mjs} интервалов времени:

$$TS_{mjs} \leq \sum_t^T Y_{tms} (Z-1),$$

$$\forall s \in S_m^a, s' \in \text{start, switch, shut}. \quad (9)$$

Наконец, вводим ограничения значений переменных

$$X_{tmj}, I_{jt}, \alpha I_{jt}, \alpha r_{jt} \geq 0; Y_{tms}, Z_{tms} \in \{0, 1\}, \quad (10)$$

$$j \in J, m \in M, t \in T.$$

Заключение. Предлагаемая модель сформулирована в виде задачи целочисленного линейного программирования, в которой поиск оптимального решения количества производимой продукции выполняется с целью уменьшения всех производственных затрат с учетом реальных ограничений предприятия. Рассматриваемая задача оптимального планирования производства продуктов разделения воздуха решена средствами решателя (solver) CP-SAT в составе Google OR-Tools. Сходимость и при-

емлемое время нахождения оптимального решения (не более 300 с) достигнуто благодаря использованию вспомогательных переменных в уравнении баланса. Для учета переходных процессов производственных установок применены ограничения, использующие состояния машин, а также параметры и логика их включения и выключения. Предлагаемая модель может быть использована для других схожих задач оптимизации планирования непрерывного производства.

Список литературы

1. Цодиков Ю. М. Оптимальное календарное планирование для непрерывного производства с ограничением на структуру графика // Автоматика и телемеханика. 2008. № 1. С. 171–179.
2. A flexible air separation process: 2. Optimal operation using economic model predictive control / A. Caspari [et al.] // *AIChE J.* 2019;65:e16721. <https://doi.org/10.1002/aic.16721>.
3. Optimization of co-production air separation unit based on MILP under multi-product deterministic demand / Kong Fulin [et al.] // *Applied Energy.* 2022. Vol. 325. <https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2022.119850>.
4. Kuvykin V. I. Optimal Planning and Analysis of Continuous Production Mode // *Automation in Industry. Automation and remote control.* 2018. Vol. 79, no. 2. P. 384–390.
5. Grossmann / Zhao Shengnan [et al.]. // *Industrial & Engineering Chemistry Research.* 2019. No. 58 (8). P. 3104–3117. <https://doi.org/10.1021/acs.iecr.8b04964>.

References

1. Yu. M. Tsodikov. Optimal scheduling for continuous production with constraint on schedule structure. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and telemechanics], 2008, no. 1, pp. 171–179 (In Russian).
2. Caspari A., Offermanns C., Schäfer P., Mhamdi A., Mitsos A. A flexible air separation process: 2. Optimal operation using economic model predictive control. *AIChE J.* 2019;65:e16721. <https://doi.org/10.1002/aic.16721>.
3. Fulin Kong, Yuxin Liu, Lige Tong, Wei Guo, Yinan Qiu, Li Wang. Optimization of co-production air separation unit based on MILP under multi-product deterministic demand. *Applied Energy*, 2022, vol. 325. <https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2022.119850>.
4. Kuvykin V. I. Optimal Planning and Analysis of continuous production mode. *Automation in Industry. Automation and remote control*, 2018, vol. 79, no. 2, pp. 384–390.
5. Shengnan Zhao, M. Paz Ochoa, Lixin Tang, Irene Lotero, Ajit Gopalakrishnan, and Ignacio E. Grossmann. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 2019, no. 58 (8), pp. 3104–3117. <https://doi.org/10.1021/acs.iecr.8b04964>.

Информация об авторах

Стрельченко Олег Александрович – аспирант. Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси (ул. Сурганова, 6, 220012, Минск, Республика Беларусь). E-mail: oleg@stralchonak.com

Ткаченко Вадим Викторович – кандидат технических наук, заведующий лабораторией. Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси (ул. Сурганова, 6, 220012, Минск, Республика Беларусь). E-mail: tkach@newman.bas-net.by

Чепиков Арсений Алексеевич – студент. Белорусский государственный университет (пр-т Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: a.chepikov@gmail.com

Information about the authors

Stralchonak Oleg Aleksandrovich – PhD student, United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus (6 Surganova str., 220012, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: oleg@stralchonak.com.

Tkachenko Vadim Viktorovich – PhD (Engineering), Head of laboratory. United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus (6 Surganova str., 220012, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: tkach@newman.bas-net.by

Chepikov Arseniy Alekseevich – student. Belarusian State University (4 Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: a.chepikov@gmail.com

Поступила 16.05.2025