з & з

Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Высшая математика

Учебно-методическое пособие для студентов заочного факультета

В 4-х частях

Часть 4

Минск 200

УДК 51(075.8)
ББК22.11я7
В 93

Рассмотрено и рекомендовано к **изданию** рсдакционно-издательским советом университета

Составители:
Ж. Н. Горбатович, А. С. Семенкова, Е. А. Шинкевич

Рецензенты:
доцент кафедры высшей математики БГЭУ,
кандидат физико-математических наук С. *Я. Гороховик;*
доцент кафедры информационных систем и технологий БГТУ,
кандидат технических наук *Н. И. Пустовалова*

Высшая математика : учеб.-метод. пособие для студентов
В 93 заочного факультета. В 4 ч. Ч. 4 / сост. Ж. Н. Горбатович [и др.]. - Минск : БГТУ, 2008. - 56 с.

ISBN 978-985-434-817-9

Первая, вторая и третья части учебно-методического пособия вышли в свет в 2005, 2006 и 2007 годах. В четвертой части приведены основные теоретические сведения, примеры решения задач, задачи для самостоятельного решения по темам «Ряды. Ряды Фурье», «Операционное исчисление», «Элементы теории поля».

Предназначено для студентов заочного факультета.

УДК 51(075.8)
ББК 22.11н7

\tZ S"!S1«1 17-9(4- 4)
1»ьг\ у»5-«4-485-1

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебно-методическое пособие предназначено для оказания помощи студентам заочной формы обучения при самостоятельном изучении следующих тем курса «Ряды. Ряды Фурье», «Операционное исчисление», «Элементы теории поля».

В главе «Ряды. Ряды Фурье» с помощью основных признаков исследуются числовые ряды на сходимость, находятся интервалы и области сходимости степенных рядов, решаются задачи на применение рядов в приближенных вычислениях, приводятся свойства периодических функций, рассматриваются разложения в ряд Фурье четных и нечетных функций, функций с произвольным периодом и непериодических функций.

В главе «Операционное исчисление» приводятся определения оригинала и изображения, преобразования Лапласа, перечисляются его свойства, таблица изображений некоторых основных функций, рассматриваются примеры отыскания изображения по оригиналу и оригинала по изображению, методами операционного исчисления решаются дифференциальные уравнения и системы дифференциальных уравнений.

В главе «Элементы теории поля» вводятся определения скалярного и векторного полей, дивергенции и ротора, даются примеры решения задач на определение соленоидальности, потенциальности векторного поля, задача нахождения потенциала поля.

Указанный материал расположен в главах, разбитых на параграфы и пункты. В каждом параграфе приводятся соответствующие теоретические сведения. Затем следуют примеры решения типовых задач. Далее предлагаются задачи для самостоятельного решения, представленные, как правило, в двух уровнях сложности. В конце каждого параграфа приводятся ответы на все вычислительные задачи. При изложении материала применяются традиционные обозначения и терминология. Пособие содержит справочный материал, схемы и графики. Приведен список рекомендуемой литературы. Материал пособия соответствует программе курса «Высшая математика» для студентов заочного факультета.

Данное пособие может быть использовано преподавателями при проведении практических занятий по перечисленным выше темам, студентами при подготовке к зачетам и экзаменам, выполнении контрольных работ.

Глава 12. РЯДЫ. РЯДЫ ФУРЬЕ

12.1. Числовые ряды

12.1.1. Понятие числового ряда. Свойстия рядов

Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ - числовая последовап-шносп.. **Выфажениевида**

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (12.1)$$

называется **числовым рядом,** числа $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ **- членами ряда,** a_n - n-ы или **общим членом** ряда. Ряд (12.1) считается заданным, если известен общий член ряда, выраженный как функция его номера и: $a_n = f(n)$. Сумма конечного числа n первых членов ряда (12.1) $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ называется n-й **частичной суммой.** Таким образом, $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2, \dots$, $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

Если для последовательности частичных сумм ряда (12.1) существует конечный предел $\lim S_n = S$, то ряд (12.1) называется **сходящимся,** а число S - **суммой** данного ряда ($S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$).

Если $\lim_{n\to\infty} S_n$ не существует или равен бесконечности, то ряд (12.1) называется **расходящимся.** Такой ряд суммы не имеет.

Свойства рядов

1. Если к ряду (12.1) прибавить или отбросить конечное число его членов, то полученный ряд и ряд (12.1) сходятся или расходятся одновременно.

2. Если ряд (12.1) сходится и его сумма равна S, а λ - некоторое число, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda a_1 + \lambda a_2 + \dots + \lambda a_n + \dots$ сходится и его сумма равна λS.

3. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся и их суммы соответственно равны S_1 и S_2, то сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ и его сумма равна $S_1 + S_2$, т. е. $\sum (a_n + b_n) = S_1 + S_2$.

Необходимый признак сходимости ряда

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то общий член ряда a_n стремится к нулю при $n \to \infty$, т. е. $\lim a_n = 0$.

Достаточный признак расходимости ряда

Если $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ или не существует, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

12.1.2. Признаки сходимости рядов с положительными членами

Первый признак сравнения

Если для членов рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ справедливо неравенство $0 < a_n < b_n$ для всех $n > n_0 \in N$, то

1) из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

2) из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сле'йуёт расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Второй признак сравнения

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ - ряды с положительными членами, причем существует конечный и отличный от нуля предел $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A \neq 0$. Тогда ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

Ряды, используемые при применении признаков сравнения

1. Гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ - расходящийся ряд.
2. Ряд, составленный из членов геометрической прогрессии, $a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots,\ (a \neq 0)$

при $|q| < 1$ сходится и его сумма равна .V

при $|q| > 1$ расходится.

3. Обобщенный гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots, \quad p > 0$$

при $p > 1$ сходится, при $0 < p \le 1$ расходится.

Признак Даламбера

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – ряд с положительными членами, и существует конечный предел $\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$.

Тогда если $l < 1$, то данный ряд сходится; если же $l > 1$, то - расходится.

Если $l = 1$, то ряд может сходиться или расходиться. Ряд требуется исследовать с помощью других признаков сходимости.

Интегральный признак Коши

Если неотрицательная непрерывная функция $f(x)$ монотонно убывает на промежутке $[l; +\infty)$, $l \ge 1$ и члены ряда $\sum a_n$ имеют вид $a_n = f(n)$, $n = 1, 2, \ldots$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и несобственный интеграл $\int_l^{+\infty} f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Вспомогательные сведения

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$; $1! = 1$, $0! = 1$;

$(n+1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \cdot (n+1) = n! \cdot (n+1)$

12.1.3. Примеры решения задач

Пример 1А. Записать общий член ряда, 3 первых члена ряда и $(n+1)$-й член ряда.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(2n)!}; \quad \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots$$

Решение. 1) формула общего члена ряда: $a_n = \frac{2^n}{n^2}$. Подставляя в формулу общего члена ряда вместо n значения 1, 2, 3, $n+1$, получим

$a_1 = \frac{2^1}{1^2} = 2$, $a_2 = \frac{2^2}{2^2} = 1$, $a_3 = \frac{2^3}{3^2} = \frac{8}{9}$, $a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}$;

2) формула общего члена ряда: $a_n = \frac{3^n}{(2n)!}$. Подставляя в формулу общего члена ряда вместо n значения 1, 2, 3, $n+1$, получим $a_1 = \frac{3}{(2 \cdot 1)!} = \frac{3}{2}$, $a_2 = \frac{3^2}{(2 \cdot 2)!} = \frac{9}{4!}$, $a_3 = \frac{3^3}{(2 \cdot 3)!} = \frac{27}{6!}$,

$a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{(2(n+1))!} = \frac{3^{n+1}}{(2n+2)!}$;

3) так как при $n = 1$ имеем $a_1 = \frac{1}{1 \cdot 2}$, при $n = 2$ имеем $a_2 = \frac{1}{2 \cdot 3}$ и т. д., то формула общего члена ряда имеет вид $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$. Тогда

$a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Пример 2А. Исследовать ряд на сходимость.

1) $\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^n} + \ldots$; 2) $1 + 2 + 3 + \ldots + n + \ldots$; 3) $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots$.

Решение. 1) члены ряда образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию с первым членом $a_1 = \frac{1}{3}$ и знаменателем $q = \frac{1}{3}$. В этом случае сумма ряда находится по формуле $S = \frac{a_1}{1-q}$ (см. вспомогательные сведения на с. 6). Значит, данный ряд имеет сумму $S = \frac{1}{2}$ и, следовательно, сходится;

2) члены ряда образуют арифметическую прогрессию с первым членом $a_1 = 1$ и разностью $d = 1$. Сумма первых n членов такой прогрессии $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$. Тогда для данного ряда $S_n = \frac{1+n}{2} n$. При $n \to \infty$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$. Следовательно, ряд **расходится.**

3) частичные суммы ряда $S_1 = 1$, $S_2 = 1 - 1 = 0$, $S_3 = 1 - 1 + 1 = 1$, $S_4 = 0$ и т. д. Последовательность сумм S_1, S_2, S_3, S_4, ... которая имеет вид 1, 0, 1, 0,... при $n \to \infty$ не имеет предела. Следовательно, ряд расходится.

Пример 3. Используя признак Даламбера, исследовать ряд на сходимость.

1А) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{5^n}$; 2А) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$; 3Б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

Решение. 1А) общий член ряда $a_n = \frac{n^3}{5^n}$, $(n+1)$-й член ряда $a_{n+1} = \frac{(n+1)^3}{5^{n+1}}$. Найдем $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3 \cdot 5^n}{5^{n+1} \cdot n^3} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \cdot \frac{5^n}{5^{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5} < 1$ – по признаку Даламбера ряд сходится;

2А) общий член ряда $a_n = \frac{3^n}{n!}$, $(n+1)$-й член ряда $a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!}$. Найдем $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot 3^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n \cdot 3 \cdot n!}{n!(n+1) \cdot 3^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} = 0 < 1$, по признаку Даламбера ряд сходится;

3Б) $a_n = \frac{n^n}{n!}$, $a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$,

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot n^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n (n+1) \cdot n!}{n!(n+1) \cdot n^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ (использовали второй замечательный предел). Так как $e \approx 2{,}718 > 1$, то по признаку Даламбера ряд расходится.

Пример 4А. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$, используя интегральный признак Коши.

Решение. Общий член ряда $a_n = \frac{1}{n \ln n}$. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ на промежутке $[2; +\infty)$. Эта функция непрерывна и монотонно убывает на промежутке $[2; +\infty)$ и $f(n) = \frac{1}{n \ln n} = a_n$. Тогда

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{b\to+\infty} \int_2^b \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \lim_{b\to+\infty} (\ln|\ln x|)\Big|_2^b = \lim_{b\to+\infty} (\ln|\ln b| - \ln|\ln 2|) = +\infty.$$

Несобственный интеграл расходится. Следовательно, по интегральному признаку Коши, расходится и заданный ряд.

Пример 5Б. Используя признаки сравнения, исследовать на сходимость ряд.

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + 5}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n-2}{n^2+1}$; 3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} n \operatorname{tg} \frac{3}{n^2}$.

