УДК 514.76

Н. П. Можей
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

НЕРЕДУКТИВНЫЕ ПРОСТРАНСТВА, НЕ ДОПУСКАЮЩИЕ ЭКВИАФФИННЫХ СВЯЗНОСТЕЙ С НЕНУЛЕВОЙ АЛГЕБРОЙ ГОЛОНОМИИ

Известно, что одной из важных проблем геометрии является задача об установлении связи между кривизной и структурой многообразия. В случае, если на многообразии транзитивно действует группа, такое многообразие является однородным пространством. Если однородное пространство является редуктивным, то оно всегда допускает инвариантную связность; если же существует хотя бы одна инвариантная связность, то пространство является изотропно-точным. Во введении публикации указан объект исследования – нередуктивные пространства со связностью и ненулевой алгеброй голономии. Цель работы – изучение пространств указанного вида, не допускающих эквиаффинных связностей. В статье приведены основные понятия: изотропно-точная пара, инвариантная аффинная связность, тензор кручения, тензор кривизны, редуктивное пространство, алгебра голономии, эквиаффинная связность. Если тензор кривизны является ненулевым, то и алгебра голономии ненулевая. В основной части работы для трехмерных нередуктивных однородных пространств, допускающих инвариантные связности с ненулевой алгеброй голономии, определено, при каких условиях данное пространство не допускает эквиаффинных связностей, соответствующие пространства найдены и выписаны в явном виде.

Ключевые слова: группа преобразований, алгебра Ли, тензор кривизны, редуктивное пространство, эквиаффинная связность, алгебра голономии.

Для цитирования: Можей Н. П. Нередуктивные пространства, не допускающие эквиаффинных связностей с ненулевой алгеброй голономии // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2025. № 2 (296). С. 11–15.
DOI: 10.52065/2520-6141-2025-296-2.

N. P. Mozhey
Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics

NON-REDUCTIVE SPACES THAT DO NOT ADMIT EQUIAFFINE CONNECTIONS WITH A NONZERO HOLONOMY ALGEBRA

One of the important problems of geometry is the problem of establishing connections between the curvature and the structure of a manifold. If a group acts transitively on a manifold, such manifold is the homogeneous space. If a homogeneous space is reductive, then it always admits an invariant connection; if there exists at least one invariant connection, then the space is isotropically-faithful. In the introduction, the object of research is indicated – non-reductive spaces with connection and non-zero holonomy algebra. The purpose of the work is to study spaces of this type that do not allow equiaffine connections. In the work the basic notions are defined: isotropically-faithful pair, invariant affine connection, torsion tensor, curvature tensor, reductive space, holonomy algebra, equiaffine connection. If the curvature tensor is nonzero, then the holonomy algebra is nonzero. In the main part of the paper for three-dimensional non-reductive homogeneous spaces that admit invariant connections with a non-zero holonomy algebra, it is determined under what conditions given space does not admit equiaffine connections, the corresponding spaces are found and written out explicitly.

Keywords: transformation group, Lie algebra, curvature tensor, reductive space, equiaffine connection, holonomy algebra.

For citation: Mozhey N. P. Non-reductive spaces that do not admit equiaffine connections with a nonzero holonomy algebra. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2025, no. 2 (296), pp. 11–15 (In Russian).
DOI: 10.52065/2520-6141-2025-296-2.

Введение. После работ Э. Картана (например, [1]) фундаментом и основной составляющей дифференциальной геометрии является понятие многообразия, а также теория групп и алгебр Ли. Важный подкласс среди всех многообразий формируют изотропно-точные однородные пространства. В частности, этот подкласс содержит все однородные пространства, допускающие инвариантную аффинную связность. «Необходимость сравнивать те или иные геометрические величины в разных точках “кривого” пространства делает понятие связности одним из важнейших в геометрии и физике» [2]. Также связности – важнейший объект, к которому приводит геометрическая формулировка теории поля. С описанием трехмерных нередуктивных пространств, допускающих связности только ненулевой кривизны, можно ознакомиться в статье [3], также в ней приведены более подробный тематический обзор и обоснование применяемых методов; при изложении сохранены обозначения, введенные ранее. Если тензор кривизны является ненулевым, то и алгебра голономии ненулевая. В данной работе определяется, при каких условиях найденные в [3] пространства не допускают инвариантных эквиаффинных связностей.

