МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ БССР

Белорусский технологический институт имени С.М.Кирова

Кафедра лесоустройства и таксации

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

по курсу

"ВАРИАЦИОННАЯ СТАТИСТИКА"

для студентов-заочников специальности 1512-
"Лесное хозяйство"

Минск 1978

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ БССР
Белорусский технологический институт имени С.М.Кирова
Кафедра лесоустройства и таксации

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ПО КУРСУ "ВАРИАЦИОННАЯ СТАТИСТИКА"

для студентов-заочников
специальности 1512 - "Лесное хозяйство"

Минск 1978

УДК 519

Рассмотрено и рекомендовано к изданию методической комиссией лесохозяйственного факультета

Составитель О.А.Трулль, доцент
Научный редактор А.Ф.Киселев, доцент.
Рецензенты: кафедра лесной таксации и лесоустройства АЛТИ: О.А.Неволин, доцент - АЛТИ.

Т $\frac{40507-081}{М\ 339-78}$ 6-78

ВВЕДЕНИЕ

Математическая статистика является разделом математики, в котором изучаются свойства распределений случайных величин, представленных в виде результатов наблюдений одного или нескольких взаимосвязанных признаков. В области лесного хозяйства это, как правило, биологические совокупности разной продуктивности, разных типов леса, где условия местопроизрастания разные-факторов среды много. Все эти факторы по разному влияют на формирование насаждений и создают вариацию по различным его признакам. Все эти вариации, изменчивости являются результатом влияния случайных факторов. Тем не менее все биологические совокупности являются статистическими совокупностями, в которых проявляется та или иная закономерность, которая может быть выявлена и использована в интересах изучения структуры этих совокупностей и использования ее в лесном хозяйстве. С ростом вычислительной техники возрастает значение математической статистики непосредственно в практике не только в лесохозяйственном производстве, но и во всем народном хозяйстве нашей страны.

Данное пособие имеет целью оказать помощь в освоении курса математической статистики (вариационной статистики) и выполнении лабораторно-контрольных работ студентами-заочниками лесохозяйственного факультета.

ПРОГРАММА КУРСА "ВАРИАЦИОННАЯ СТАТИСТИКА"

I. Основы теории вероятностей

Испытания. Случайные события. Невозможные и достоверные события. Несовместимые события. Противоположные события. Понятие вероятности события. Теорема сложения вероятностей. Независимые и зависимые события. Условные вероятности. Теорема умножения вероятностей. Формула полной вероятности.

Случайные величины и их связь со случайными событиями. Дискретные и непрерывные случайные величины. Законы распределения случайной величины (функции распределения). Числовые характеристики случайной величины и их вероятностный смысл. Математическое ожидание, мода и медиана. Дисперсия, среднее квадратическое (основное) отклонение. Некоторые наиболее часто встречающиеся функции распределения. Равномерное распределение. Биномиальное распределение. Распределение Пуассона. Нормальное распределение и его обобщения.

Закон больших чисел и его значение для изучения случайных явлений. Теорема Бернулли. Интегральная теорема Лапласа и ее применение к оценке относительных частот. Применение теории вероятностей и теории ошибок к обработке результатов наблюдений.

2. Распределение случайной величины

Связь между математической статистикой и теорией вероятностей. Применение методов математической статистики в лесной таксации и лесоводстве.

Наблюдения. Производство наблюдений; признаки, отмечаемые при наблюдениях. Число наблюдений.

Общая (генеральная) совокупность. Частичная совокупность (выборка, проба). Число наблюдений и надежность статистических выводов (использование закона больших чисел). Случайные числа и их применение для определения состава выборки.

Составление рядов распределения (вариационных рядов). Многоугольники распределения: ступенчатый многоугольник и многоугольник частот.

Моменты и их применение к определению численных характеристик случайной величины. Начальные, центральные и основные моменты. Вычисление моментов. Использование способа сумм.

Статистики - числовые характеристики случайной величины. Важнейшие статистики: среднее значение, основное отклонение, мера крутости. Вычисление статистик с помощью моментов.

Использование нормального распределения и его обобщений в математической статистике. Расчет теоретических частот нормального распределения и распределения типа А.

3. Методы оценки

Оценка параметров. Основные ошибки среднего значения, основного отклонения, меры косости и меры крутости. Критерии согласия между наблюденными и вычисленными рядами распределения. Критерии согласия Пирсона и Колмогорова.

Оценка дисперсии при малом числе наблюдений. Нулевая гипотеза. Уровни значимости.

Распределение Стьюдента и его использование при оценке доверительных границ для среднего значения и расхождения между средними значениями.

Распределение Фишера и его применение при оценке дисперсии.

Элементы дисперсионного анализа.

Контрольные карты и их применение в производственной практике.

4. Связь между случайными величинами

Исследование связи между случайными величинами. Таблица распределения и ее составление. Вычисление смешанных моментов по способу сумм.

Статистики связи. Коэффициент корреляции и корреляционное отношение. Линейная и нелинейная корреляции. Вычисление коэффициента корреляции. Основная ошибка коэффициента корреляции.

Метод наименьших квадратов и его использование при установлении корреляционной связи. Корреляционные уравнения параболического, логарифмического и других типов. Применение способа сумм.

Литература

Основная литература

I. Митропольский А.К. Техника статистических вычислений. М.,Физматгиз,1961.

2. Трулль О.А. Математическая статистика в лесном хозяйстве, Минск,"Вышэйшая школа", 1966.

4. Свалов Н.Н. Вариационная статистика, М.,"Лесная промышленность", 1977.

Дополнительная литература

I. Гусев И.И. Вариационная статистика. Архангельск, изд-во АЛТИ,1970.

2. Никитин К.Е. Методическое пособие к выполнению контрольных работ по вариационной статистике.Киев, изд-во Украинской сельскохозяйственной академии, 1961.

3. Дворецкий М.Л. Пособие по вариационной статистике. М., "Лесная промышленность",1971.

4. Захаров В.К., Трулль О.А.,Мирошников В.С.,Ермаков В.Е. Лесотаксационный справочник. Минск, Госиздат, 1959.

5. Захаров В.К.,Трулль О.А.,Мирошников В.С., Ермаков В.Е. Лесотаксационный справочник. Минск, "Вышэйшая школа",1966.

6. Рачицкий П.Ф. Биологическая статистика. Минск,"Вышэйшая школа", 1964 и 1977.

I. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ И ПОДГОТОВКЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО КУРСА

I.I. Указания о прохождении теоретической и практической подготовки в усвоении курса

В данном пособии предлагается следующая последовательность прохождения данной дисциплины на втором курсе.

I. Лекционный курс - 6-I0 часов - установочные лекции.

2. Практические занятия - I0 часов - осенний семестр.

3. Зачетная сессия - весенний семестр.

Для второго курса предусматривается 20 часов очных занятий в различные периоды, что дает возможность более детально ознакомиться студенту-заочнику с теоретическим курсом и выполнить одну практическую работу за период между двумя семестрами. После установочных лекций студент готовит теоретический курс, в декабре месяце он получает на кафедре индивидуальное задание по номеру варианта; в течении I0 часов студент выполняет только часть своей контрольной работы по очной системе и оканчивает всю работу в межсеместровый период. Контрольная работа, выполненная по программе заочного отделения, должна быть прислана на проверку в период до весеннего (IУ) семестра. Окончательная отчетность по данной дисциплине оформляется зачетом: устным или письменным. К зачету допускаются только те студенты, которые успешно выполнили контрольное задание и получили по нему зачет. Задание должно быть аккуратно оформлено, графические материалы выполняются на миллиметровой бумаге тушью.

При выполнении контрольной работы необходимо пользоваться учебными и методическими пособиями, без которых невозможно выполнить данную работу по выданному преподавателем варианту.