Решение. 1) Сравним данный ряд с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ представляет сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q = \frac{1}{3} < 1$. Известно, что этот ряд сходится. Так как $\frac{1}{3^n + 5} < \frac{1}{3^n}$ для всех $n \in N$, то по первому признаку сравнения исходный ряд также сходится;

2) Сравним данный ряд с гармоническим рядом $\sum \frac{1}{n}$. Общий член этого ряда $b_n = \frac{1}{n}$, и этот ряд расходится. Применим второй признак сравнения: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n-2)n}{(n^2+1)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2 - 2n}{n^2+1} = 1 \neq 0$. Следовательно, исходный ряд расходится, так как расходится $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$;

3) Сравним данный ряд с рядом £-у- Общий **член** этого ряда -

Ь =—*z*-, и этот ряд сходится. Применим второй признак сравнения:

tgJL _ щ/

Ъп

H m ^ = H m ⎣0J |Л «-и~3л^2 3 Зи^2 Зи^2

> &->+co ı / и

и"

при *п* -» +оо). Следовательно, исходный ряд сходится, так как сходит-

со 1

еяряд £—.

12.1.4. Задачи для самостоятельного решения

А

I ИСПОЛЬЗУЯ признак Даламбера, исследовать ряды на сходимость.

, 1 1 1 . , 1 1 1 1

l)—+ — + — + ...; 2)-- + - + - + — + ...;

3! 5! 7! 2 4 8 16

»=i3" n=i(« + 1)! „=i и! «-i(2n)!

2. Используя интегральный признак Копти, исследовать ряды на сходимость.

со „2 2 со ı 3) со ı

i) Z ^ - r ;) Z ~ r ^ ; ^ Т Г - ^ ;

„.1«^{J}+1 „=2«1П « „=|(3и + 1)/

" Зи + 5 со t

л=1 я n=iV« + 1

3. Используя признаки сравнения, исследовать ряды на сходимость.

00 и^2 2) 00 1 l0 Зи + 5

ЧЕ-гт: ^7rV; 3) ^ Г ^ '

Й И * + 1 „=l(3« + l)^Z n=2(и + 1)

Б

4. Исследовать на сходимость ряды.

-=»(2и)! «=i „.ilii(« + 1)

£ ' п 1 1 1 1

4)Ycos—г; 5) - +——+———+————+ ....

' *t*\ *n*^{2} 2 2-3 2-3-4 2-3-4-5

12.1.5. Ответы

А

1. 1) сходится; **2)** сходится; **3)** расходится; **4)** сходится; **5)** сходится; **6)** сходится. **2. 1)** расходится; **2)** сходится; **3)** сходится; **4)** расходится; **5)** расходится. **3.1)** сходится; **2)** сходится; **3)** сходится.

Б

4.1) сходится; **2)** расходится; **3)** расходится; **4)** расходится; **5)** сходится.

12.1.6. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница

Ряд вида

а,-*а*^{2}+вз-а4+...+(-1ГЧ +...«£НГЧ , <12-2>

где *а^n* > 0 для всех л е *N*, называется знакочередующимся.

Признак Лейбница

Пусть дан знакочередующийся ряд вида (12.2). Если выполнены два условия:

1) последовательность абсолютных величин членов ряда монотонно убывает: *а^x >а^2 >а^3 >...>а^n >...;*
2) общий член ряда стремится к щ д ю при *а* —• +оо: если lim *а^n* = 0,

то ряд сходится. При этом сумма *S* ряда (12.2) удовлетворяет неравенствам 0 < *S* < *а^x*.

Знакочередующийся ряд называется абсолютно сходящимся, если ряд, составленный из модулей его членов, сходится. В этом случае сходится и сам знакочередующийся ряд.

Знакочередующийся ряд называется условно сходящимся, если ряд из модулей его членов расходится, а сам знакочередующийся ряд сходится.

12.1.7. Примеры решения задач

со

Пример 1А. Исследовать на сходимость ряд j—==—.

И *4n*

Решение. Рассмотрим ряд из абсолютных величин членов заданного ряда >_—?=• Этот **ряд расходится** как обобщенный **гарМОНИ-**

иН V«

ческий ряд $\sum_{n=щ}^{\omega} \frac{1}{p}$ при P~~- $\frac{J}{2}$ Следовательно, исходный знакочередующийся ряд не является абсолютно сходящимся.

Проверим выполнение условий признака Лейбница:

1) для абсолютных величин членов ряда выполняются условия

, 1 1

1 > - = > - = > . . .

4г 7з

2) общий член ряда a^n = — = стремится к нулю при n -> + ю . Следовательно, данный знакочередующийся ряд сходится условно.

Пример 2А. Исследовать на сходимость ряд —.

л=1 3"

Решение. Рассмотрим ряд из абсолютных величин членов заданного ряда 2] — . Этот ряд сходится по признаку Даламбера.

и=|3"

lim —- = lim -j = urn = - < 1. Следовательно, исходный знакочередующийся ряд является абсолютно сходящимся.

a„+1 (я + 1)-3" и + 1 1

n-»co # ^ и->оо 3" • *7 3/? 3

12.1.8, Задачи для самостоятельного решения

А

1. Показать, что ряды расходятся.

1)2(-1)"«; 2)ХН)"^-^; 3)Х(-1Г^1-^Т.

'i=i л=1 2 + и n=i ЪгГ

2. Показать, что ряды сходятся абсолютно.

1)ЕНГ'Г-Пу; 2) i (- i r - i - ; 3)Х(-1ГЧ

n=i + »=i (3и-2)! „=1 е"

3. Показать, что ряды сходятся условно.

» (_iy ∞ и + 3

„=i л/и + 2 „=2 и + 4

4. Исследовать ряды на сходимость.

со / П"+1 со С_П"+1 «в 3 „ , 1 со „2

„=i 3и-1 „=i 3 +1 „ 2 3л-1 ~2 2

Б

5. Исследовать ряды на сходимость.

1) £ (- !) - ^ ; 2) i (- i r 4 g Д . ; 3) £(-!)»(И + 1

*ti Vn «=i ил/и t1 М

12.1.9. Ответы

А

4. 1) сходится условно; **2)** сходится абсолютно; **3)** расходится; **4)** сходится абсолютно.

Б

5.1) сходится условно; **2)** сходится абсолютно; **3)** расходится.

12.2. Степенные ряды

12.2.1. Основные понятия

Ряд вида

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \qquad (12.3)$$

членами которого являются функции $u_n(x)$, определенные на некотором множестве X, называется функциональным. Каждому значению $x_0 \in X$ соответствует числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ Если числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x_0)$ сходится, то x_0 называется точкой **сходимости функционального ряда.** Множество всех точек сходимости функционального ряда называется его **областью сходимости.** В области сходимости сумма ряда $S(x) = \lim S_n(x)$, где $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)$. Функциональный ряд (12.3) называется абсолютно сходящимся на некотором множестве D, с X, если в каждой точке этого множества сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$.

Ряд вида

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum a_n x^n, \qquad \textbf{(12.4)}$$

где $a^0, a^x, a^2,\ldots, a^n,\ldots$ - действительные числа, называется **степенным рядом.** Числа $a^0,a],a^2,\ldots,a^{n>}\ldots$ называются **коэффициентами степенного ряда.**

Иногда рассматривают степенные ряды более общего вида:

$$\text{£л„}(x-a)'' = a^0 + a](x-a) + a^2(x-a)^2 + \ldots + a_„(x-a)'' \text{ f} \qquad (12.5)$$

Теорема Абеля. Если степенной ряд $\hat{}a_„x''$ сходится в точке $x = x^0$, $x^0 \ne 0$, то он абсолютно сходится в каждой точке x, для которой $|x| < |x^0|$.

Следствие. Если степенной ряд $\sum\limits_{л=0}^{\infty}$ расходится при некотором значении $x = x^1$, то он расходится и при всех значениях x, для которых tad > **Lxj |.**

Интервалом сходимости степенного ряда (12.4) (ряда (12.5)) называется такой интервал $(-R;R)$ $((X^0 - Л;x^0 + R)\backslash$ что в каждой его точке ряд сходится абсолютно, а в каждой точке, лежащей вне промежутка $(-R;R)$ $((x^0 - R;x^n + R)\backslash$ ряд расходится. На границах интервала сходимости, т. е. в точках $x = \pm R$ $(x = x^0 \pm R)$, ряд может как сходиться, так и расходиться. Число R называется **радиусом сходимости** степенного ряда.

При нахождении радиуса сходимости степенного ряда можно использовать признак Даламбера. Если существует lim — то

$$R = \lim_{-n+M} \qquad (12.6)$$

Свойства степенных рядов

1. Если радиус сходимости степенного ряда (12.4) отличен от нуля, то его сумма $S(x)$ непрерывна на интервале сходимости $(-R; R)$.

2. Степенной ряд (12.4) можно почленно дифференцировать и интегрировать на любом промежутке $[x^0;x]\subset(-R,R)$. Получившиеся в результате ряды имеют тот же радиус сходимости, что и исходный ряд.

12.2.2. Примеры решения задач

Пример 1А. Найти область сходимости ряда.

i) $\sum\limits_{n=1} > ''$; 2) $\sum\limits_{я=1}(-1Г'\hat{}—\frac{}{1n-\backslash}$; 3) $\sum\limits_{„=1}И - \frac{У}{nЪ}$.

Решение. Чтобы найти область сходимости степенного ряда, нужно найти интервал сходимости $(-R;R)$ и исследовать на сходимость ряды при $x = \pm R$.

1) Найдем радиус сходимости ряда $\sum\limits^{\infty}$«x" по формуле R- lim

Для заданного ряда $a^n=n$, $a^{n+x}=n+\backslash$, тогда $R = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{}{П+1} = \lim\limits_{л\to\infty}\frac{—}{Я+1} = \lim——т = 1$. Значит, (-1;1) - интервал сходимости данного ряда. При $x- \backslash$ получим числовой ряд]Г«, который расходится, так как $a^n = n$ -» да при n -» да. При $x = -1$ имеем ряд $\sum\limits_{л=1}^{\infty}И(-1)''$ — расходящийся по той же причине. В этом примере область сходимости совпадает с интервалом сходимости:

2) $\sum\limits_{ti}^{\infty}\text{H})\frac{\sim^{2и-1}}{2И-1} = x - \frac{^3}{3} + \frac{^5}{5} - \frac{^7}{7} + \ldots + (-1)''\frac{„^{2и-1}}{2л-1} + \ldots$ При решении этого примера нельзя использовать формулу (12.6) для нахождения радиуса сходимости, так как ряд не содержит четных степеней x. Применим признак Даламбера к ряду из модулей членов данного ряда

$$K\backslash = \frac{^{,2n-1|}}{2n-\backslash}г. \quad K+i| = \frac{^{L'2n+1|}}{2n+\backslash}\hat{} \quad [т \;"n+1 \quad \lim_{и„} \frac{|x^{2я+1}(2л-1)}{|>-\hat{}(2n+1)\backslash x^{2n-\backslash\backslash}}$$

$= \backslash x^2 1 \lim ——- = x^2$. Исходный ряд абсолютно сходится, если $x\sim < 1$ или $-1 < x < 1$;

При x -1 получим ряд $1 - \frac{1}{„} + \frac{1}{} - \frac{1}{} + \ldots$ - знакочередующийся, который сходится по признаку Лейбница. При $x = -1$ получим ряд

, 1 1 1

—— —+ у—... - знакочередующийся, сходящийся по признаку Лейбница.

