УДК 517.9

Студ. Я.С. Костюкевич, И.А. Метеж
Науч. рук. доц. А.М. Волк
(кафедра высшей математики, БГТУ)

ОГИБАЮЩАЯ СЕМЕЙСТВА ПЛОСКИХ КРИВЫХ

Определение. *Огибающей* однопараметрического семейства плоских кривых называется линия плоскости, которая в каждой своей точке касается какой-либо линии этого семейства.

Если семейство кривых задано уравнением $F(x,y,a)=0$, то исключая параметр *a* из системы уравнений

$$\begin{cases} F(x,y,a)=0, \\ F'_a(x,y,a)=0 \end{cases}$$

получим огибающую данного семейства [1].

Задача. Концы отрезка длиной а скользят по осям декартовой системы координат. Найти огибающую полученного семейства отрезков.

Решим данную задачу обратным (более наглядным) методом.

Рассмотрим астроиду $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

Найдем длину отрезка касательной между осями координат.

Пусть (X, Y) – точка на касательной, а (x, y) – точка а астроиде.

Уравнение касательной $F_x(X-x)+F_Y(Y-y)=0$ для астроиды будет $x^{-\frac{1}{3}}(X-x)+y^{-\frac{1}{3}}(Y-y)=0$.

Отсюда $\dfrac{X}{x^{\frac{1}{3}}}+\dfrac{Y}{y^{\frac{1}{3}}}=x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{2}{3}}$, $\dfrac{X}{x^{\frac{1}{3}}}+\dfrac{Y}{y^{\frac{1}{3}}}=a^{\frac{2}{3}}$.

Получаем уравнение прямой линии в отрезках: $\dfrac{X}{a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}}+\dfrac{Y}{a^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}}=1$.

Обозначим через l длину отрезка между осями координат и по теореме Пифагора вычисляем:

$$l^2 = a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{4}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right) = a^{\frac{6}{3}} = a^2.$$

Значит, астроида есть огибающая семейства рассмотренных отрезков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. М. : Физматлит, 2001. 2 т. 616 с.