Ряд вопросов будет освещен в данном методическом пособии с учетом выполнения практических работ, однако этого недостаточно для теоретического овладения курсом. Для более полной подготовки вопросов теории различных методов вариационной статистики необходимо проработать то или иное учебное пособие, так как стабильного учебника нет.

При проработке курса основное внимание следует уделить вопросам, приведенным в программе.

I.2. Порядок составления частичной статистической совокупности

Для выполнения контрольной работы студент должен самостоятельно составить частичную статистическую совокупность в количестве двухсот стволов на базе общей статистической совокупности соотношения диаметров (Д) и высот (Н) в спелых сосновых насаждениях по варианту, выданному на кафедре в период осенней сессии. Каждый студент выполняет работу по отдельному варианту, например, 2-4-II-I4. Это означает, что студенту следует обратиться к общей статистической совокупности(Приложение I) и по ее форме и подобию выписать 200 парных значений диаметров (Д) и высот (Н) отдельных сосновых стволов. Значение диаметров даны на высоте груди - на I,3м, т.е. это замеры, которые производятся в лесохозяйственной практике при отводе лесосек или других видов работ.

Вариант 2-4-II-I4 означает, что надо выписать столбец 2, в котором пятьдесят стволов с данными Д и Н, выписать далее 4, II, I4 столбцы, в которых тоже по пятьдесят стволов соотношений Д и Н. Так как общая статистическая совокупность по своей структуре состоит из отдельных столбцов, в каждом по 50 стволов, то выписанные четыре столба по варианту 2-4-II-I4 составят в сумме 200 стволов сосны с таким же количеством диаметров (Д) и высот (Н), которые и будут составлять частичную статистическую совокупность. Данная совокупность является основным исходным материалом, является как бы пробной площадью, которая подлежит статистическому анализу в определенной последовательности с выявлением всех тех свойств и закономерностей, которые присущи сосновым насаждениям. Необходимо помнить, что общая статистическая совокупность является результатом замеров фактически срубленных стволов в сосновых насаждениях, а ее часть - выборка - проба имеет достаточно большое число наблюдений и отображает фактические свойства, присущие этим насаждениям с определенной доверительной вероятностью. При составлении частичной статистической совокупности, ее группировок рядов распределений, таблиц распределения, графического изображения и получения статистических показателей - необходимо делать краткие описания о статистическом их смысле. При проведении статистического анализа предусматривается анализ одной статистической величины и закономерностей ее распределения, а также анализ двух зависимых величин, а по этому следует выполнить все работы как по ряду распределения диаметров, так и по ряду распределения высот, т.е. веоти анализ по двум признакам.

2. СВОДКА ДАННЫХ НАБЛЮДЕНИЯ

В контрольной работе первоначально приводится частичная статистическая совокупность соотношений диаметров и высот в спелых сосновых насаждениях. В дальнейшем требуется преобразовать эту совокупность в виде рядов распределения и таблицы распределения. Эти два вида работ по составлению рядов распределения и таблицы распределения относятся к подготовительным работам для установления статистических показателей одной случайной величины и изучения взаимосвязи между двумя случайными величинами (таблицы распределения). Эти вопросы рассматриваются и записываются в разных пунктах работы, но выполнение необходимо делать в следующей последовательности: I) составление статистических рядов (Д и Н) и 2) составление таблицы распределения этих двух зависимых признаков.

Это необходимо для получения контроля, когда итоги таблицы распределения по вертикали и горизонтали давали бы численности статистических рядов по диаметру и высоте.

Статистические ряды Д и Н должны согласоваться с итогами таблицы распределения, иначе возможны исходные ошибки и несогласованность статистических показателей.

2.I. Общая и частичная статистические совокупности

В состав общей статистической совокупности входят все измеренные единицы наблюдения. В состав частичной статистической совокупности входит только некоторая часть, обеспечивающая достаточно большое число наблюдений при заданной вероятности и соблюдении принципа случайной выборки.

Как правило, в результате измерения, учета мы имеем дело с частичными статистическими совокупностями, когда мы по части судим о целом. В данной работе выборочная или частичная статистическая совокупность представлена замером 200 стволов с фиксацией их диаметров и высот в виде табл. 2.I.

Таблица 2.I.

Частичная статистическая совокупность соотношений диаметров и высот в спелых сосновых насаждениях

Вариант 2-4-I0-II

Номера столбцов							
2				4			
Д,см	Н,м	Д,см	Н,м	Д,см	Н,м	Д,см	Н,м
20,I	22,7	3I,0	23,5	46,6	26,4	29,6	27,I
29,6	2I,8	29,6	22,9	2I,6	20,I	29,7	24,6
I8,3	I9,9	27,5	23,8	34,0	27,0	26,6	25,5
30,5	24,2	32,0	26,5	30,6	23,I	25,5	23,7
36,5	26,7	42,0	25,6	44,0	27,3	23,I	2I,6
27,3	24,8	3I,5	23,5	38,I	24,5	29,5	23,5
38,5	27,7	27,I	22,0	40,5	27,0	22,6	22,2
27,6	26,4	26,7	24,3	26,I	22,6	42,0	26,6
3I,6	25,8	29,5	23,6	24,2	22,I	30,6	25,6
45,I	28,8	3I,0	25,4	3I,6	27,3	4I,6	25,5
46,9	29,0	32,0	24,5	46,6	24,6	23,0	I9,0
46,6	28,7	22,6	23,I	24,5	24,6	44,0	28,3
20,0	2I,I	32,6	25,8	39,0	27,6	2I,5	22,2
27,0	22,4	45,5	28,3	28,0	22,2	36,5	27,6
36,4	24,7	23,6	22,2	36,0	27,0	26,0	2I,6
20,5	22,8	25,0	23,7	33,3	25,0	28,0	23,5
32,3	25,6	33,0	26,4	24,6	23,6	28,4	22,7
29,5	23,6	35,4	24,9	39,6	26,6	36,5	26,0
26,0	23,7	36,3	25,4	33,6	26,3	40,5	25,5
28,2	26,0	30,0	24,5	29,5	24,6	40,6	26,5
22,5	22,7	3I,5	24,6	32,0	24,3	I7,5	I9,6
34,3	27,4	39,6	26,6	39,3	26,3	29,6	2I,5
30,6	23,7	23,3	22,6	4I,0	27,6	36,5	26,0
24,I	23,5	4I,0	26,0	37,6	27,6	35,I	24,6
42,6	26,7	34,5	26,6	36,0	24,4	23,I	22,0
$\sum Д$	$\sum Н$	$\sum Д$.	$\sum Н$	$\sum Д$	$\sum Н$	$\sum Д$	$\sum Н$

Продолжение табл. 2.I.