Областью сходимости заданного ряда является отрезок $[-1; 1]$;

3) К ряду из модулей членов данного ряда применим признак Даламбера:

$\frac{(x-3)}{n3^n}$ $\frac{(x-3)^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}}$ $\lim\limits_{n\to\infty}$ $\lim \frac{(x-3)^{n+1} \cdot n \cdot 3^n}{(n+1)3^{n+1}(x-3)^n}$

$=|x-3|\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{3(n+1)} = \frac{1}{3}|x-3|$. Ряд сходится, если $\frac{1}{3}|x-3| < 1$, т.е. $|x-3| < 3$, $-3 < x-3 < 3$, $0 < x < 6$ - интервал сходимости.

При $x = 0$ получим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{n3^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{n3^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ - знакочередующийся, который сходится по признаку Лейбница. При $x = 6$ получим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n3^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ - расходящийся.

Область сходимости заданного ряда - $[0; 6)$.

12.2.3. Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение функций в степенные ряды

Для любой функции $y = f(x)$, определенной в окрестности точки x^0 и имеющей в ней производные до $(n+1)$-го порядка включительно, справедлива формула Тейлора:

$$\dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x^0)^n + R_n(x), \qquad (12.7)$$

где $R_n(x)$ - остаточный член.

Если функция $f(x)$ имеет производные любых порядков (т. е. бесконечно дифференцируема) в окрестности точки x^0 и $R^n(x) \to 0$ при $n \to \infty$, то из формулы Тейлора получается разложение функции $f(x)$ по степеням $(x-x^0)$, называемое рядом Тейлора:

$$f(x)=f(x^0) + \frac{f'(x^0)}{1!}(x-x^0) + \frac{f''(x^0)}{2!}(x-x^0)^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{f^{(n)}(x^0)}{n!}(x-x^0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x^0)}{n!}(x-x^0)^n. \qquad (12.8)$$

При $x^0 = 0$ получим разложение функции по степеням x - ряд Маклорена

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots$$

$$\dots \frac{}{n!} \dots \sum_{n=0} \frac{}{n!} \qquad (12.9)$$

Для разложения функции $y = f(x)$ в ряд (12.8) или (12.9) нужно:

1) найти производные $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x)$,
2) вычислить значения производных в точке $x = x^0$ или $x = 0$;
3) записать ряд (12.8) или (12.9) и найти интервал сходимости.

Таблица

Таблица разложений некоторых элементарных функций в ряд Маклорена

№	Функция	Разложение в ряд Маклорена	Область сходимости
1	e^x	$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots$	$(-\infty;+\infty)$
2	$\sin x$	$x-\frac{}{3!}+\frac{}{5!}+\dots+(-1)\frac{}{(2n+1)!}+\dots$	$(-\infty;+\infty)$
3	$\cos x$	$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\dots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\dots$	$(-\infty;+\infty)$
4	$(1+x)^\alpha$	$1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\dots$ $\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$	$(-1;1), \alpha<-1$, $(-1;1], -1<\alpha<0$; $[-1;1]$, $\alpha>0$
5	$\ln(1+x)$	$x - \frac{}{2} + \frac{}{3} \dots + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\dots$	$(-1;1]$
6	$\mathrm{arctg}\, x$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \dots \frac{x^{2n+1}}{2n+1} +$	$[-1;1]$

12.2.4. Примеры решения задач

Пример 1А. Разложить в ряд Маклорена функции.

\)y = e %. 2)y = 4й^; Ъ)y = \n{\-x^2).

Решение. 1) Используем разложение в ряд Маклорена функции

$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$ Заменим в нем x на $\frac{x^2}{2}$, получим

$e^{n} = 1 \frac{x^2}{2\cdot1!} л \frac{x^4}{4\cdot2!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2л}}{2^n\cdot и!} v\ldots,$ область сходимости

(-<*>;+*>);

2) $y = л/1 + x = (1 + x)^{/2}$. Используем разложение (4) из таблицы, под-

ставим a = $\frac{1}{2}$, получим VI + x = 1 + $\frac{1}{2}$ x + $\frac{2 V 2"^1) г}{2!}$-x~ +... +

2 U ɹ 12 ɹ „ л! -x^к+... ИЛИ (1 + x У 2 = 1 + - x —— —-X^2 + 4 ; 2 2!-2^2

1-1-3 -x'з i i - 3 - ; -x^4 +..., интервал сходимости (-1, 1);
2-4-6 2-4-6-8

3) y = ln(1-x^2). Используя разложение (5), заменив в нем x на - г,

получим $1п(1-x^2) = -x^2 - \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3} \ldots - \frac{x^{2„}}{л}$ интервал сходимо-

ста (-1; 1).

12.2.5. Некоторые приложения степенных рядов

Степенные ряды можно применять для приближенного вычисления неопределенных и определенных интегралов в случаях, когда первообразная не выражается в конечном виде через элементарные функции.

Степенные ряды можно применять для решения дифференциальных уравнений, например, в случае, если их решения не удается найти в элементарных функциях.

12.2.6. Примеры решения задач

Пример 1А. Вычислить $\int_0^{'} \frac{\sin 2x}{x} dx$ с точностью до 0,001.

Решение. Разложим подынтегральную функцию в ряд Маклорена, используя разложение (2) из таблицы, заменив в нем x на 2x и разделив почленно на x:

s m (2 x) ^ (2 x) - $\frac{(2x)^3}{}$ ^ + $\frac{(2x)^5}{}$ - $\frac{(2x)^7}{}$ ^ + $\frac{(2x)^9}{}$ - . . . = 2 x - $\frac{2^*}{}$ - x - $\frac{2^5}{}$ + ^ -

$\frac{2^7}{7!}X$. + $\frac{2^9}{9!}$ 9 x - .... Тогда $\frac{\sin 2x}{x}$ „ = / $\frac{2^3}{3!}$ 2 x + $\frac{2^5}{5!}$ я x $\frac{2^7}{7!}$ 6 x + $\frac{2^9}{9!}$ „ x -

и $\int_0 \frac{K \bullet}{x}$ <£c= j $\%(2 - \frac{2^{->3}}{3!} x^2 + \frac{п5}{5!} x^4 - \frac{л7}{7!} x^й + \frac{о9}{9!} x^{°}$ N dx =
о

$\Gamma 2x - \frac{2^3x^3}{3!\ 3} + \frac{2^5x^5}{5!\ 5} - \frac{2^7x^7}{7!\ 7} + \frac{2^9x^9}{9!\ 9}$
о

2 2>\-Ъ\2) ' 5!-51.2J 7I-71.2J И-9\2

$\_^1$ __1_j $\frac{}{зГз}$ + _ 5Г5 1_ + J 7!-7 = 9!-9 J_ + J "' 18 1_ + 600 3528 + 18

+ $\frac{}{600}$ — 0,946 с точностью до 0,001, так как сумма остатка

$- \frac{1}{} - \frac{1}{} + - + \ldots$ не превосходит по модулю первый член ряда, который меньше 0,001 (см. признак Лейбница).

Пример 2А Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения $У^1 = 2xУ + 4y$, удовлетворяющего начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Решение. Будем искать решение уравнения в виде

$y{x) = y(0) + ^ - x + ^^x^2 + ^^-x^3 + \ldots$ По условию $y(0) = 0$,

У(0) = 1. Найдем **У**'(0) = ^ x y' - И Д ^ = 2:0-1 + 40 = 0. Найдем

$y''(x) = (2xy'+4y)^x = 2У + 2xУ' + 4y = 6y + 2xy''$,

/"(0) = 6-1 + 2-O-0 = 6.

$y^{ф}$'\x) = (6У+2хУ% = 6у"+2у"+2ху"'= Яу"+2ху^{ш}, y^{un}(0) = 0,

$y^{(У}$\x) = (&уг+2ху"')х = 8У"+2/"+2ху$^{(,V)}$ =Wу"'+2ху$^{(IV)}$,

у® '(0) = 10-6 = 60. Можем записать $y(x)$«х + —x^3 + —x^5,

1 1 ,

_у(х) w i + J t + - I - искомое приближенное решение.

12.2.7. Задачи для самостоятельного решения

А

Найти область сходимости ряда.

Найти радиус сходимости ряда.

4. У—х". „=1и(3 -1) 5. У—$x^{2и}$. я=15 6. У j _. „=i2 Ял/и

7. Разложить функцию y - X -$2x^2$ +$5x$-7 по степеням (х -1).

Разложить функции в ряд Маклорена.

1 + х х

Найти три первых члена (отличных от нуля) разложения в ряд решения дифференциального уравнения.

10. У = х У - 1 , у(0) = 1. 11. $y'=e^y+xy$, $y(0) = 0$.

12. У = ^ + х , Я 0) = 1,У(0) = 1.

Б

Найти радиус сходимости ряда.

13. £3" х"\ 14. 2>!х".

Разложить функции в ряд Тейлора.

15. $y = e$* по степеням (х-2). 16. y = \nx по степеням (х-1).

17. Найти пять первых членов (отличных от нуля) разложения в ряд решения уравнения $y = x^2 + y^3$, >>(-1) = 2, У(-Т) = —.

12.2.8. Ответы

А

1. (-2,2). 2. [-1;1].3. (-оо;+оо).4. R = \. 5. R = V5 . 6. Я = 2.

7. у = -3 + 4(х-1) + $(х-Г)^2$ + $(х-1)^3$. 8. — Ц = 1-x^2 +x^4 -x^6+..
1 + x^2

9. $\frac{e^J - 1}{x}$ = 1 + $\frac{x}{2!}$ + $\frac{x}{3!}$ + $\frac{x}{4!}$ + ...". **10.** у «'1 - х + $\frac{1}{3}x^3$

11. у«х + $\frac{}{2}x^2$ + $\frac{}{3}x^3$. **12.** у«1 + х + $\frac{}{2}x^2$.

Б

13. R = -. **14.** Д = 0. **15.** $e"$ = e^2+e^2(х-2) + — $(x-2)^2$+...
3 2!

16. 1п х - х - 1) ~ ^ 1 + ^ 1 - . . .
2 3

17. 3;*2 + i(х+1) + ^$(x+1)^2$ + ^$(x+1)^4$ + i$(x+1)^5$
2 2 it) **8**

12.3. Ряды Фурье

12.3.1. Периодические функции и периодические процессы

Функция $y = /(x)$, определенная на множестве D, называется периодической с периодом T, если для каждого xeD значение (х + T) е D и выполняется равенство $f(x + T) = f(x)$.

Основные свойства периодических функций

1. Алгебраическая сумма периодических функций периода T есть периодическая функция периода T.
2. Если функция $y = f(x)$ имеет период T, то функция $y = f(ax)$, а * 0, имеет период T/a.
3. Определенный интеграл от периодической функции $y- f(x)$ с периодом T по любому отрезку длиной T имеет одно и то же значение, т. е. при любом х справедлива формула

$$\int_x^{x+T} f(t)dt = \int f(t)dt.$$

Простейшим периодическим процессом (движением) является простое гармоническое колебание, описываемое функцией

$$y= Asin(wx + ц>0), \quad x > 0, \qquad (12.10)$$

где A - амплитуда колебания, та - частота, $<p^0$ - начальная фаза. Основной период этой функции $T = \frac{—}{та}$.

Функцию вида (12.10) (и ее график) называют простой гармоникой. Простую гармонику можно представить в виде /isin(mx + q>0) = acostux + isinrax, где $a = Asinq>0$, $b = Acosy^a$.