Основная часть. Пусть $(\bar{G},M)$ – трехмерное однородное пространство, где $\bar{G}$ – группа Ли на многообразии *M.* Зафиксируем произвольную точку $o\in M$ и обозначим через $G=\bar{G}_o$ стабилизатор точки *o.* Известно, что проблема классификации однородных пространств $(\bar{G}, M)$ эквивалентна классификации пар групп Ли $(\bar{G}, G)$, таких, что $G\subset \bar{G}$ (см., например, [4]). Поставим в соответствие $(\bar{G}, M)$ пару $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ алгебр Ли, где $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы $\bar{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра $\bar{\mathfrak{g}}$, соответствующая подгруппе *G*. *Изотропный* $\mathfrak{g}$*-модуль* $\mathfrak{m}$ – это $\mathfrak{g}$-модуль $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$, такой, что $x.(y+\mathfrak{g})=[x,y]+\mathfrak{g}$. Соответствующее представление $\lambda:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ является *изотропным представлением* пары $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$. Пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ называется *изотропно-точной*, если ее изотропное представление – инъекция.

Между инвариантными аффинными связностями на $(\bar{G},M)$ и линейными отображениями $\Lambda:\bar{\mathfrak{g}}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, такими, что $\Lambda|_{\mathfrak{g}}=\lambda$ и отображение Λ является $\mathfrak{g}$-инвариантным, существует взаимно-однозначное соответствие (см. [5]). Будем называть такие отображения *инвариантными аффинными связностями* на паре $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$. Если возможна хотя бы одна связность на паре $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$, то такая пара является изотропно-точной (см. [6]). *Тензоры кручения* $T\in InvT_2^{\ 1}(\mathfrak{m})$ и *кривизны* $R\in InvT_3^{\ 1}(\mathfrak{m})$ для всех $x,y\in\bar{\mathfrak{g}}$ имеют соответственно вид

$$T(x_{\mathfrak{m}},y_{\mathfrak{m}})=\Lambda(x)y_{\mathfrak{m}}-\Lambda(y)x_{\mathfrak{m}}-[x,y]_{\mathfrak{m}};$$
$$R(x_{\mathfrak{m}},y_{\mathfrak{m}})=[\Lambda(x),\Lambda(y)]-\Lambda([x,y]).$$

Связность с нулевым тензором кривизны еще называется плоской. Будем говорить, что Λ имеет нулевое кручение или является связностью без кручения, если $T=0$. Определим *тензор Риччи* $Ric\in InvT_2(\mathfrak{m})$: $Ric(y,z)=\mathrm{tr}\{x\mapsto R(x,y)z\}$. Будем говорить, что аффинная связность Λ является *локально эквиаффинной*, если $\mathrm{tr}\Lambda([x,y])=0$ для всех $x,y\in\bar{\mathfrak{g}}$, то есть $\Lambda([\bar{\mathfrak{g}},\bar{\mathfrak{g}}])\subset\mathfrak{sl}(\mathfrak{m})$. Аффиая связность с нулевым кручением имеет симметрический тензор Риччи тогда и только тогда, когда она локально эквиаффинна [7].

Под *эквиаффинной связностью* будем понимать аффинную связность Λ (без кручения), для которой $\mathrm{tr}\Lambda(x)=0$ для всех $x\in\bar{\mathfrak{g}}$. В этом случае очевидно, что $\Lambda(\bar{\mathfrak{g}})\subset\mathfrak{sl}(\mathfrak{m})$.