Номера столбцов							
I0				II			
Д,см	Н,м	Д,см	Н,м	Д,см	Н,м	Д,см	Н,м
46,6	27,7	33,5	25,6	36,4	26,6	27,0	23,0
28,0	25,3	36,5	25,0	27,5	23,4	34,5	24,6
32,6	25,7	3I,6	25,5	30,6	23,6	25,0	23,7
28,6	26,6	4I,0	27,0	29,0	23,0	32,0	24,0
22,6	24,0	3I,0	24,8	20,4	20,3	22,6	22,7
35,6	25,7	37,0	24,0	38,0	27,5	33,5	25,6
33,5	25,5	26,6	29,0	24,6	27,6	26,4	29,6
43,5	26,0	27,0	23,6	I9,9	I9,4	36,6	24,4
30,3	24,4	2I,9	20,I	32,6	25,9	24,6	22,7
24,0	22,6	38,5	26,5	27,5	26,7	22,0	22,7
35,6	25,6	36,5	26,5	34,6	25,6	38,4	25,5
28,I	24,3	3I,0	25,0	34,6	26,4	26,5	24,0
24,4	24,4	30,5	26,0	30,6	23,9	35,0	24,9
30,5	23,6	5I,0	27,7	20,6	20,4	5I,8	24,8
29,6	22,7	30,7	23,0	22,6	24,0	33,0	26,4
28,5	2I,6	24,5	25,7	39,0	27,9	30,0	24,4
32,6	26,4	38,0	25,6	20,6	20,4	22,5	2I,7
26,0	24,7	36,6	25,7	33,4	25,0	26,7	25,9
22,2	2I,6	23,0	22,7	26,0	22,9	30,5	28,9
25,7	23,3	22,7	22,5	32,4	24,9	32,7	26,0
I7,7	I8,8	29,5	24,4	22,7	24,0	I8,6	I7,5
32,I	25,3	34,5	25,5	34,8	25,4	30,6	23,6
37,2	26,2	23,8	24,4	42,0	25,7	42,6	26,6
38,5	26,7	49,5	27,7	30,6	23,8	22,5	22,0
23,6	20,2	32,6	25,9	I8,6	I7,5	24,0	22,0
Σ Д	Σ Н	Σ Д	Σ Н	Σ Д	Σ Н	Σ Д	Σ Н

Образец табл.2.I. заполняется так, чтобы было 200 диаметров и 200 высот парной записи; вычисляют общие для всех столбцов $\Sigma Д = \sum_{1}^{II} v_Д$ и $\Sigma Н = \sum_{1}^{II} v_Н$, а также среднеарифметические значения диаметра и высоты всего насаждения.

$$Д_{ср} = M_Д = \sum_{1}^{200} v_Д : 200 \qquad Н_{ср} = M_Н = \sum_{1}^{200} v_Н : 200$$

3. СТАТИСТИЧЕСКИЕ РЯДЫ И ИХ ГРАФИЧЕСКИЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ

3.I. Порядок составления статистических рядов.

Частичные статистические совокупности, получаемые при учете единиц наблюдения, как правило, записываются в произвольной форме, последовательности. Для статистических расчетов запись необходимо систематизировать в виде определенной последовательности, с соблюдением строго определенных правил так, чтобы свойства, зафиксированные в статистической совокупности, не были искажены в статистических рядах и таблицах распределения. При большом числе наблюдений составление статистических рядов с равными интервалами применяется как при ручной обработке данных, так и при обработке их на ЭВМ. В последнем случае ввод данных может быть осуществлен с ленты в виде записи статистического ряда. Порядок составления статистических рядов один и тот же во всех случаях, однако, в зависимости от поставленных целей, к нему могут быть предъявлены различные требования. В целях правильности вычисления таких показателей как мера кососги (асимметрия), мера крутости (эксцесс) необходимо, чтобы среднеарифметическая величина (М) находилась в середине центрального интервала.

Основная последовательность преобразования частичной статистической совокупности случайных чисел в статистический ряд с равными интервалами следующая.

I. Необходимо иметь статистическую совокупность.

2. Отыскать среди всех ее численностей минимальное V_{min} и максимальное V_{max} значения признака.

3. Принять число интервалов (n) будущего статистического ряда с большим числом наблюдений, которое должно быть 12 ± 2.

4. Вычислить величину интервала (d) составляемого статистического ряда по формуле

$$d = \frac{V_{max} - V_{min}}{n}$$

и округлить ее до удобной четной величины после запятой.

В нашем примере, например, если d = 3,19 см, лучше принять 3,2 см.

5. Найти среднеарифметическую величину (М) рассматриваемого признака (по Д или Н) в соответствии с суммами табл.2.I.

6. Установить пределы центрального интервала, где М стоя-

ло бы в его центре.

$$M + \frac{d}{2} = V_{i\,max} \qquad M - \frac{d}{2} = V_{i\,min}$$

Пределы центрального интервала будут от $V_{i\,max}$ до $V_{i\,min}$ например, M = 30,2 см, а пределы центрального интервала равны 28,6-3I,8.

7. Выписать все интервалы и их пределы от центрального интервала в сторону уменьшения и в сторону увеличения, рассматриваемого признака.

8. Вычислить средние значения признака V_i в пределах каждого интервала как среднеарифметическую величину предельных значений интервала.

9. Произвести разноску численностей (точками по системе конверта) частичной статистической совокупности по интервалам статистического ряда.

I0. Просуммировать все численности (точки) по всем интервалам и проверить их общую сумму - 200.

II. Выписать отдельно статистический ряд рассматриваемого признака по форме:

Среднее значение интервала	V_1	V_2	V_3	...	V_n	Итого
Численность(частота)интервала	n_1	n_2	n_3	...	n_n	200

Для выполнения 7, 8, 9, I0 пунктов удобно применить табл. 3.I в виде следующей формы записи.

Т а б л и ц а 3.I.

Распределение численностей по диаметру

Пределы интервалов	Средние значения интервалов	Разноска численностей	Численность интервалов
I	2	3	4
I5,8-	I7,4	⁖	3
I9,0-	20,6	⊠ ·	II
22,2-	23,8	⊠ ⊠ ⊠	29
25,4-	27,0	⊠ ⊠ ⊠ ⊠ :	42
28,6-	30,2	⊠ ⊠ ⊠	30
3I,8-	33,4	⊠ ⊠ ⁙	25
35,0-	36,6	⊠ ⊠ ⁙	25
38,2-	39,8	⊠ ⁖	I3
4I,4-	43,0	⊠ :	I2

Продолжение табл. 3.I.

I	2	3	4
44,6-	46,2		2
47,8-	49,4		5
5I,0-	52,6		I
54,2-	55,8		2
Итого	—	—	200

Составляются два статистических ряда а) по диаметру и б) по высоте.

Пример записи статистического ряда по Д.

Статистический ряд по диаметру

V_i	17,4	20,6	23,8	27,0	30,2	33,4	36,6	39,8	43,0	46,2	49,4	52,6	55,8	Σ
n_i	3	II	29	42	30	25	25	I3	I2	2	5	I	2	200

В табл. 3.I пределы интервалов могут быть записаны в полной форме: I5,8-I9,0; I9,0-22,2; 22,2-25,4; 25,4-28,6 и т.д. и в сокращенной форме, когда пишется только начальное значение интервала: I5,8-; I9,0-; 22,2-; 25,4-; и т.д.
При сокращенной, более удобной форме записи не следует забывать писать черточку, означающую что это интервал.

3.2. Графическое изображение статистических рядов распределения

Графическое изображение статистических рядов распределения служит целям наглядности изучаемых закономерностей. Существуют различные способы изображения тех или иных признаков: круговые диаграммы, столбчатые диаграммы, картограммы, фигурные диаграммы, гистограммы, полигоны распределения и другие способы изображения наглядности.

В математической статистике чаще всего встречаются гистограммы распределения и полигоны распределения.