12.3.2. Тригонометрический ряд Фурье

Функциональный ряд вида

— + ft] cos $x + b^t \sin x + a^2 \cos 2x + b^2 \sin 2x +... +$

+ a^n cosnx + $b_„$ sin«x + ... = $\frac{—}{2}$ + X(tf„ cosnx + £„ sin их) (12.11)

называется **тригонометрическим рядом.** Числа a^0, a^n, $Ь^я$ $(n = 1,2,...)$ называются **коэффициентами ряда.**

Ряд (12.11) можно записать в виде $\frac{—}{2}$ + £ A^n sin(«x + ф„), так как A^n sin(nx + ф^и) = A^n cos nx sin ф„ + A^n sin nx cos ф^и = a^n cos яx + + $Ь^я$ sin их, где а„ = Я„ sin ф„, />„ = A^n cos ф„.

Пусть периодическая, с периодом 2л, функция $y = f(x)$ представляется рядом (12.11), сходящимся к данной функции в замкнутом интервале [—я;тс]»т. е.

$$/(*) = y + cos / w + 6 „ smtvt). \qquad (12.12)$$

Коэффициенты $я^0$, a^n, $6^и$, определяемые по формулам

$$«o = !] / (*) \& , \qquad (12Л3)$$

$$<з, =\frac{1}{!} | /'(x)cos«xax, (neN), \qquad (1214)$$

$$h^n=\frac{1}{K}\backslash f(x)smnxdx,(n<EN), \qquad (12.15)$$

называются **коэффициентами Фурье функции** /(x), а тригонометрический ряд (12.11) с такими коэффициентами **называется рядом Фурье функции** /(x).

Формально составленный для функции $y = /(x)$ ряд Фурье может сходиться к функции $'S(x)$, отличной от /(x).

Достаточные условия разложимости функции $y = f(x)$ **в ряд Фурье**

Если функция $y = f$ (x) имеет на отрезке [-/;/J конечное число максимумов и минимумов и непрерывна за исключением, быть может, конечного числа точек разрывов первого рода, то соответствующий функции /(x) ряд Фурье сходится на этом отрезке и при этом в точках непрерывности функции сумма ряда $S(x)$ совпадает с функцией /(x): $S(x)$ = /(x), а в каждой точке c разрыва функции $f(x)$ сумма ряда

5(c) = ~ 0) + /(c ^{t} 0) и $SH) = m$ _ ./(-/ ±OK/(/ -0)

12.4. Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций. Разложение в ряд Фурье функций с произвольным периодом

12.4.1. Разложение в ряд Фурье четной функции

Если функция $y-f(x)$ - четная на [-л;л], то функции /"(x)sinix - нечетные и все $\int_{-л}$ /(x)sinnxcit = 0, значит, $Ь^n = 0$ (я e N).

Следовательно, четная функция имеет ряд Фурье, составленный из одних косинусов:

$$/(jej\frac{^}{2} + f^ cosax, \qquad (12.16)$$

где $a^0 = \frac{2}{л}$ J $f(x)dx$, $a^n = \frac{2}{—}$ j $f(x)cosnxdx$, $(n \in N)$. (12.17)

Если Л\гнкпия $v = f(x\backslash$ - **нечетная ня Г— jr** тт1 **то**

$$\sum_{n=1} \sin nw, \qquad (12.18)$$

где $b_n = -\int f(x) \sin nx dx, (n \in N).$ **(12.19)**

12.4.2. Разложение г ряд Фурье функций с произвольным периодом *2l*

Пусть функция $y = f(x)$ на промежутке $[-l;l]$ удовлетворяет достаточным условиям разложимости в ряд Фурье. Тогда разложение в ряд Фурье этой функции будет иметь вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum \left[a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l} \right], \qquad (12.20)$$

где $a_n = \frac{1}{l}\int_{-l} f(x)dx$, $a_n = \frac{1}{l}\int_{-l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$,

$$b_n = \frac{1}{l}\int f(x) \sin\frac{n\pi x}{l} dx \ (n \in N). \qquad (12.21)$$

Для четной функции $y = f(x)$ коэффициенты ряда Фурье находятся по формулам

$$b_n = 0, \ a_0 = \frac{2}{l}\int_0 f(x)dx, \ a_n = \frac{2}{l}\int_0 f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, (n \in N). \qquad (12.22)$$

Для нечетной фикции $y = f(x)$ коэффициенты ряда Фурье находятся по формулам

$$a_0 = 0, a_n = 0, b_n = \frac{2}{l}\int f(x) \sin\frac{n\pi x}{l} dx \ (n \in N). \qquad (12.23)$$

12.4.3. Разложение в ряд Фурье непериодических функций

Пусть требуется разложить в тригонометрический ряд Фурье функцию $y = f(x)$ на $[0;l]$. Можно произвольно продолжить функцию $y = f(x)$ на промежуток $[-l;0]$, но так, чтобы образовавшаяся на промежутке $[-l,l]$ функция $F(x)$, совпадающая с функцией $f(x)$ на $[0;l]$, удовлетворяла достаточным условиям разложимости функции в ряд Фурье. Разложив функцию $F(x)$ в ряд Фурье, получим искомый ряд,

представляющий функцию $y = f(x)$ в промежутке $[0;l]$.

В частности, $y = f(x)$ можно продолжить четно на $[-l;0]$, т. е. график $y = f(x)$ продолжить симметрично относительно оси OY. При этом $F(x)$ - четная функция и ряд для $y = f(x)$ будет состоять только из косинусов.

Если же $y = f(x)$ продолжить нечетно на $[-l;0]$, т. е. график $y = f(x)$ продолжить симметрично относительно начала координат, то $F(x)$ - нечетная функции и ряд для $y = f(x)$ будет состоять только из синусов.

12.4.4. Вспомогательные сведения

1. $\int_{-\pi} \cos nx dx = 0$, $n \in N$. 2. $\int_{-\pi} \sin nx dx = 0$, $n \in N$.

3. $\int_{-\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ \pi & \text{при } m = n, n, m \in N. \end{cases}$

4. $\int \sin mx \cos nx dx = 0$, $n, m \in N$.

5. $\int \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ \pi & \text{при } m = n, n, m \in N. \end{cases}$

6. $\int x \sin nx dx = \frac{1}{n^2}\sin nx - \frac{1}{n} x\cos nx.$

7. $\int x \cos nx dx = \frac{1}{n^2}\cos nx + \frac{1}{n} x \sin nx.$

8. $\int x^2 \sin nx dx = \frac{2x}{n^2}\sin nx - \left(\frac{x^2}{n} - \frac{2}{n^3}\right)\cos nx.$

9. $\int x^2 \cos nx dx = \frac{2x}{n^2}\cos nx + \left(\frac{x^2}{n} - \frac{2}{n^3}\right)\sin nx.$

12.4.5. Примеры решения задач

Пример 1А. Разложить в ряд Фурье $[-\pi;\pi]$ функцию $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\pi < x < 0, \\ 1 & \text{при } 0 < x < \pi, \end{cases}$ имеющую период 2π. График функции изображен на рис. **12.1.**

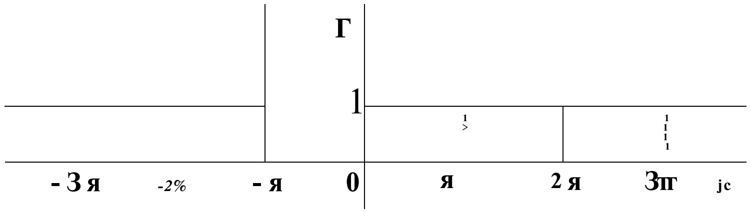

Рис. 12.1

Решение. Данная функция удовлетворяет достаточным условиям разложимости функции в ряд Фурье. Находим коэффициенты ряда Фурье данной функции по формулам (12.13)- (12.15).

j я | (0 я N 1

a^Q = — f $f(x)dx$ = — fOox + fl-atr = -* 1 o = 1 -

л

I л j / 0 я

aл = — $jf(x)cosnxdx$ = — \ jOcosnxax + Jcosnxax Iя r,

л n

1 " 1 1 1 я 1

b^n $jf(x)sinnxdx$ = -Jsin/mic = cosнх|0 - Tin (1-cos ли) =

Л и

[0 при $n = 2k,$

= \ 2 при $n = 2k\text{-}l,\ keN.$ Следовательно, $f(x)=$ 1/2 + 2/л sinx +

[ли

+ 2/3re sin 3x + ... = 1/2 + У x jfeit(2it-1) 2 sm(2Ar-l)x = - + -X 1/2 2 7u=i - sin(2£-l)x / ZJc-1. В

точках разрыва сумма ряда сходится к значению, равному I/—. График функции $S(x)$, которая является суммой полученного ряда Фурье, представлен на рис. 12.2.

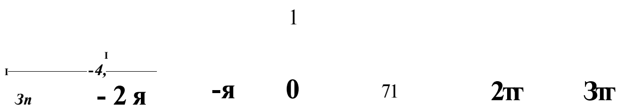

Рис. 12.2

Пример 2А. Разложить в ряд Фурье на отрезке [- л; тс] функцию

№ Г- x при - 7l < x < 0, [Л: при 0 < х < тс, имеющую период 2л. График функции изображен на рис. 12.3.

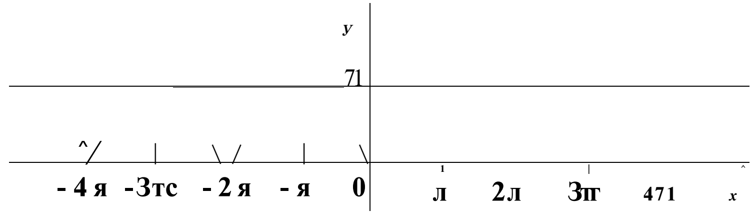

Рис. 12.3

Решение. Заданная функция удовлетворяет достаточным условиям разложимости функции в ряд Фурье. Так как рассматриваемая функция четная, то все коэффициенты $Ь^n$ = 0. Коэффициеты a^0 и a^n находим по формулам (12.17).

) - 2 J 7 x. л 2 = л.

I ~ 2' л; вспомогательные сведения, формула 7

' 1 и 2 cos их 1—x sin их = ^ - (с о э л и - !) =

A n и ли

f0 при $n = 2к,$

4

I——при и = $2к$ -1, $ке\ N.$

Следовательно, разложение функции в ряд Фурье имеет вид

fix) л 4 feosx cos3x cos5x cos(2A:-1)x

7l — г — + — з - — + — 5 — + ... + (2 * -1V ~ + ...

В силу непрерывности функции $f(x)$ полученный ряд Фурье

Пример 3А. Разложить в ряд Фурье на промежутке [-2; 2) функцию $f(x) = \begin{cases} -1 \text{ при } -2 < x < 0, \\ 1 \text{ при } 0 < x < 2, \end{cases}$ имеющую период 4. График функции изображен на рис. 12.4.