Того, что пара является изотропно-точной, недостаточно для существования инвариантных связностей (см., например, статью [8]). Однородное пространство $\bar{G}/G$ *редуктивно*, если алгебра Ли $\bar{\mathfrak{g}}$ может быть разложена в прямую сумму векторных пространств – алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathrm{ad}(G)$-инвариантного подпространства $\mathfrak{m}$, т. е. если $\bar{\mathfrak{g}}=\mathfrak{g}+\mathfrak{m}$, $\mathfrak{g}\cap\mathfrak{m}=0$; $\mathrm{ad}(G)\mathfrak{m}\subset\mathfrak{m}$, в противном случае пространство не является редуктивным. Второе условие влечет $[\mathfrak{g},\mathfrak{m}]\subset\mathfrak{m}$, и наоборот, если G связна). Этот класс однородных пространств ввел в рассмотрение П. К. Рашевский, у редуктивных пространств при параллельном переносе сохраняются тензор кривизны и тензор кручения. Если $\bar{G}/G$ редуктивно, то оно всегда допускает инвариантную связность [3].

Алгебра Ли $\mathfrak{h}^*$ группы голономии инвариантной связности $\Lambda:\bar{\mathfrak{g}}\to\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$ на паре $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ – это подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$ вида V + + $[\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}),V]$ + $[\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}),[\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}),V]]$ + …, где V – подпространство, порожденное множеством

$$\{[\Lambda(x),\Lambda(y)]-\Lambda([x,y])\,|\,x,y\in\bar{\mathfrak{g}}\}.$$

Поскольку множество V порождается операторами кривизны, если тензор кривизны ненулевой, то и алгебра голономии ненулевая.

Все нередуктивные пространства $\bar{G}/G$, допускающие инвариантные аффинные связности, кривизна (и, соответственно, алгебра голономии) которых не может быть нулевой, приведены в [3]. Найдем, при каких условиях такие пространства не допускают эквиаффинных связностей.

Будем определять пару $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ таблицей умножения алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}$. Через $\{e_1,...,e_n\}$ будем обозначать базис $\bar{\mathfrak{g}}$ ($n=\dim\bar{\mathfrak{g}}$). Полагаем, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ порождается e_1, …, e_{n-3}. Пусть $\{u_1=e_{n-2},\ u_2=e_{n-1},\ u_3=e_n\}$ – базис $\mathfrak{m}$. Будем описывать аффинную (эквиаффинную) связность через $\Lambda(u_1),\Lambda(u_2),\Lambda(u_3)$ (поскольку $\Lambda|_{\mathfrak{g}}=\lambda$), а тензор кручения – через $T(u_1,u_2)$, $T(u_1,u_3)$, $T(u_2,u_3)$. Для ссылки на пару будем использовать обозначение *d.n.m*, где *d* – размерность подалгебры, *n* – номер подалгебры в $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$, а *m* – номер пары $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$, соответствующие приведенному в работе [3].

Теорема. *Если нередуктивная пара* $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$, $codim_{\bar{\mathfrak{g}}}\mathfrak{g}=3$ *допускает инвариантные аффинные связности только ненулевой кривизны (и, соответственно, с ненулевой алгеброй голономии), но не допускает эквиаффинных связностей, то* $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ *эквивалентна одной и только одной из пар 4.21.24, 4.21.25 (δ = 0,1 соответственно), 3.20.22, 3.20.27:*

4.21.24, 4.21.25

	$\underline{e_1}$	$\underline{e_2}$	$\underline{e_3}$	$\underline{e_4}$	$\underline{u_1}$	$\underline{u_2}$	$\underline{u_3}$
e_1	0	0	e_3	e_4	u_1	u_2	0
e_2	0	0	e_4	0	0	u_1	e_2
e_3	$-e_3$	$-e_4$	0	0	0	0	u_2
e_4	$-e_4$	0	0	0	0	0	e_4+u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	0	αe_4
u_2	$-u_2$	$-u_1$	0	0	0	0	$\alpha e_3+\delta e_4-u_2$
u_3	0	$-e_2$	$-u_2$	$-e_4-u_1$	$-\alpha e_4$	$-\alpha e_3-\delta e_4+u_2$	0