Гистограммы распределения выражаются в виде ступенчатых многоугольников численностей (частот), а полигоны распределения в виде замкнутого полигона прямыми линиями по вершинам ординат – численностей

Рис.I.Гистограмма распределения численностей статистического ряда диаметров

Статистические ряды почти всегда графически выражаются этими последними двумя способами. Если величины дискретные, то лучше графические построения делать как гистограмму распределения численностей, где по оси ординат откладываются численности-целые числа, а по оси x откладывается независимая переменная, т.е. тот признак, распределение которого мы исследуем. В нашей работе это диаметры или высоты. В целях изучения графического способа представления статистических рядов студент-заочник вычерчивает гистограмму и полигон распределения как по диаметру, так и по высоте. При этом необходимо соблюдать правило "золотого сечения", в соответствии с которым наглядность изображения достигается лучше, если соотношение осей координат будет $5:8=y:x$, т.е. пять частей откладывается по линии y и восемь частей по линии x. Это правило изображения не математическое, однако его нарушать нельзя. Основной график, его поле распределения должно находиться где-то в этих пределах. Если в ряду имеются численности очень малые, в крайних ступенях толщины (высоты), представляющие как бы вытянутый "шлейф", то основа графика должна укладываться в это соотношение без него. Необходимо помнить, что надписи по оси x в гистограмме делаются в центре каждого прямоугольника,

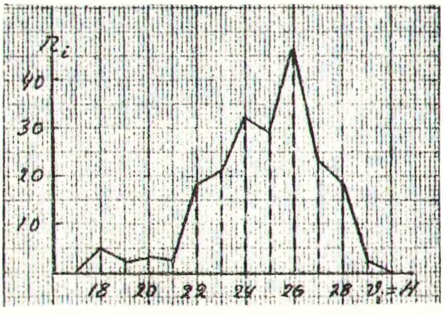

Рис.2.Полигон распределения численностей статистического ряда высот

а в полигоне последние значения ординат $-y$ соединяются с очередным интервалом, у которого численность равна нулю.
В последующих пунктах по вычислению корреляционных уравнений графики соотношений условных средних высот при том или ином диаметре $- v_i$ строятся на миллиметровой бумаге формата тетради тушью. Все графики размещаются в работе по ходу расположения текста.

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ МОМЕНТОВ СТАТИСТИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

В математической статистике существуют различные виды моментов. В данной работе рассматриваются обыкновенные моменты, которые, в свою очередь, подразделяются на начальные, центральные и основные моменты одной статистической величины. Для установления взаимосвязи между двумя признаками применяются смешанные моменты, иначе именуемые моментами произведения двух статистических величин. Вычисление начальных моментов производится на базе начальных отклонений $\alpha_0 = v_i - v_0$, нормированных в единицах интервала(d) статистического ряда. Результаты такого нормирования представляют собой так называемые рабочие отклонения $K_i = (v_i - v_0) : d$ - целые числа, удобные для расчетов и нахождения сумм $\sum n_i K_i^n$, для вычисления моментов и нахождения статистических показателей. Центральные моменты вычисляются на базе центральных отклонений, $\alpha_i = v_i - M$, нормированных тоже в единицах интервала (d), т.е. (v_i - M):d . Заметим, что центральные моменты чаще всего вычисляются через формулы связи между начальными и центральными моментами , когда среднеарифметическая величина неизвестна и когда статистический ряд составлен без учета местоположения средней величины.

Отличительной чертой основных моментов от предыдущих является то, что они вычисляются на базе центральных отклонений, нормированных в единицах среднеквадратического (основного) отклонения "σ", когда $\alpha_i : \sigma$. Для обычных статистических рядов, когда величина интервала (d) получается как результат расчета и принятия числа интервалов $n = 12 \pm 2$, это нормированное отклонение не представляет собой целых чисел, а поэтому основные моменты вычисляются через формулы связи между центральными и основными моментами. Моментом статистической величины, представленной в виде статистического ряда распределения, называется сумма произведений тех или иных степеней отклонений, отнесенная к общему числу наблюдений. Слово момент согласуется с аналогичным термином в физике, что означает произведение двух величин - силы на протяженность плеча. Моменты вычисляются в строгой последовательности, что упрощает расчеты и нахождение на их базе статистических показателей: а) вычисление начальных моментов одной величины; б) вычисление центральных моментов одной величины; в) вычисление основных моментов одной величины; г) вычисление смешанных моментов двух величин.

Как правило, в математической статистике вычисляют только четыре момента, т.е. четыре степени отклонений (формулы моментов приведены на стр. 16). В работе необходимо вычислить моменты как ряда диаметров, так и ряда высот.

4.I. Вычисление начальных моментов

Начальные моменты вычисляются по отношению к любому числу, расположенному (V_0) в середине статистического ряда. Число выбирается среди значений V_i , т.е. среди средних значений в пределах каждого интервала.

Не следует брать V_0 близко к краям статистического ряда, это усложняет расчеты и может привести к неверным результатам.

Начальные моменты вычисляются или по способу произведений, или по способу сумм. Каждый из способов имеет свои положительные и отрицательные значения. Так, например, метод суммы дает большее число контролей в промежуточных стадиях расчетов и часто считается предпочтительным по отношению к методу произведений. Данные способы могут применяться с вычислением или без вычисления контроля, в зависимости от поставленной задачи, обычного счета или с применением ЭВМ.

Научную обоснованность имеют те способы, которые дают возможность получения контроля данных.

4.I.I. Вычисление начальных моментов по способу произведений

Студенту необходимо вычислить четыре начальных момента с применением формул: $m_0 = 1$ - нулевой начальный момент; $m_1 = \sum n_i K_i / N$ - первый начальный момент; $m_2 = \sum n_i K_i^2 / N$ - второй начальный момент; $m_3 = \sum n_i K_i^3 / N$ - третий начальный момент; $m_4 = \sum n_i K_i^4 / N$ - четвертый начальный момент.

Нулевой момент не вычисляется, он всегда равен I. Остальные моменты вычисляются с точностью до 0,00I доли единицы. Для ряда распределения диаметров в работе находятся начальные моменты по способу произведений с применением или без применения контроля, в зависимости от задания преподавателя.

Т а б л и ц а 4.I.

Вычисление начальных моментов по способу произведений с применением контроля

Ряд диаметров

V_i	n_i	K_i	$n_i K_i$	$n_i K_i^2$	$n_i K_i^3$	$n_i K_i^4$	Контроль	
							K_i+1	$n_i(K_i+1)^4$
I	2	3	4	5	6	7	8	9
I7,4	3	-6	-I8	I08	-648	3888	-5	I875
20,6	II	-5	-55	275	-I375	6875	-4	28I6
23,8	29	-4	-I16	464	-I856	7424	-3	2349
27,0	42	-3	-I26	378	-II34	3402	-2	672
30,2	30	-2	- 60	I20	- 240	480	-I	30
33,4	25	-I	- 25	25	- 25	25	0	0
V_o=36,6	25	0	0	0	0	0	+I	25
39,8	I3	+I	+ I3	I3	+ I3	I3	+2	208
43,0	I2	+2	+ 24	48	+ 96	I92	+3	972
46,2	2	+3	+ 6	I8	+ 54	I62	+4	5I2
49,4	5	+4	+ 20	20	+ 320	I280	+5	3I25
52,6	I	+5	+ 5	25	+ I25	625	+6	I296
55,8	2	+6	+ I2	72	+ 432	2592	+7	4802
Итого	200	-	-320	I626	-4238	26958	Σ	=I8682

В табл. 4.I. V_o, т.е. произвольное начало, по отношению к которому будут вычислены начальные моменты, выбрано число V_o = 36,6 см. Нормированные отклонения в единицах интервала d = 3,2 являются рабочими отклонениями $K_i = (V_i - V_o) : d$ и представлены целыми числами. Эти значения K_i выписываются без расчета в последовательности со знаками, как это приведено в табл. 4.I. Статистический ряд выписывается, начиная с меньших значений варианты (V_i) и кончая крупными его значениями. Определяются суммы $\sum n_i K_i^a$ с учетом знаков, после чего по формулам начальных моментов (4.I.) применительно к способу произведений вычисляются начальные моменты ряда распределения диаметров.