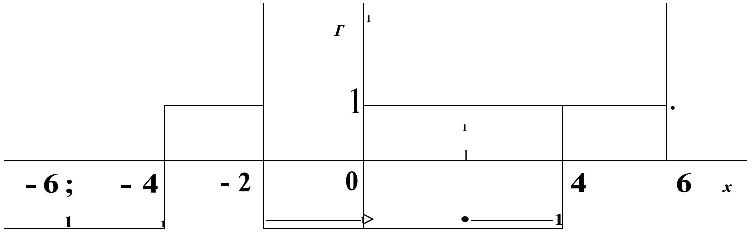

Рис. 12.4

Решение. Данная функция удовлетворяет достаточным условиям разложимости функции в ряд Фурье. Учитывая, что функция является нечетной, коэффициенты ряда Фурье будем находить по формулам (12.21), полагая $l=2$.

$$a_0 = 0,\quad a_n = 0,\quad b_n = \int_0^2 \sin\frac{n\pi x}{2}dx = -\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 = \frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi) =$$

$$= \begin{cases} 0 \text{ при } n = 2k, \\ \dfrac{4}{\pi n} \text{ при } n = 2k-1,\ k \in N. \end{cases}$$

Следовательно, разложение функции в ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2k-1)\pi x}{2}}{2k-1} = \frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{2} + \dots\right).$$

Сумма полученного ряда в точках непрерывности функции $y = f(x)$ равна значению функции $y = f(x)$, а в точках разрыва функции $y = f(x)$ сумма ряда равна 0.

Пример 4А. Разложить в ряд по косинусам функцию $y = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$ на промежутке [0; π].

Решение. Продолжим функцию $y = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$, заданную на отрезке [0; π], четным образом на отрезок [-π; 0], затем продолжим периодически с периодом 2π (рис. 12.5).

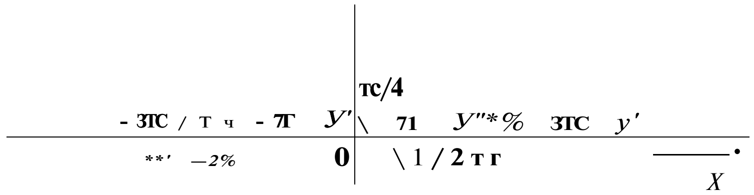

Рис. 12.5

Получившаяся периодическая функция с периодом 2π удовлетворяет достаточным условиям разложимости в ряд Фурье. Коэффициенты ряда Фурье найдем по формулам (12.17): $b_n = 0$,

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{4}x - \frac{x^2}{4}\right)\Big|_0^{\pi} = 0.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\cos nx\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx = \left[\begin{array}{c}\text{вспомогательные} \\ \text{сведения, формула 7}\end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{2n}\sin nx\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n^2}\cos nx + \frac{1}{n}x\sin nx\right)\Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{\pi n^2}(\cos n\pi - 1) =$$

$$= \begin{cases} 0 \text{ при } n = 2k, \\ \dfrac{2}{\pi n^2} \text{ при } n = 2k-1,\ k \in N. \end{cases}$$

Следовательно, разложение функции в ряд Фурье имеет вид

$$\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2} = \frac{2}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots + \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2} + \dots\right)$$

12.4.6. Задачи для самостоятельного решения

А

1. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом 2л функцию $/(x) = \begin{cases} -x & \text{при } -л < x < 0, \\ 0 & \text{при } 0 < x < л. \end{cases}$

2. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом 2л функцию $/(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } -л < x < 0, \\ 2 & \text{при } 0 < x < л. \end{cases}$

3. Разложить в ряд по синусам функцию $y = x$ напромежутке (0;л).

4. Разложить функцию $y = x^2$ в промежутке (-3;3).

5. Разложить функцию $y = 3 - x$ в промежутке (- 2;2).

Б

6. Воспользовавшись разложением функции $y = x^2$ в ряд Фурье в промежутке (-л; л), найти сум му числового ряда $]Г_{л=1} (-1)^{п+1} \frac{—}{n}$.

7. Разложить функцию $y = x(л-x)$ в ряд синусов на интервале (0;л). Используя полученное разложение, найти сумму числового ряда $1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \dots$.

12.4.7. Ответы

А

j л 2 y cos(2к + \)x y . яЧ sin nx 1 6 "sin(2rt + l)x
"4 nh (2n + l)^2 Ъ П 2 nh 2и + 1

3_ ^(-irstonx 4 6+ 12 »(1)ЛJ_cos^
» ı и л п=о « 3

5. 3 + -X(-0 -sin— .
лп=0 и 2

Б

л^2 8 " sin(2n-l)jc. л'
' 12 ' TCJ, (2и-1)^3 ' 32'

Глава 13. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

13.1. Оригинал и изображение

13.1.1. Основные теоретические сведения

Преобразованием Лапласа функции *fit)* вещественной переменной *t* называется функция *F(p)* комплексной переменной *p*, определяемая равенством

$$F(p)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt. \qquad (13.1)$$

Функцию *F(p)* называют **изображением по Лапласу** функции /(г).

Если функция /(/), стоящая под знаком интеграла (13.1), удовлетворяет следующим условиям:

1) $/(0 = 0$ при $t<0$;

2) для всех $t > 0$ функция /(г) определена и на любом конечном интервале имеет лишь конечное число точек разрыва первого рода (т. е. кусочно-непрерывна);

3) существуют такие числа $M > 0$, $a > 0$, что при всех m $\backslash Щ < Me^{ш}$.

то функция *fit)* называется **оригиналом.**

Всякий оригинал имеет изображение.

Соответствие между оригиналом *f(t)* и изображением *F(p)* обозначается $f(t) = F(p)$ или $F(p) = L\{f(t)\}$.

Простейшим оригиналом является функция Хевисайда, которая. определяется следующим образом:

$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 & \text{при } t > 0. \end{cases}$$

Если функция *g(t)* удовлетворяет условиям 2 и 3, то функция $/(0 = g(t)\cdot 1(t)$ удовлетворяет условию 1, т. е. является оригиналом. Чтобы упростить записи в дальнейшем, как правило, будем записывать /(/) вместо Д?)х(0-

Единственность изображения

Если оригиналы /(f) и g(f) непрерывны и имеют одинаковое изображение *F(p)*, то эти функции совпадают.

Основные свойства преобразования Лапласа

1. Свойство линейности. Если $f\(t) = F^x(p)$, f^2iO ^$F^2(p)$, $^c\$ и $^c г$ ~ постоянные, то $c,/,(f) + c^2/^2(t) = c^lF^l (p) + c^2F^2(p)$.

2. Теорема подобия. Если $f(t) = F(p)$ и $\kappa > 0$, то $f(kt)$=—$F\$ — κ κ

3. Теорема смещения. Если $f(t) = F(p)$,то $e^{Pot}f(t) = F(p-p^0)$.

4. Теорема запаздывания. Если $f(t) = F(p)$ и т > 0, то $f(t-x)$ = e^$F(p)$.

5. Дифференцирование оригинала. Если функция /'(f) и ее производные являются оригиналами и $f(t)$^$F(p)$, то $fit)$ % - ДО), /"(f) = P^2/-"(P) - $p/(0)$ - /'(0),

/$^{(и)}$(0 = $P''ПP)$ - P ""'/(0) - p"-^{7}/'(0) ^ - - ^$^{(""2)}$(0) - /$^{(}$"-°(0),

при этом под /$^{(A)}$(0) понимается $\lim\limits_{f\to+0}$ /^(t), κ =$l,2,...,n-l$.

6. Дифференцирование изображения. Если $f(t)4F(p)$, то -^(0 = F'(p). В общем случае $(-l)''t^nf(t) = F^{(n)}(p)$.

7. Интегрирование оригинала. Если /(f) = $F(p)$, то J/(x)rft = $F(p)$

8. Интегрирование изображения. Если $f(t) = F(p)$ и интеграл jF(p)^p является сходящимся, то =

9. Умножение изображений. Если $f\(t)=F$^(p), $f^2it) = F^2(p)$, то J/i(T)./^{2}(f-T)di = $F^l(p)F^2(p)$. Интеграл J/j(t)/^{2}(f-T)eft называ-
0 о
ется сверткой функций /(f) и /^{2}(f), обозначается /(f) * /г(0-

Таблица

[1] аолица изображений основных функций

№	Оригинал $f(t)$, $t > 0$	Изображение F(p)
1	C = **const**	C
2	e^{ш}	1
3	'", « = l, 2, 3,...	«! P''^{+1}
4	e^a'l",n = l, 2, 3,...	$n\$ $ip-ay*$
5	**sin**(3f	**P** **У + P ^{2}**
6	**cosPf**	P **/ + P ^{2}**
7	$e^{ш}$ **cos**(3f	**(p - a)^2 + p^2**
8	e^{a}'**sinpf**	**P** **(/> - a)^2 + P^2**
9	**/sinpf**	2pp **t^2+P^{2}r**
10	**/cosPf**	**/>^{2}"P^2 -** '
11	**shpf**	**P** **P^2 - P^2**
12	**chpf**	**/ - P ^{2}**

13.1.2. Примеры решения задач

В каждом из приведенных далее примеров указываются только значения $f(t)$ при $t > 0$ (всегда имеется в виду, что $f(t) = 0$ при $t < 0$).

Пример 1А+Б. Используя преобразование Лапласа, найти изображения функций.

1) $f(t) = e^{3t}$; 2) $f(t) = 5$; 3) $f(t) = 2t$;

4)

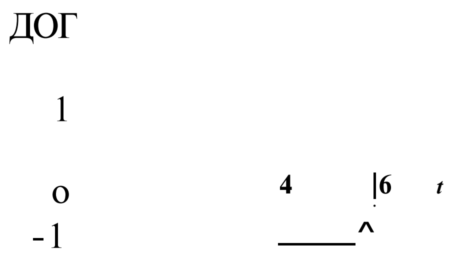

Рис. 14.1

Решение. 1) $f(t) = e^{3t} \doteq F(p) = \int e^{3t}e^{-pt}dt = \int e^{(3-p)t}dt$

$= \lim \int \ldots = \lim \ldots \quad \lim \ldots$

$\ldots = \frac{1}{p-3}$. Итак, $e^{3t} \doteq \frac{1}{p-3}$ по таблице изображений;

2) $f(t) = 5 \doteq F(p) = \int 5e^{-pt}dt = \lim \int 5e^{-pt}dt = 5 \lim \ldots$

$\ldots \lim (e^{-bp} - 1) = \ldots$. Значит, $5 \doteq \frac{5}{p}$;

3) $f(t) = 2t \doteq F(p) = \int_0^{+\infty} 2te^{-pt}dt = 2 \lim \int te^{-pt}dt$. Вычислим $\int te^{-pt}dt$ методом интегрирования по частям: $u = t$, $du = dt$, $dv = e^{-pt}dt$, $v = \int e^{-pt}dt = -\frac{1}{p}e^{-pt}$. По формуле $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ получим, что

$\int_0^b te^{-pt}dt = -\frac{t}{p}e^{-pt}\Big|_0^b + \frac{1}{p}\int_0^b e^{-pt}dt = \ldots$ Тогда $F(p) = \int_0^{\infty} 2te^{-pt}dt = 2\lim \int_0^b te^{-pt}dt =$

$2 \lim \left(-\frac{b}{pe^{bp}} - \frac{1}{p^2e^{bp}} + \frac{1}{p^2}\right) = \frac{2}{p^2}$, так как $\lim \frac{b}{e^{bp}} =$

$\lim \frac{1}{pe^{bp}} = 0$ - использовали правило Лопиталя. Следовательно,

$f(t) = 2t \doteq \frac{2}{p^2}$;

4) согласно графику (рис. 13.1), функция $f(t)$ на промежутке $[0; +\infty)$ имеет вид

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < t < 2, \\ 1 & \text{при } 2 < t < 4, \\ -1 & \text{при } 4 < t < 6, \\ 0 & \text{при } t > 6. \end{cases}$$

Поэтому $F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt = \int_2^4 e^{-pt}dt - \int_4^6 e^{-pt}dt = -\frac{1}{p}e^{-pt}\Big|_2^4 + \frac{1}{p}e^{-pt}\Big|_4^6 = \ldots$

$= \frac{1}{p}\left(e^{-2p} - \ldots\right)^2$.