, $\alpha<-1/4$,

3.20.22

	$\underline{e_1}$	$\underline{e_2}$	$\underline{e_3}$	$\underline{u_1}$	$\underline{u_2}$	$\underline{u_3}$
e_1	0	e_2	$(1/2)e_3$	u_1	0	$(1/2)u_3$
e_2	$-e_2$	0	0	0	u_1	0
e_3	$-(1/2)e_3$	0	0	0	e_3	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	$2u_1$	0
u_2	0	$-u_1$	$-e_3$	$-2u_1$	0	e_3-u_3
u_3	$-(1/2)u_3$	0	$-u_1$	0	$-e_3+u_3$	0

,

3.20.27

	$\underline{e_1}$	$\underline{e_2}$	$\underline{e_3}$	$\underline{u_1}$	$\underline{u_2}$	$\underline{u_3}$
e_1	0	$(4/5)e_2$	$(3/5)e_3$	u_1	$(1/5)u_2$	$(2/5)u_3$
e_2	$-(4/5)e_2$	0	0	0	u_1	0
e_3	$-(3/5)e_3$	0	0	0	e_2	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	0
u_2	$-(1/5)u_2$	$-u_1$	$-e_2$	0	0	e_3
u_3	$-(2/5)u_3$	0	$-u_1$	0	$-e_3$	0

.

Действительно, в работе [3] получена классификация трехмерных нередуктивных однородных пространств, допускающих инвариантные связности только ненулевой кривизны. Используя данную классификацию, найдем, существуют ли эквиаффинные связности на пространствах указанного вида.

В случаях 4.21.24 и 4.21.25 аффинная связность имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} r_{1,1} & -q_{1,3} & 0 \\ 0 & r_{1,1}+1 & 0 \\ 0 & 0 & r_{1,1}+p_{1,3}+1 \end{pmatrix},$$

здесь и далее $p_{ij}, q_{ij}, r_{ij} \in \mathbb{R}$ $(i, j = \overline{1,3})$), а тензор кручения – вид (0,0,0), ($p_{1,3}-r_{1,1}$, 0,0), ($2q_{1,3}$, $p_{1,3}-r_{1,1}$, 0). Соответственно, $T = 0$ при $r_{1,1} = p_{1,3}$, $q_{1,3} = 0$. В этих случаях связность является локально эквиаффинной, поскольку $\mathrm{tr}\Lambda([y,z]) = 0$ для всех $y, z \in \bar{\mathfrak{g}}$, и она принимает вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} p_{1,3} & 0 & 0 \\ 0 & p_{1,3}+1 & 0 \\ 0 & 0 & 2p_{1,3}+1 \end{pmatrix}.$$

Связность не является эквиаффинной при любых значениях параметров, так как $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$ эквивалентна следующей подалгебре:

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y & u \\ 0 & x & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x, y, z, u \in \mathbb{R} \right\}.$$

Для выбора базиса подалгебры придаем одной из латинских переменных значение 1, а остальным 0, нумерация базисных векторов соответствует алфавиту. Получаем, что даже $\mathfrak{g}$ не принадлежит $\mathfrak{sl}(\mathfrak{m})$.

Аналогично, в случае 3.20.27 аффинная связность имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

тензор кручения нулевой; связность является локально эквиаффинной, поскольку $\mathrm{tr}\Lambda([y,z]) = 0$ для всех $y, z \in \bar{\mathfrak{g}}$, но не является эквиаффинной, так как $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$ эквивалентна подалгебре

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & x/5 & 0 \\ 0 & 0 & 2x/5 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\},$$

соответственно, $\mathfrak{g}$ не принадлежит $\mathfrak{sl}(\mathfrak{m})$.

В случае 3.20.22 аффинная связность имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & q_{1,1}+p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & q_{1,1}+1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & r_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{1,2} & 0 \end{pmatrix},$$

тензор кручения – $(p_{1,2} - q_{1,1} - 2, 0, 0)$, $(0, 0, 0)$, $(0, 0, q_{1,1} + 2 - p_{1,2})$, $T = 0$ при $q_{1,1} = p_{1,2} - 2$, тогда связность является локально эквиаффинной и принимает вид

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{1,2}-2 & 0 & 0 \\ 0 & 2p_{1,2}-2 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2}-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & r_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{1,2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Связность не является эквиаффинной, так как $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ эквивалентна подалгебре

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x/2 \end{pmatrix} \middle| \, x, y, z \in \mathbb{R} \right\},$$

а $\mathfrak{g}$ не принадлежит $\mathfrak{sl}(\mathfrak{m})$.