Моменты по диаметру

$$m_0 = 1$$

$$m_1 = \frac{\sum n_i K_i}{N} = \frac{320}{200} = -1{,}600;$$

$$m_2 = \frac{\sum n_i K_i^2}{N} = \frac{1626}{200} = 8{,}130;$$

$$m_3 = \frac{\sum n_i K_i^3}{N} = \frac{4238}{200} = -21{,}190;$$

$$m_4 = \frac{\sum n_i K_i^4}{N} = \frac{26958}{200} = 134{,}790.$$

Для проведения контроля начальных моментов необходимо вычислить четвертый смещенный начальный момент по формуле

$$m_4^* = \frac{\sum n_i (K_i + 1)^4}{N} \qquad (4.2)$$

Смещение четвертого момента на один интервал кверху (см.табл.4.I) осуществляется прибавлением единицы к значениям K_i как это показана в формуле 4.2. Так, например, при выполнении контроля значения, $n_i (K_1 + 1)^4$ получаются для первой строки так: $n_i(K_1 + 1)^4 = 3 \cdot 5^4 = 3 \cdot 625 = 1875$.

Для нахождения четвертого смещенного момента находим $\sum n_i(K_i + 1)^4 = 18962$, а затем и сам этот момент (по формуле 4.2).

Например:

$$m_4^* = \frac{\sum n_i (K+1)^4}{N} = \frac{18682}{200} = 93{,}41.$$

Сущность контроля заключается в том, что четвертый смещенный начальный момент равен многочлену, куда входят все вычисленные контролируемые начальные моменты:

$$m_4^{**} = m_0 + 4m_1 + 6m_2 + 4m_3 + m_4. \quad (4.3)$$

Подставляя в данную формулу значения начальных моментов, получаем:

$$m_4^{**} = 1 - 4 \cdot 1{,}60 + 6 \cdot 8{,}13 - 4;\ 21{,}19 + 134{,}79 = 93{,}41.$$

Одинаковые значения, полученные по двум разным формулам четвертого смещенного начального момента, указывают на правильность расчетов этих четырех моментов.

4.I.2. Вычисление начальных моментов по способу сумм

По данному способу в работе вычисляются начальные моменты ряда распределения высот, причем для его применяются другие формулы начальных моментов:

$$m_0 = 1\ ;\ m_1 = \frac{d_1}{N}\ ;\ m_2 = \frac{S_1 + 2S_2}{N} \qquad (4.4)$$

$$m_3 = \frac{d_1 + 6d_2 + 6d_3}{N}\ ;\quad m_4 = \frac{S_1 + 14S_2 + 36S_3 + 24S_4}{N}.$$

Таблица 4.2

Вычисление начальных моментов по способу сумм

Ряд высот

v_i	n_i	$b_1=59$	$b_2=63$	$b_3=5I$	$b_4=22$	Контроль K_i+1	$n_i(K_i+1)^4$
I8	4	4	4	4	4	-4	I024
I9	2	6	I0	I4	I8	-3	I62
20	3	9	I9	33		-2	48
2I	2	II	30			-I	2
22	I8	29				0	0
$23 = v_0$	2I					+I	2I
24	32	I50				+2	5I2
25	29	II8	I72			+3	2349
26	46	89	I54	243		+4	I776
27	23	43	65	89	II5	+5	I4375
28	I8	20	22	24	26	+6	23328
29	2	2	2	2	2	+7	4802
Итого	200	$a_1=422$	$a_2=5I5$	$a_3=358$	$a_4=I43$	-	58399

Для составления таблицы сумм необходимо выписать статистический ряд, принять местоположение начального значения(v_0=23) в соответствии с прежними указаниями и сделать графическое построение ступенчатого многоугольника так, чтобы против располагалась его вершина, которая делит таблицу накопленных численностей на две части - верхнюю и нижнюю.

После графического построения необходимо вычислить накопленные численности. Для этого, исходя из их свойств, во всех колонках $в_I$ ... $в_4$, выписать первое значение численности 4, а

в колонках a_I ... a_4 продублировать последнюю численность 2.
После этого от крайних значений к центру, т.е. к ступенчатому многоугольнику вычисляют накопленные или суммарные численности.

Так, накопленные численности столбца $в_I$ образуются сложением числа 4 с последующим числом $n_2 = 2$, т.е. 4+2=6, 6+3=9; 9+2=II; II+I8=29. Аналогичным приемом (см.табл.4.2) вычисляются все накопленные численности таблицы сумм. Просуммировав накопленные численности по всем столбцам вверх и вниз, мы получаем значения $в_n$ и a_n. Таблица сумм считается правильно составленной, если:

I) максимальная накопленная численность столбца $в_I$, a_I и численность $n_i = 21$ (находится против вершины ступенчатого многоугольника) в сумме должны дать общее число наблюдения: 29 + I50 + 2I = 200;

2) максимальные накопленные численности столбца $в_I$ и $в_2$ в сумме должны дать значения $в_I$=59, т.е. 29+30=59

Аналогичные контроли должны получаться по всем ступенькам многоугольника как в верхней части таблицы, контролируя $в_I$, $в_2$, $в_3$, так и в нижней части таблицы, контролируя суммы a_I, a_2, a_3.

Располагая значениями $в_I$, $в_2$, $в_3$, $в_4$; a_I, a_2, a_3, a_4, вычисляют суммы и разности.

Суммы	Разности
$S_n = a_п + в_п$	$d_n = a_п - в_п$
$S_1 = a_1 + в_1 = 422+59=48I$;	$d_1 = a_1 - в_1 = 422-59=363$
$S_2 = a_2 + в_2 = 5I5+63=578$;	$d_2 = a_2 - в_2 = 5I5-63=452$
$S_3 = a_3 + в_3 = 358+5I=409$;	$d_3 = a_3 - в_3 = 358-5I=307$
$S_4 = a_4 + в_4 = I43+22=I65$;	

Моменты по высоте

$$m_0 = I$$

$$m_1 = \frac{d_1}{N} = \frac{363}{200} = 1{,}815$$

$$m_2 = \frac{S_1 + 2S_2}{N} = \frac{48I+II56}{200} = \frac{I637}{200} = 8{,}I85$$

$$m_3 = \frac{d_1 + 6d_2 + 6d_3}{N} = \frac{363+27I2+I842}{200} = \frac{49I7}{200} = 24{,}585$$

$$m_4 = \frac{S_1 + 14S_2 + 36S_3 + 24S_4}{N} = \frac{48I+8092+I4724+3960}{200} = I36{,}285$$

Контроль моментов

$$m_4^* = m_0 + 4m_1 + 6m_2 + 4m_3 + m_4$$

$$m_4^* = 1+7,260+49,110+98,340+136,285=291,995$$

$$m_4^{**} = \frac{\Sigma n_i (K_i+1)^4}{N} = \frac{58399}{200} = 291,995$$

Моменты вычислены верно, так как $m_4^* = m_4^{**}$

4.2. Вычисление центральных и основных моментов ряда распределения диаметров и высот

Для вычисления меры косости (асимметрии) и меры крутости (эксцесс) при помощи теории моментов, как характеристик рядов распределения, а также для последующих расчетов при изучении взаимосвязи между двумя статистическими величинами, вычисляют центральные и основные моменты, упрощающие ведение статистических расчетов.

Центральные моменты (μ) вычисляются на основе формул связи между центральными и начальными моментами:

$$\begin{aligned}
\mu_0 &= 1 \\
\mu_1 &= 0 \\
\mu_2 &= m_2 - m_1^2 \\
\mu_3 &= m_3 - 3m_2 m_1 + 2m_1^3 \\
\mu_4 &= m_4 - 4m_3 m_1 + 6m_2 m_1^2 - 3m_1^4
\end{aligned} \qquad (4.5)$$

Основные моменты вычисляются по формулам связи между центральными и основными моментами:

$$r_0 = 1, \quad r_1 = 0, \quad r_2 = 1, \quad r_3 = \mu_3 : \sigma_1^3, \quad r_4 = \mu_4 : \sigma_1^4, \qquad (4.6)$$

где $\sigma_1 = \sigma : d = \sqrt{m_2 - m_1^2} = \sqrt{\mu_2}$, т.е. неименованное среднеквадратическое отклонение.