Пример 2А+Б. Используя основные свойства преобразования Лапласа и таблицу изображений, найти изображения оригиналов

1) $3 - 8t$; 2) $5\cos t - \frac{1}{5}\sin 5t$; 3) $2e^{-3t} - 3t$;

4) $e^{-4t}\cos 2t$; 5) $t e^{2t}$; 6) $4 + 3t^3 + 7t\cos 3t$;

7) $\cos^2$; 8) $4\sin 3t\cos 2t$; 9) $te^{3t}\cos 2t$;

10) $e^{t}\sin(t-1)$; 11) ...; 12) $\frac{1-\cos t}{t}$; 13) $\int \sin^2 2\tau\,d\tau$.

Решение. 1) По таблице изображений находим 1=— (1), г=—-.

. „ 3 8

Используя свойство линейности, получаем, что 3 - 8/———;

P P

i . , 5p 1 5

2) 5 cos Г — sin5/=——г———, так как по таблице

2 $p^2+\backslash$ $2p^2+25$

cos / =$_I f$ (6), B=1, ш » = — = - — (5), 3 = 5;

p + 1 // + 2 5

2 3

3) 2e - 3 f=——————г- Использовали табличные формулы (2),

/> + 3 /

a = - 3 , (1) и свойство линейности;

4) e ~^{4}'cos 2 / = — — , формула (7), a = -4, p = 2;

O + 4) + 4

5) 1 lte~^{2}' = ——г, формула (4), a = - 2 , n = 1;

(/7 + 2)

6) используем таблицу: 1=— (1), t^3=-'j (3), f c o s 3 f = — - — - — ,

P P (p + 4y+4

формула (10), P = 3, получим, что 4 + 3г^3+7/cos3/ =

i - ^{4} + —^{18} + - Ц$7(p^2$-9)f, учли, что 3!= 1-2-3 = 6;

P P* $(P^2+9)^2$

, 2 1 + cos2f

7) понизим степень по формуле cos / =————, получим

cos ^{2} t ~ —1—i—1—cos^ —. 1—i 1 p ——"

2 2 2 2p $2p^2+l$

8) преобразуем произведение по формуле sin a cos p =

=-^(sin(a + p) + sin(a-P)), получим 4sin3/cos2/= 2(sin5/+ sin/) =

= 2' 3 + 1 Л

У + 5 ^{2} ^ ^{2} + 1 y

9) используем теорему смещения. По таблице /cos2/-———--

формула (10), а тогда по теореме смещения e^3't cos 2/ = (7>-3)^2-4 / ((/>-3)^2+4)^2

10) зная, что e'sin / %- 1 / (p - i)^2 + i формула (8), по теореме запаздывания получим $e^Л$ sin(7 - 1) =

(P - 1 Г + 1

11) известно, что C_{ost}=~f~. По свойству дифференцирования изображения t^2 cos/- f "] , $(p^2+l)^2$ J

$2p(p^2 +1)^2$ - (1 - p^2)2(p^2 + Щp $2p^6$ - 6p

(У + 1)^3,

12) используя таблицу и свойство линейности, имеем 1-cos/ = л. 1 P

P * ~ У77' п P и м е н я я свойство интегрирования изображения, получим:

1-cos/ 1 ^ /

———Y~ |Ф = lim 1 п Ы - - 1 n (p ^{2} + 1)

= lim fa . y = lim 1 n ^ 2 + 1

6—>+oc v^+T VT^iJ - in——————, так как

lim In ——— = 0;

4b^2 + 1

13) найдем изображение функции r sin^2 2/ = rjj^-^cos4/j =

= 2 \ t - \ t w & t o = - ^ r r \ - P 16 (таблица, формулы (3) и (10)).

I 2p I (p +16)

Тогда J т sin^2 2xdx = ' 1 1 p^2-\6 4 1

V 2 (^ + 1 6)^2 y ———по свойству интегрирования оригинала.

,P

Пример 3А. Найти оригиналы по их изображениям.

1) $F(p) = \frac{5}{p} - \frac{3}{p^3} + \frac{11}{p-1}$; 2) $F(p) = \frac{2p+1}{p^2+16}$;

3) $F(p) = \frac{p}{p^2+2p+5}$; 4) $F(p) = \frac{5p-3}{p^2-6p+34}$;

5) $F(p) = \frac{p}{(p+1)(p-2)(p+3)}$; 6) $F(p) = \frac{5p-8}{p(p^2+4)}$.

Решение. 1) по таблице изображений находим $1 = \frac{1}{p}$, $t^2 = \frac{2}{p^3}$, $e^t = \frac{1}{p-1}$. Тогда $5 = \frac{5}{p}$, $\frac{3}{2}t^2 = \frac{3}{p^3}$, $11e^t = \frac{11}{p-1}$. Окончательно получим, что $f(t) = 5 - \frac{3}{2}t^2 + 11e^t$;

2) преобразуем $F(p)$ таким образом, чтобы можно было воспользоваться таблицей изображений:

$$F(p) = \frac{2p+1}{p^2+16} = 2\frac{p}{p^2+16} + \frac{1}{4}\frac{4}{p^2+16}.$$

По формулам (6), (5) таблицы получаем, что $f(t) = 2\cos4t + \frac{1}{4}\sin4t$;

3) преобразуем дробь, выделив полный квадрат в знаменателе, в сумму дробей, оригиналы которых известны.

$$F(p) = \frac{p}{p^2+2p+5} = \frac{p}{(p^2+2p+1)+4} = \frac{p}{(p+1)^2+4} = \frac{p+1}{(p+1)^2+4} - \frac{1}{2}\frac{2}{(p+1)^2+4}.$$

По формулам (7), (8) таблицы изображений получаем: $f(t) = e^{-t}\cos2t - \frac{1}{2}e^{-t}\sin2t$;

4) выделяем полный квадрат в знаменателе дроби.

$$F(p) = \frac{5p-3}{(p^2-6p+9)+25} = \frac{5p-3}{(p-3)^2+5^2} = \frac{5(p-3)+12}{(p-3)^2+5^2} =$$

$$= \frac{5(p-3)}{(p-3)^2+5^2} + \frac{12}{(p-3)^2+5^2} = 5\frac{p-3}{(p-3)^2+5^2} + \frac{12}{5}\frac{5}{(p-3)^2+5^2}.$$

Тогда $f(t) = 5e^{3t}\cos5t + \frac{12}{5}e^{3t}\sin5t$;

5) разложим правильную дробь на простейшие:

$$\frac{p}{(p+1)(p-2)(p+3)} = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{p-2} + \frac{C}{p+3} = \frac{A(p-2)(p+3) + B(p+1)(p+3) + C(p+1)(p-2)}{(p+1)(p-2)(p+3)}.$$

Приравняем числители первой и последней дробей: $A(p-2)(p+3) + B(p+1)(p+3) + C(p+1)(p-2) = p$. Полагая, что p принимает значения, равные корням знаменателя, получим:

$p = -1$: $A\cdot(-3)\cdot 2 = -1$, $-6A = -1$, $A = \frac{1}{6}$;

$p = 2$: $B\cdot3\cdot5 = 2$, $15B = 2$, $B = \frac{2}{15}$;

$p = -3$: $C\cdot(-2)\cdot(-5) = -3$, $10C = -3$, $C = -\frac{3}{10}$.

Тогда $F(p) = \frac{p}{(p+1)(p-2)(p+3)} = \frac{1}{6}\frac{1}{p+1} + \frac{2}{15}\frac{1}{p-2} - \frac{3}{10}\frac{1}{p+3}$.

6) разложим заданную правильную дробь на простейшие:

$$\frac{5p-8}{p(p^2+4)} = \frac{A}{p} + \frac{Mp+N}{p^2+4} = \frac{Ap^2+4A+Mp^2+Np}{p(p^2+4)}.$$

Тогда $Ap^2 + 4A + Mp^2 + Np = 5p - 8$. Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях p:

p^2: $A + M = 0$, $M = -A = 2$,

p: $N = 5$,

p^0: $4A = -8$,

Таким образом, $\frac{5p-8}{p(p^2+4)} = \frac{-2}{p} + \frac{2p+5}{p^2+4}$. Представим $F(p)$ в виде суммы дробей, оригиналы которых известны:

$$F(p) = -\frac{2}{p} + 2\frac{p}{p^2+2^2} + \frac{5}{2}\frac{2}{p^2+2^2}.$$

Тогда $f(t) = -2 + 2\cos2t + \frac{5}{2}\sin2t$.

13.1.3. Задачи для самостоятельного решения

Используя определение преобразования Лапласа, найти изображения оригиналов.

(О при/<0,

1) / (0 = 3; 2) / (0 = 3е- 3) *fit)* 1 приО<г <3,

[0 при / > 3.

Используя основные свойства преобразования Лапласа и таблицу изображений, найти изображения оригиналов.

4)/(*) = 5* + 10; 5) / (0 = -cos4f--sin6r;
2 6

6) *f(t) = 2t*^{2} *+lte-* 7) /(f) = W^5-3fcos5f;

8) /(/) = e"^{J}'(cosr-sin2f); 9) / (0 = (3.'^{2}+5)e^2';

Ю) /(*) = 4sin4/cos2/ + 3sh2f; 11) /(f) = sm4fsin6/ + 2ch3/,

12) /(*) = cos^3*; 13) *f(t) = e*^{4,} sin 3/cos 2/;

14) /(*) = *sh2*;

e' -1

15) / (0 = — •

Найти оригиналы по их изображениям.

16) *F(p)* = 2 / *p* + \ 3 / — *p* + 4 / *p*^{l} 17) *F(p):* *3p* / *p*^{2}*+4* -+- 16 / *p*^{2}*+1* *p~2*

18) *F(p)* = 0> +1)^2' \9)*F(*^{P}*):* **Pzl** / /?^{2} -4/7 + 6' •

20)F(/>) = P^2+1 / *p(p + l)(p + 2)* . 21) *F(p* /> / (p^2+1)(p^2+4) .

22) *F{p)-.* 1 / *(p + \\p + 2)*^{2} ,

Найти изображения оригиналов.

23. ДО = 5'; 24. /(*) = cos(3* - 2); 25. f™^T_T-A. о

Используя определение преобразования Лапласа, найти изобра-

26. / (0 = -sin3r. 27.

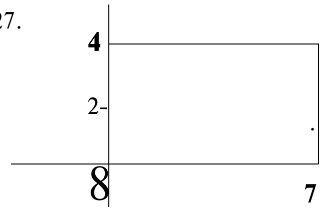

Рис. 14.2

13.1.4. Ответы

А

3 - 3 3 . 1

/7 /7 + 4 /7 2/;^{2}+16 /7^2+36'

• , 7 — 7 А_^{3}У-^{25}) /> + 3 2

/7 (/7 + 4) (Р + 25)" (/7 + 3)^2+1 (/7 + 3)^2+4

(/7-2)^3 /7-2 / + 36 *p*^{2}*+4* *p*^{2}

11. Р"+4 *p-* +100 2/> **12.** 1 (4 ^ - + - Р / 4 \P+1 p^2 +9

13. 5 / (/7 + 4)"+25 -+- (/7 + 4)^2+1J **14.** 4/7 / *(p*^{2}*-4)*^{2} **15.** 1n-^- / /7-1

16. 2e$^-$'-3 + 4*. **17.** 3cos2r + 16sinf-5e^2'. **18.** *e~'-2te~'.*

19. e^{2f}**(cosV2r+ysin720. 20.** |(1-4e$^-$' + 5e~^{2}').