Прямыми вычислениями получаем, что других трехмерных нередуктивных однородных пространств (допускающих инвариантные связности только ненулевой кривизны), не допускающих эквиаффинных связностей, нет.

Заключение. В работе для трехмерных нередуктивных однородных пространств, допускающих инвариантные связности только с ненулевой алгеброй голономии, определено, при каких условиях данное пространство не допускает эквиаффинных связностей, соответствующие пространства найдены и выписаны в явном виде.

Список литературы

1. Cartan E. La geometrie des espaces de Riemann // Memorial des Sciences Math. 1923. Vol. 9. 457 p.

2. Алексеевский Д. В., Виноградов А. М., Лычагин В. В. Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии // Итоги науки и техники. Современые проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ АН СССР. 1988. Т. 28. С. 5–297.

3. Можей Н. П. Связности ненулевой кривизны на трехмерных нередуктивных пространствах // Известия Саратовского университета. Новая серия. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, № 4. С. 381–393.

4. Онищик А. Л. Топология транзитивных групп преобразований. М.: Физ.-мат. лит., 1995. 382 с.

5. Nomizu K. Invariant affine connections on homogeneous spaces // Amer. J. Math. 1954. Vol. 76, no. 1. С. 33–65.

6. Kobayashi S., Nomizu K. Foundations of differential geometry. New York: John Wiley and Sons. 1963. Vol. 1. 329 p.; 1969. Vol. 2. 470 p.

7. Nomizu K., Sasaki T. Affine differential geometry. Cambridge Univ. Press, 1994. 263 p.

8. Можей Н. П. Трехмерные однородные пространства, не допускающие инвариантных связностей // Известия Саратовского университета. Новая серия. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, № 4. С. 413–421.

References

1. Cartan E. La geometrie des espaces de Riemann. *Memorial des Sciences Math.*, 1923, vol. 9. 457 p.

2. Alekseyevskiy D. V., Vinogradov A. M., Lychagin V. V. Basic ideas and concepts of differential geometry. *Itogi nauki i tekhniki. Sovremenyye problemy matematiki. Fundamental'nyye napravleniya* [Results of science and technology]. Moscow, VINITI AN SSSR Publ., 1988, vol. 28, pp. 5–297 (In Russian).

3. Mozhey N. P. Connections of Nonzero Curvature on Three-dimensional Non-reductive Spaces. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Ser.: Matematika. Mekhanika. Informatika.* [Izvestiya Saratov University. New series. Series: Mathematics. Mechanics. Computer science], 2017, vol. 17, no. 4, pp. 381–393 (In Russian).

4. Onishchik A. L. *Topologiya tranzitivnykh grupp preobrazovaniy* [Topology of transitive transformation groups]. Moscow, Fiz.-mat. lit. Publ., 1995. 382 p. (In Russian).

5. Nomizu K. Invariant affine connections on homogeneous spaces. *Amer. J. Math.*, 1954, vol. 76, no. 1, pp. 33–65.

6. Kobayashi S., Nomizu K. Foundations of differential geometry. New York, John Wiley and Sons Publ., 1963, vol. 1. 329 p.; 1969, vol. 2. 470 p.

7. Nomizu K., Sasaki T. Affine differential geometry. Cambridge, Cambridge Univ. Press Publ., 1994. 263 p.

8. Mozhey N. Three-dimensional Homogeneous Spaces, Not Admitting Invariant Connections. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Ser.: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Izvestiya Saratov University. New series. Series: Mathematics. Mechanics. Computer science], 2016, vol. 16, no. 4, pp. 413–421 (In Russian).

Информация об авторе

Можей Наталья Павловна − кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры программного обеспечения информационных технологий. Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (ул. П. Бровки, 6, 220013, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: mozheynatalya@mail.ru

Information about the author

Mozhey Natalya Pavlovna − PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Software for Information Technologies. Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (6 P. Brovki str., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: mozheynatalya@mail.ru

Поступила после доработки 13.11.2024