$r_3 = \alpha$ – мера косости или асимметрия ряда распределения

$r_4 - 3 = \varepsilon$ – мера крутости или эксцесс ряда распределения.

В качестве контроля необходимо получить меру косости и крутости ряда распределения при помощи моментов и непосредственным способом одинаковыми.

Вычисление центральных моментов.

Ряд диаметров

$\mu_0 = 1$

$\mu_1 = 0$

$\mu_2 = 5,57$

$\mu_3 = 9,64$

$n_1 + n_2 = l_1$

$n_2 + n_3 = l_2$

Ряд высот

$\mu_0 = 1$

$\mu_1 = 0$

$\mu_2 = 4,891$

$\mu_3 = -8,024$

$$m_4 = \frac{\Sigma n_i (x_i - x_0)^4}{N \cdot d^4}$$

$$\mu_4 = \frac{\Sigma n_i (x_i - M)^4}{N \cdot d^4}$$

$$r_4 = \frac{\Sigma n_i (x_i - M)^4}{N \cdot \sigma^4}$$

$\mu_4 = 104,38$ $\mu_4 = 88,113$

$\sigma_{1x} = 2,36$ $\sigma_{1y} = 2,21$

Вычисление основных моментов

Ряд диаметров $r_0 = 1,\ r_1 = 0,\ r_3 = 0,731$, $r_4 = 3,365$

Ряд высот $r_0 = 1,\ r_1 = 0,\ r_3 = -0,744$, $r_4 = 3,694$

Мера косости (асимметрия) и крутости ряда распределения.

Ряд диаметров $\alpha = r_3 = 0,731$; $r_4 - 3 = e = 3,365-3=0,365$

Ряд высот $\alpha = r_3 = -0,744$; $r_4 - 3 = e = 3,694-3=0,694$

Из показателей r_3 видно, что ряды диаметров имеют левовершинный, а ряды высот правовершинный характер распределения, что подтверждается графиками.

Расчеты по моментам в работе приводятся полностью.

4.3. Вычисление смешанных моментов двух статистических величин

Исходными данными для вычисления смешанного начального момента первого порядка m_{11} служит таблица распределения диаметров и высот в спелых сосновых насаждениях, которая была составлена параллельно с рядами распределения и проконтролирована. Смешанный начальный момент m_{11} вычисляется непосредственно на основе соотношений диаметров и высот таблицы распределения, в то время как смешанный центральный (μ_{11}) и смешанный основной (r_{11}) моменты первого порядка вычисляются по формулам связи. Расчеты ведутся в следующей последовательности:

$$m_{11} = \frac{\sum n_{xy} K_y K_x}{N}; \quad \mu_{11} = m_{11} - m_{1x} m_{1y}; \quad r_{11} = \frac{\mu_{11}}{\sigma_{1x} \sigma_{1y}}.$$

Смешанный основной момент первого порядка представляет собой коэффициент корреляции и в дальнейшем будет обозначаться через r . Из данных вычислений видно, что основу расчетов составляет определение смешанного начального момента m_{11} , который связан с таблицей распределения. Для его расчета составляем табл. 4.3 на базе уже имеющейся таблицы распределения и вносим в нее дополнения.

Дополняя ее рабочими, нормированными отклонениями по диаметрам K_x и по высотам K_y так, чтобы их нулевые значения остались на прежних местах, где были выбраны начальные значения V_0 по диаметру и по высоте. Это одно из основных

Т а б л и ц а 4.3

Схема вычисления смешанного начального момента m_{11} по способу произведений

$H=y$	$\mathcal{D}=x$ / K_y \ K_x	I7,4	20,6	23,8	27,0	30,2	33,4	36,6	39,8	43,0	46,2	49,4	52,6	55,6
		-6	-5	-4	-3	-2	-I	0	+I	+2	+3	+4	+5	+6
29	+6											+24 2		
28	+5				-I5 I	-I0 2	-5 4	5	+5 3	+I0 I		+20 I	+25 I	
27	+4					-8 5	-4 4	2	+4 4	+8 4	+I2 2			+24 2
26	+3			-I2 2	-9 II	-6 6	-3 8	I0	+3 2	+6 5		+I2 2		
25	+2				-6 8	-4 6	-2 7	3	+2 3	+4 2				
24	+I			-4 7	-3 II	-2 8	-I I	4	+I I					
23	0		4	5	9	I	I	I						
22	-I		+5 3	+4 I2	+3 2	+2 I								
21	-2		+I0 I			+4 - I								

Продолжение табл. 4.3

$H=y$	$D=x$	I7,4	20,6	23,8	27,0	30,2	33,4	36,6	39,8	43,0	46,2	49,4	52,6	55,6
	K_y \ K_x	-6	-5	-4	-3	-2	-I	0	+I	+2	+3	+4	+5	+6
20	-3	+I8 I	+I5 2											
I9	-4		+20 I	+I6 I										
I8	-5	+30 2		+20 2										
n_x		3	II	29	42	30	25	25	I3	I2	2	5	I	2
$\Sigma n_{xy} K_y K_x$		78	75	52	-I89	-I30	-75	0	44	80	24	92	25	48
$(\Sigma n_{xy} K_y)^2$		I69	225	I69	3969	4225	5625	5329	I936	I600	64	529	25	64
$\frac{(\Sigma n_{xy} K_y)^2}{n_x}$		56	20	6	95	I4I	225	2I3	I49	I33	32	I06	25	32

условий. Далее табл. 4.3 следует дополнить числами со знаками + и – , которые стоят в одной и той же клеточке над основными частотами (n_{xy}) таблицы распределения. Эти числа представляют собой произведения $K_y K_x$ целых чисел, т.е. нормированных рабочих отклонений. В последующем находят произведение $n_{xy} \cdot K_y \cdot K_x$ путем простого перемножения, с учетом знаков, чисел, находящихся внутри клеточки.

Например, для клеточки с координатами Н=18 и Д=17,4 имеем числа внутри клеточки +30 и 2, произведение этих чисел $n_{xy} \cdot K_y K_x$ будет +60, а для клеточки с координатами Н=20 и Д=17,4 это произведение будет +18 · 1 = +18. Сумма всего первого столбца при Д=17,4 будет $\sum n_{xy} \cdot K_y K_x$ = 60+18=78, т.е. то число, которое стоит в табл. 4.3. Такие расчеты делаются для всех столбцов, за исключением столбца, где Д=V_0=36,6, т.е. где рабочее отклонение равно нулю. В сумму $\sum n_{xy} \cdot K_y K_x$ не входят числа горизонтальной строки, которые стоят против К=0. Суммы всех значений $\sum n_{xy} \cdot K_y K_x$ подсчитываются строго с учетом знаков и в нашем случае равна 124 (см.табл.4.3), следовательно, смешанный начальный момент первого порядка между диаметрами и высотами составит:

$$m_{1/1} = \frac{\sum n_{xy} \cdot K_y K_x}{N} = \frac{124}{200} = 0{,}620 \text{ ,}$$

тогда $\mu_{1/1} = m_{1/1} - m_{1x}\, m_{1y}$ = 0,620+1,600·1,815 = 3,524

$$r_{1/1} = \frac{\mu_{1/1}}{\sigma_{1x}\,\sigma_{1y}} = \frac{3{,}524}{2{,}36 \cdot 2{,}21} = 0{,}674$$

Последние две строчки табл. 4.3 дают возможность вычислить значение суммы $\sum \frac{(\sum n_{xy} K_y)^2}{n_x}$, которая используется в рабочей формуле установления корреляционного отношения "η" как меры связи между двумя величинами при криволинейной зависимости. Для получения $(\sum n_{xy} K_y)^2$ необходимо $\sum n_{xy} K_y K_x$ разделить на соответствующее рабочее отклонение K_x и возвести результат в квадрат. Так, например, для столбца при Д=17,4 значение $\sum n_{xy} \cdot K_y K_x$ =78, это число надо разделить на K_x=–6 и возвести в квадрат, тогда $(\sum n_{xy} \cdot K_y)^2$=169, т.е. то число, которое стоит в таблице. Аналогичные расчеты приводятся по всем столбцам. Расчет $\sum \frac{(\sum n_{xy} K_y)^2}{n_x}$ = 1233 идет как в таблице. Эти две строчки дают возможность легко и быстро в последующем вычислить важный показатель связи между двумя величинами - корреляционное отношение.

5. ВЫЧИСЛЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ РЯДА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ИХ ОСНОВНЫХ ОШИБОК

В работе вычисляются следующие статистические показатели: среднеарифметическая величина (М), именованное среднеквадратическое отклонение (σ), неименованное среднеквадратическое отклонение (σ_1), коэффициент вариации (v), мера косости (асимметрия) - α и мера крутости ε (эксцесс или дефект), а также процент точности среднеарифметической величины (Р).

Помимо этих показателей, вычисляют их основные ошибки. Основная ошибка среднеарифметической величины m_x; среднеквадратического отклонения m_σ; коэффициента вариации m_v; меры косости m_α и меры крутости m_ε.

Для статистического ряда диаметров применяется непосредственный способ вычисления статистических показателей, а для ряда распределения высот применяется метод моментов.

В учебных пособиях необходимо усвоить основное содержание статистических показателей в такой степени, чтобы суметь делать характеристики того или иного ряда распределения при помощи этих показателей.

В методическом пособии дается только техника вычислений этих показателей, начиная с математической обработки статистических рядов.

5.1. Вычисление статистических показателей ряда распределения диаметров и их основных ошибок непосредственным способом

Непосредственный способ вычисления статистических показателей имеет ряд положительных и отрицательных сторон. Среди положительных сторон можно назвать применение его при большом и малом числе наблюдений, наглядность расчетов и его смысл на базе центральных отклонений α_i, одна схема вычисления, доступность к расчетам без специальной подготовки и ряд других признаков. К недостаткам можно отнести отсутствие контроля расчетов, перемножение и сложение больших чисел, невозможность использования предыдущих промежуточных расчетов в последующем статистическом анализе. Каждый из способов имеет свои положительные и отрицательные особенности.

Для облегчения вычисления статистических показателей, систематизации записей, с целью получения необходимых основных суммы, в расчетах следует использовать вспомогательную таблицу записей (табл. 5.1).

Таблица 5.1

Вспомогательная таблица для вычисления статистических показателей непосредственным способом

Ряд диаметров

v_i	n_i	$v_i n_i$	$\alpha_i = v_i - M$	α_i^2	$n_i \alpha_i^2$	$n_i \alpha_i^3$	$n_i \alpha_i^4$
17,4	3	52,2	-14,08	198,2	595	-8372	117976
20,6	11	226,6	-10,88	118,4	1302	-14170	154171
23,8	29	690,2	-7,68	59,0	1710	-13137	100889
27,0	42	1134,0	-4,48	20,1	843	-3776	16918
30,2	30	906,0	-1,28	1,6	49	-63	81
33,4	25	835,0	+1,92	3,7	92	+177	340
36,6	25	915,0	+5,12	26,2	655	+3355	17180
39,8	13	517,4	+8,32	69,2	900	+7487	62293
43,0	12	516,0	+11,52	132,7	1592	+18346	211344
46,2	2	92,4	+14,72	216,7	434	+6379	93899
49,4	5	247,0	+17,92	321,1	1606	+28772	515611
52,6	1	52,6	+21,12	446,1	446	+9420	198965
55,8	2	111,6	+24,32	591,5	1183	+28769	699656
Итого	200	6296,0	-	-	11407	63187	2189323

В этой таблице первоначально вычисляются произведения $v_i n_i$ с целью определения среднеарифметической величины M и установления центральных отклонений $\alpha_i = v_i - M$, которые следует записывать с учетом знака, который влияет в последующем при возведении в нечетную степень. Знаки следует учитывать при вычислении суммы.

Последовательность расчетов по вычислению статистических показателей:

$$1.\ M = \frac{\Sigma v_i n_i}{N} = \frac{6296}{200} = 31,48 = 31,5 \text{ см}$$

$$2.\ \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma n_i \alpha_i^2}{N-1}} = \frac{11407}{199} = 7,56 \text{ см}$$

$$3.\ m_M = \pm \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \pm \frac{7,56}{14,14} = \pm 0,53 \text{ см}$$

$$4.\ v = \frac{100\sigma}{M} = \frac{100 \cdot 7{,}56}{31{,}48} = 24{,}0\%$$

$$5.\ p = \frac{100 m_M}{M} = \frac{100 \cdot 0{,}53}{31{,}48} = 1{,}68\%$$

$$6.\ \alpha = \frac{\Sigma n_i d_i^3}{N\sigma^3} = \frac{63187}{200 \cdot 432} = 0{,}731$$

$$7.\ c = \frac{\Sigma n_i d_i^4}{N\sigma^4} - 3 = \frac{2189323}{200 \cdot 3253} - 3 = 0{,}365$$

$$8.\ m_v = \pm \frac{v}{\sqrt{2N}} = \pm \frac{24{,}0}{400} = 1{,}20\%$$

$$9.\ m_\sigma = \pm \frac{\sigma}{\sqrt{2N}} = \pm \frac{7{,}56}{400} = \pm 0{,}38 \text{ см}$$

$$10.\ m_\alpha = \pm \sqrt{6 : N} = \pm \sqrt{6 : 200} = \pm 0{,}174$$

$$11.\ m_c = \pm 2\sqrt{6 : N} = \pm 2\sqrt{6 : 200} = \pm 0{,}348$$

$$12.\ m_p = \pm \frac{p}{\sqrt{2N}} = \pm \frac{1{,}68}{\sqrt{400}} = \pm 0{,}084$$

Сводная запись результатов

$M \pm m_M = 31{,}5 \pm 0{,}53$ см; $\sigma \pm m_\sigma = 7{,}56 \pm 0{,}38$ см;

$v \pm m_v = 24{,}0 \pm 1{,}20\%$; $p \pm m_p = 1{,}68 \pm 0{,}08$ см;

$\alpha \pm m_\alpha = 0{,}731 \pm 0{,}17$; $c \pm m_c = 0{,}365 \pm 0{,}348$.

5.2. Вычисление статистических показателей ряда распределения высот и их основных ошибок при помощи моментов

Вычисление статистических показателей ряда распределения требует предварительного расчета начальных и основных моментов.

Если требуется вычислить статистические показатели, за исключением меры косости и меры крутости, то знание центральных и основных, а также третьего и четвертого начальных моментов не требуется, и схемы расчетов значительно упрощаются.

В работе предусматривается вычисление всех статистических показателей и применением уже известных нам моментов. Отметим, что с применением моментов вычисляются только такие статистические показатели, как среднее значение, среднеквадратическое отклонение, мера косости и крутости. Остальные статистические показатели вычисляются при помощи формул, которые уже приводились.

Последовательность вычисления статистических показателей с учетом уже вычисленных моментов по высоте может быть принята:

1. $M = \vartheta_0 + d m_1 = 23 + 1{,}815 = 24{,}8$ м

Здесь в ряде высот величина интервала $d = 1$.