21. |(cos/**-cos2r). 22.** *e~' -e*^{2,} -/e^{-2}'.

Б

23. I / /7-1п5' **24.** *pe* ™ / *p*^{2} +9 **25.** **1Гя** / #*2 arctg/7 . **26.**

27. — / 7p (1-e-^{7}") + - / /^{7} (1-2e-^{7}')-

13.2. Операционный метод решения линейных дифференциальных уравнений и их систем

13.2.1. Основные теоретические сведения

Пусть требуется найти частное решение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами $x^{(п)}$ + я,$x^{(иЧ)}$ +... + $a_„x$ = /(г), удовлетворяющее начальным условиям x(0) = c^0, x'(0) = с,,...,$x^{(„"Ч)}$(0) = $c_{п\_1}$, где c^0, с,,..., с„_, - заданные числа.

Предположим, что искомая функция *x(t),* ее производные x', *x"*$x^{(л)}$ и данная функция ***f(t)*** являются оригиналами. Обозначим изображения функций х(г) и /(/) соответственно *X(**p**) = X*, *F(**p**) = F*. Пользуясь свойствами дифференцирования оригинала и линейности, перейдем в дифференциальном уравнении от оригиналов к изображениям:

(***p***"*X'*- я"^{4} c^0 - *p**~^{г}c^x - . . . - с„_,) + a^x (***p***"^{A} *X* - ***p***"~^{г}c^0 - . . . - с„_2) + . . .+ + $a^л$^*(pX*-c^0) + a^n*X* = *F*.

Полученное уравнение называется **операторным.** Оно является линейным уравнением относительно *X{**p**)*. Определив из этого уравнения *X(**p**)*, находим оригинал *x(t).*

Аналогично применяется операционный метод для решения систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

13.2.2. Примеры решения задач

Пример 1А. Найти частные решения уравнений, удовлетворяющих заданным начальным условиям.

1) x" + 2x' + 2x = 0, x(0) = 0, x'(0) = 2;

2) *x" + x'* = Г + *2t*, x(0) = 4, x'(0) = -2.

Решение. 1) обозначим искомое частное решение *x(t).* Пусть *x(t) = X(p) = X,* тогда x'(Г) % *pX* - x(0) = *pX* , *x"(t)* Ц ***p***^{1} *X* - ***px(0)*** - -x'(0) = ***p***^{2}*X-2.* Подставляя эти выражения в дифференциальное уравнение x" + 2x' + 2x = 0, получим операторное уравнение: ***p*** *л* -z + ***Арл*** + /л = и. ыразим отсюда ***л :*** (***p~*** + *z.**p*** + *z)A* = z,

X(p) = —$\frac{z,}{p^1 + 2p + 2}$. Выделим в знаменателе дроби полный квадрат, получим *X(p)* = —$\frac{2}{/Г + 2р + 1 + 1}$=$\frac{2}{(p + iy+l}$- - . Тогда *x(t) = 2e* ' sin /;

2) пусть *x(t)=X(p)=X,* тогда *x'(t) = pX* - x(0) = *pX* - 4, x"(г) = />^{2}X - />x(0) - x'(0) = *p*^{2}*X - 4p + 2.* Так как /^{2} + *2t* = $\frac{2(1+_5p)}{P}$г —, то приходим к операторному уравнению: *p*^{2}*X -4p + 2 + pX* -4 = ^ -$^+$ ^, из которого находим изображение *X(p)* частного решения дифференциального уравнения: (р^2 + р Щ р) = $^{3 У/}$ + 4/7 + 2, (/7^2 + /7)л-*(p)* = =—^—*f*——*£-:*

Х(р) =$\frac{2(1 + /7) + 2/7^3(/7 + 1) + 2/7^4}{P\ (P + ^1)}$-. В правой части последнего уравнения разделим почленно числитель на знаменатель. Получим *X(p)* = —$\frac{ч}{P}$-Н$\frac{2}{P}$\\-$\frac{2}{Р + 1}$. Тогда искомое частное решение *x(t)* имеет вид: *x({)* = $\frac{—}{3}$ + *2 + 2e '.*

Пример 2А. Найти решение системы дифференциальных уравнений

$$x' = y-z,$$
$$\bullet\ y' = x + z - 1,$$
$$z' = x-y + l$$

при следующих начальных условиях: x(0) = 1, y(0) = 2, z(0) = 1.

Решение. Обозначим искомое частное решение

$$x = x(/),$$
$$\bullet\ У = y(t),$$
$$z = z(t).$$

Пусть *x(t) = X(p) = X, y(t) = Y(p) = Y, z(t) = Z(p) = Z.* Находим, что *x'(t) = pX-\\, y'{l) =pY-2, z'(t) = pZ-\\.*

Система операторных уравнений имеет вид

$$pX-1 = Y-Z, \qquad pX-Y+Z=1,$$

$$pY-2 = X+Z-\frac{1}{p}, \text{ или } \begin{cases} X-pY+Z=-2, \\ \end{cases}$$

$$pZ-1 = X-Y+\frac{1}{p}, \qquad X-Y-pZ = -\frac{1}{p}-1.$$

Изображения X, Y, Z находим из системы по формулам Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} p & -1 & 1 \\ 1 & -p & 1 \\ 1 & -1 & -p \end{vmatrix} = p^3+p-2=(p-1)(p^2+p+2).$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{p}-2 & -p & 1 \\ -\frac{1}{p}-1 & -1 & -p \end{vmatrix} = p^2+p+2.$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} p & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{p}-2 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{p}-1 & -p \end{vmatrix} = \frac{2p^3+p^2+3p-2}{p} = \frac{(2p-1)(p^2+p+2)}{p}$$

$$X(p)=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{1}{p-1}, \quad Y(p)=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{2p-1}{p(p-1)}=\frac{1}{p}+\frac{1}{p-1},$$

$$Z(p)=\frac{1}{p}, \quad z(t)=1.$$

Искомое решение системы $x(t)=e^t$, $y(t)=1+e^t$, $z(t)=1$.

13.2.3. Задачи для самостоятельного решения

Найти частные решения уравнения, системы уравнений, удовлетворяющие заданным начальным условиям.

А

1. $x''(t)+4x'(t)-5x(t)=0$, $x(0)=3$, $x'(0)=-3$.
2. $x''(t)-4x'(t)=4$, $x(0)=-1$, $x'(0)=0$.
3. $x''(t)+2x'(t)-3x(t)=e^{-t}$, $x(0)=0$, $x'(0)=1$.
4. $\begin{cases} x'+y=0, \\ y'+x=0, \end{cases}$ $x(0)=1$, $y(0)=-1$.

$$\begin{cases} x'+x=y+e^t, \\ y'+y=x+e^t, \end{cases}$$

$$x'+y=1+e^t, \quad x(0)=0,\ x'(0)=2,\ y(0)=0,\ y'(0)=0.$$

$$\begin{cases} x'+y+z=2e^t+3, \\ y'+x+z=2, \\ z'+x+y=2e^t+1, \end{cases} \quad x(0)=1,\ y(0)=3,\ z(0)=1.$$

13.2.4. Ответы

1. $x(t)=2e^t+e^{-5t}$. 2. $x(t)=-\frac{5}{4}+\frac{1}{4}e^{4t}-t$. 3. $x(t)=\frac{1}{8}(3e^t-e^{-3t}-2e^{-t})$.
4. $x(t)=e^t$, $y(t)=-e^t$.

Б

5. $x(t)=e^t$, $y(t)=e^t$. 6. $x(t)=-1+e^t+te^t$, $y(t)=1-e^t-te^t$.
7. $x(t)=e^t$, $y(t)=2e^t+1$, $z(t)=2-e^t$.

Глава 14. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

14.1. Скалярное и векторное поля. Дивергенция и ротор векторного поля

14.1.1. Основные теоретические сведения

Полем называется область V пространства, в каждой точке которой определено значение некоторой величины.

Если в каждой точке M этой области задана скалярная величина $U = U\{M)$, то говорят, что в этой области задано **скалярное поле.**

Если в каждой точке M области V задана векторная величина $a = a(M)$, то говорят, что в этой области задано **векторное поле.**

Примеры скалярных полей: поля температуры (газа, жидкости, тела, ...), атмосферного давления, плотности (массы, воздуха) и т. д.

Примерами векторных полей являются поле силы тяжести, поле скоростей частиц движущейся жидкости и т д.

Если функция $U\{M)$ (a(M)) не зависит от времени, то скалярное (векторное) поле называется **стационарным** (установившимся).

В дальнейшем рассматриваются только стационарные поля.

Функцию $U = U(M)$ независимо от ее физического смысла называют **потенциалом скалярного поля.** «'• *"

Если V - область трехмерного пространства, то скалярное поле U можно рассматривать как функцию трех переменных x, y, z (координат точки M): $U - U(x;y] z)$.

Если скалярная функция $U(M)$ зависит только от двух переменных, например от x и y, то скалярное поле $U = U(x; y)$ называется плоским.

Вектор $a = a(M)$, определяющий векторное поле, можно рассматривать как векторную функцию трех аргументов x, y, я:

$$a = й(x; y; z) = P(x; y; z)i + Q(x; y; z)j + R(x; y;z)k. \qquad (14.1)$$

Векторное поле называется **однородным,** если $a(M)$ постоянный вектор, т.е. P,Q,R - постоянные величины.

В дальнешем будем предполагать, что функции $U(x;y,z)$, $P(x;y;z)$, $Q\{r.y;z)$, $R(x;y;z)$ непрерывны вместе со своими частыми производными.

Основными характеристиками скалярного поля являются поверхности (линии) уровня, производная по направлению, градиент (рассмотрены в 3-й части пособия).

Простейшей геометрической характеристикой векторного поля $a(M)$ являются векторные линии.

Векторной линией поля a называется линия, касательная к которой в каждой ее точке M имеет направление соответствующего ей вектора $a(M)$.

Например, в поле скоростей текущей жидкости векторными будут линии, по которым движутся частицы жидкости (линии тока); для магнитного поля векторными (силовыми) будут линии, выходящие из северного полюса и оканчивающиеся в южном.

Совокупность всех векторных линий поля, проходящих через некоторую замкнутую кривую, называется **векторной трубкой.**

Векторные линии поля $a(M) = P(x,y\backslash z)i + Q(x; y;z)j + R(x; y; z)k$ описываются системой уравнений

$$\frac{dx}{P\{x;y;z)} = \frac{dy}{Q\{x;y;z)} = \frac{dz}{R(x-y;z)} \qquad \text{Q424}$$

Дивергенцией векторного поля $a(M) = P(x; y;z)i + Q(x;y;z)j + R(x; y, z)k$ в точке M называется скалярная величина

$$diva(M)= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{8Q}{\partial y} + \frac{8R}{dz}. \qquad (14.3)$$

Если условно считать, что $a(M)$ есть поле скоростей фиктивного стационарного потока несжимаемой жидкости, то можно сказать, что при $diva(M^0) >$ О точка M^0 представляет собой источник, окуда жидкость вытекает; при $diva(M^0) < 0$ точка M^0 есть сток, поглощающий жидкость. Величина $diva(M^0)$ характеризует мощность источника или стока в точке M^0.

Векторное поле, в каждой точке которого дивергенция равна нулю, называется соленоидальным.

Ротором (вихрем) векторного поля $a(M) = P(x;y;z)i + 0(x;y;z)j + R(x;y;z)k$ называется вектор, обозначаемый $rota(M)$ и определяемый формулой

$$rot\,a(M) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)i + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)k \qquad (14.4)$$

Формулу (14.4) можно записать с помощью символического определителя (удобно для запоминания):

$$rot\,a(M) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \qquad (14.5)$$

Определитель (14.5) раскрывается по элементам первой строки, при этом операции умножения элементов второй строки на элементы третьей строки понимаются как операции дифференцирования, например, $\frac{\partial}{\partial x} \cdot Q = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Векторное поле, во всех точках которого ротор равен нулю, называется **потенциальным** (или безвихревым).

Для потенциального поля $a(M)$ существует такая скалярная функция $u = u(M)$, что $a(M) = grad\,u(M)$. При этом функция $u = u(M)$ называется потенциалом поля $a(M)$.

Векторное поле, являющееся одновременно и соленоидальным, и потенциальным, называется **гармоническим.**

14.1.2. Примеры решения задач

Пример 1А. Найти дивергенцию векторного поля.
1) $a = r = xi + yj + zk$; 2) $a = xy^2 i + x^2 yj + z^3 k$; 3) градиента функции $u = xy^2 z^3$ в точке $M_1(1; -1; -3)$.

Решение. 1) по условию $P(x;y;z) = x$, $Q(x;y;z) = y$, $R(x;y;z) = z$. Находим частные производные $\frac{\partial P}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial Q}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial R}{\partial z} = 1$.

По формуле (14.3) $div\,a(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 3$, т. е. каждая точка поля радиуса-вектора r является источником постоянной мощности:

2) $P(x;y;z) = xy^2$, $Q(x;y;z) = x^2 y$, $R(x;y;z) = z^3$. Находим частные производные $\frac{\partial P}{\partial x} = y^2$, $\frac{\partial Q}{\partial y} = x^2$, $\frac{\partial R}{\partial z} = 3z^2$. По формуле (14.3) $div\,a = y^2 + x^2 + 3z^2$. Поскольку во всех точках M векторного поля $a(M)$, кроме точки $O(0;0;0)$, $div\,a(M) > 0$, то все точки являются источниками, а в точке $O(0;0;0)$ нет ни источника, ни стока;

3) Найдем $grad\,u$. Так как $\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 z^3$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 2xyz^3$, $\frac{\partial u}{\partial z} = 3xy^2 z^2$, то $a(M) = \mathbf{grad}\,u(M) = y^2 z^3 i + 2xyz^3 j + 3xy^2 z^2 k$. Получили, что $P(x;y;z) = y^2 z^3$, $Q(x;y;z) = 2xyz^3$, $R(x;y;z) = 3xy^2 z^2$. Отсюда $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial Q}{\partial y} = 2xz^3$, $\frac{\partial R}{\partial z} = 6xy^2 z$. По формуле (14.3) $div\,a = 2xz^3 + 6xy^2 z$. В точке $M_1(1;-1;-3)$ $div\,a(M_1) = (2xz^3 + 6xy^2 z)|_{M_1} = 2 \cdot 1 \cdot (-3)^3 + 6 \cdot 1 \cdot (-1)^2 \cdot (-3) = -72$. Так как $div\,a(M_1) < 0$, то точка M_1 является стоком.

Пример 2А. Найти ротор векторного поля $a(M) = xzi - yz^2 j + xyk$ в точке $M_1(0; -2; 4)$.

Решение. По условию $P(x;y;z) = xz$, $Q(x;y;z) = -yz^2$, $R(x;y;z) = xy$. Для нахождения ротора векторного поля применим формулу (14.5):

$$rot\,a(M) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & -yz^2 & xy \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(xy)}{\partial y} - \frac{\partial(-yz^2)}{\partial z}\right)i - \left(\frac{\partial(xy)}{\partial x} - \frac{\partial(xz)}{\partial z}\right)j + \left(\frac{\partial(-yz^2)}{\partial x} - \frac{\partial(xz)}{\partial y}\right)k = (x + 2yz)i - (y - x)j + (0 - 0)k = (x + 2yz)i + (x - y)j.$$

В данной точке $rot\,a(M_1) = (x + 2yz)|_{M_1} i + (x - y)|_{M_1} j = -16i + 2j$.

Пример 3А. Проверить, будет ли векторное поле $a(M) = (2JC + 4yz)i + (2y + 4xz)j + (2z + 4xy)\kappa$ соленоидзльным и потенциальным. В случае потенциальности поля найти его потенциал.

Решение. Для проверки соленоидальности векторного поля $a(M)$ найдем его дивергенцию по формуле (14.3). Учитывая, что $P\{x;y\backslash z) = 2x + 4yz$, $0(x;y;z) = 2y + 4xz$, $R(x;y;z) = 2z+ 4xy$ и $\frac{—}{\partial x} = 2$, $\frac{—}{\partial y} = 2$, $\frac{—}{dz} = 2$, получаем $diva(M) = 2 + 2 + 2 = 6$. Так как $diva(M^x)\hat{}0$, то заданное векторное поле не является соленоидальным.

Для проверки потенциальности векторного поля $a(M)$ найдем ротор по формуле (14.4). Имеем $\frac{8R}{\partial y} = \frac{80}{dz} = 4x$, $\frac{8P}{dz} = \frac{8R}{\partial x} = 4y$, $\frac{\sim}{\partial x} = \frac{—}{\partial y} = 4z$. Тогда $ruta(M) = (4x - 4x)i + (4y - 4y)j + (4z - 4z)\& = 0$. Так как $rota(M) = 0$, то заданное векторное поле является потенциальным. Найдем его потенциал, т. е. такую функцию $u = u(x;y;z)$, что $a(M) = \mathrm{gradu}(M)$ или $\frac{—}{\partial x} i + \frac{\hat{}\hat{}}{\partial y} j + \frac{—}{dz} k = (2'x + 4yz)i + (2y + 4xz)j + {}$ $+ (2z + 4xy)\kappa$. Отсюда следует, что

$$\frac{—}{\partial x} \pm 2x+*yz, \tag{14.6}$$

$$\frac{—}{\partial y} - 2y + 4*z, \tag{14.7}$$

$$\frac{—}{dz} = 2z + 4xy. \tag{14.8}$$

Интегрируя (14.6) по x, получим

$$u = j(2x + 4yz)dx + \backslash\backslash i(y;z) = x^2 + 4xyz + \backslash y(y;z) \tag{14.9}$$

(здесь роль постоянной интегрирования играет любая функция $\backslash\backslash f(y;z)$, так как ее частная производная по x равна 0).

Дифференцируем полученную функцию u по переменной y и, используя равенство (14.7), имеем $\frac{—}{\partial y} ix^2 + 4xyz + \backslash\backslash>(y;x))=2y + 4xz$, $4xz + \frac{}{\partial y} = 2y + 4xz$, $\frac{\hat{}\hat{}Zi\hat{}l}{\partial y} = 2y$. Интегрируем по y, получаем $ц/(y;г) =]2ydy + <p(z) = y^2 + \phi(г)$. Найденное $\phi(y;г)$ подставим в (14.9). Тогда

$$u = x^2 + y^2 + 4xyz + y(z). \tag{14.10}$$

Дифференцируем найденную функцию u по переменной $г$ и, используя равенство (14.8), получим $— (x^2 + y^2 + 4xyz + <p(z)) =$

$= 2z + 4xy4xy + \frac{\hat{}\hat{}}{3z} = 2z + 4xy$, $\frac{\hat{}\hat{}}{\&} = 2z$, $\phi(г) = г^2 + C$. Подставим $\phi(г) = г^2 + C$ в равенство (14.10). $u = x^2+y^2+z^2+4xyz + C$ - потенциал заданного в условии векторного поля.

14.1.3. Задачи для самостоятельного решения

А

Найти дивергенцию в любой точке векторного поля.

1. $a\{M) = xyi + yzj + xzk$; 2. $a(M) = x^2 i + xj + xzk$.

Найти ротор в любой точке векторного поля.

3. $a(M)\text{-}xi\text{-}z^2 j + y^2\kappa$; 4. $a(M) = yzi + xzj + xy£$.

5. Найти модуль ротора векторного поля $a(M) = (x\text{-}z^2)i +$ $л\text{-}yzj\ л\text{-}\ (x^2 + y^2)\kappa$ в точке $M,(1;2,-1)$.

6. Доказать, что векторное поле $a\{M) = \{-y + 2)i + \{x-3)j$ является соленоидальным.

Доказать, что векторное поле является потенциальным, найти его потенциал.

7. $a(M) = (z\text{-}2x)'i + (z\text{-}2y)j + (x + y)k$. 8. $a(M) = x^2 'i + y^2 \sim j + z^2 k$.

Б

9. Найти $divr[ra)$, где $г = xi + yj + zk$, $a = i + j + k$.

10. Проверить, что векторное поле $\overline{a}(M) = \frac{\overline{r}}{r}$, где $\overline{r} = xi + yj + zk$ является гармоническим. Найти потенциал этого поля.

14.1.4. Ответы

А

1. $x + y + z$. **2.** 3JT.**3.** $2(y + z)i$.**4.** $0.5.2$.

7. $u(x;y;z) = xz + yz - x^2 - y^2 + C$. **8.** $u(x;y;z) = $ ^$(x^3 + y^3 + z^3) + C$.

Б

9. $4(ra)$. **10.** $u(x,y,z) =$ —-= L + C .

ЛИТЕРАТУРА

1. Письменный, Д. Конспект лекций по высшей математике. В 3 ч. Ч. 2 / Д. Письменный. - М.: Рольф, 2001.
2. Гусак, А. А. Высшая математика: в 2 т. / А. А. Гусак. - Минск: ТетраСистемс, 2001. - 2 т.
3. Герасимович, А. И. Математический анализ: справ, пособие: в 2 ч. / А. И. Герасимович, Н. А. Рысюк. - Минск: Выш. шк., 1989. - 2 ч.
4. Сборник задач по высшей математике / К. Н. Лунгу [и др.].; под ред. С. П. Федина. - М.: Айрис-пресс, 2004.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие

В 4-х частях
Часть 4

Составители: **Горбатович** Жанна Николаевна
Семенкова Александра Сергеевна
Шинкевич Елена Алексеевна

Редактор Р. М. Рябая

Подписано в печать 28.05.2008. Формат 60x84 j ^ . .
Бумага офсетная. Гарнитура Тайме. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 3,3 Уч.-изд. л. 3,4.
Тираж 800 экз. Заказ <24«2 .

Учреждение образования
«Белорусский государственный технологический университет».
220006. Минск, Свердлова, 13а.
ЛИ № 02330/0133255 от 30.04.2004.

Отпечатано в лаборатории полиграфии учреждения образования
«Белорусский государственный технологический университет».
220006. Минск, Свердлова, 13.
ЛП № 02330/0056739 от 22.01.2004.