2. $\sigma = d\sqrt{m_2 - m_1^2} = d\sqrt{\mu_2} = \sqrt{4{,}891} = 2{,}21$ м

3. $v = \dfrac{100\sigma}{M} = \dfrac{100 \cdot 2{,}21}{24{,}8} = 8{,}9\ \%$

4. $m_M = \pm \dfrac{\sigma}{\sqrt{N}} = \pm \dfrac{2{,}21}{200} = \pm \dfrac{2{,}21}{14{,}14} = \pm 0{,}16$ м

5. $P = \dfrac{100 m_M}{M} = \dfrac{100 \cdot 0{,}16}{24{,}8} = 0{,}65\ \%$

6. $\alpha = r_3 = -0{,}744$

7. $\varepsilon = r_4 - 3 = 0{,}694$

8. $m_v = \pm \dfrac{v}{\sqrt{2N}} = \pm \dfrac{8{,}9}{\sqrt{400}} = \pm 0{,}45\ \%$

9. $m_\sigma = \pm \dfrac{\sigma}{\sqrt{2N}} = \pm \dfrac{2{,}21}{\sqrt{400}} = \pm 0{,}11$ м

10. $m_\alpha = \pm\sqrt{6 : N} = \pm \sqrt{6 : 200} = \pm 0{,}174$

11. $m_\varepsilon = \pm 2\sqrt{6 : N} = \pm 2\sqrt{6 : 200} = \pm 0{,}348$

12. $m_p = \pm \dfrac{p}{\sqrt{2N}} = \pm \dfrac{0{,}65}{\sqrt{400}} = \pm 0{,}03$

Для вычисления статистических показателей: M, σ, α, ε моменты берутся из пунктов 4.1 и 4.2 раздела 4.

В целях уяснения изменчивости самих показателей и установления доверительных пределов возможных значений необходимо выписать статистические показатели совместно с их основными ошибками

$M \pm m_M = 24{,}8 \pm 0{,}16$ м; $\quad \sigma \pm m_\sigma = 2{,}21 \pm 0{,}11$ м;

$v \pm m_v = 8{,}9 \pm 0{,}45\%$; $\quad p \pm m_p = 0{,}65 \pm 0{,}03\ \%$;

$\alpha \pm m_\alpha = -0{,}744 \pm 0{,}17$; $\quad \varepsilon \pm m_\varepsilon = 0{,}694 \pm 0{,}35$.

Раздел 6. КРИВЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Каждая статистическая совокупность тех или иных величин наблюдаемого признака имеет среднюю величину и предельные значения как минимальное, так и максимальное.

Естественно представить себе, что все остальные значения располагаются около средней величины, занимая места в ряду распределения чисел от минимума до максимума. У разных признаков эти распределения могут принимать различные виды кривых. Несмотря на природное разнообразие кривых распределения, их можно свести в ряду кривых, которые изучаются в курсе математической статистике.

Среди таких кривых распределения мы имеем биноминальное распределение, нормальное распределение Лапласа-Гаусса, распределение Пуассона, Шарлье, семейство кривых распределения Пирсона и другие виды распределений. Имея эмпирическое распределение, мы можем выразить вероятностный закон его распределения как предельный случай общей закономерности. Для этого необходимо правильно выбрать и доказать степень приближения того или иного распределения к опытным данным. Вычисленное теоретическое распределение численностей будет отображать общий характер.

6.I. Вычисление кривой нормального распределения

Нормальное распределение имеет большое значение в особенности когда статистические расчеты и сопоставления эмпирических распределений приводят к теоретическим обобщениям на его базе.

~~Функция~~ Плотность нормального распределения вероятностей Лапласа-Гаусса имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \qquad (6.I)$$

Табличная функция Лапласа-Гаусса при значении $\sigma=1$ имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad (6.2)$$

Эта функция помещается таблично в статистической литературе в зависимости от нормированного отклонения от средней величины $x = \frac{v_i - \mu}{\sigma}$.

Кривая нормального распределения имеет строго определеные свойства: 1) область существования функции $-\infty < x < +\infty$ 2) функция $f(x)$ всегда положительная величина; 3) функция $f(x)$ изменяется в пределах от 0 до 0,4; 4) функция $f(x)$ симметричная по отношению к оси Оу; 5) кривая распределения при беспредельном удалении вправо или влево асимптотически приближается к оси Ох и никогда не пересекает ее; 6) при нормированном отклонении $X \div 0$ значение $f(x)$ приближается к 0,3989=0,4, т.е. к наибольшей ординате, отвечающей среднему значению; 7) кривая имеет ~~три~~ две точки перегиба; 8) основные моменты нормального распределения равны $r_3 = 0$, $r_4 = 3$; 9) критерием нормальности распределения является $\alpha = \varepsilon = 0$.

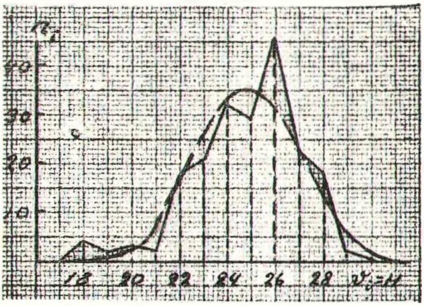

Рис. 3. Сопоставление теоретических численностей кривой нормального распределения ряда высот с опытными данными

В нашем случае ряды диаметров и ряды высот не следуют закону нормального распределения, так как не отвечают критерию, а α и ε превышают значения своих двойных или тройных основных ошибок.

Для вычисления численностей кривой нормального распределения могут применяться различные схемы. Покажем как вычисляются численности (частости) этой кривой в самом простом варианте, когда для эмпирического ряда распределения известны следующие показатели: M, σ, N.

В табл. 6.1 вписывается статистический ряд Д и вычисляются нормированные отклонения от средней величины $x_i = \frac{v_i - M}{\sigma}$ с точностью до сотых долей.

На основании значений x_i из прилож. в табл. 2 берется таблично функция Лапласа-Гаусса (6.2) с точностью до тысячных долей единицы.

Теоретические численности кривой нормального распределения определяются по формуле

$$\bar{n}_i = \frac{Nd}{\sigma} f(x), \qquad (6.3)$$

где $f(x)$ - различные значения функции, выписанные по интер-

Таблица 6.I

Схема вычисления кривой нормального распределения ряда диаметров

$M = 31{,}5$ см $\quad \sigma = 7{,}56$ см $\quad \mathcal{N} = 200$

v_i	n_i	$x_i = \frac{v_i - M}{\sigma}$	$f(x)$	$\tilde{n}_i$	$\Delta = n_i - \tilde{n}_i$
I7,4	3	-I,86	0,07I	6,0	-3,0
20,6	II	-I,44	0,I4I	I2,2	-I,2
23,8	29	-I,02	0,237	20,I	+8,9
27,0	42	-0,60	0,333	28,2	+I3,8
30,2	30	-0,I7	0,393	33,3	-3,3
33,4	25	+0,25	0,387	32,8	-7,8
36,6	25	+0,67	0,3I9	27,0	-2,0
39,8	I3	+I,I0	0,2I8	I8,5	-5,5
43,0	I2	+I,52	0,I26	I0,7	+I,3
46,2	2	I,94	0,06I	5,2	-3,2
49,4	5	2,37	0,024	2,0	+3,0
52,6	I	2,79	0,008	0,7	+0,3
55,8	2	3,2I	0,002	0,2	+I,8
Итого	200	-	2,32	I97,0	-

валам статистического ряда, а $\frac{\mathcal{N}d}{\sigma} = \frac{200 \cdot 3{,}2}{7{,}56} = 84{,}66$, т.е. постоянное число для расчетов.

Так, например, теоретическая численность в интервале I7,4 будет:

$$\tilde{n}_i = 84{,}66 \cdot 0{,}071 = 6{,}0 \;,$$

а в интервале 20,6 :

$$\tilde{n}_i = 84{,}66 \cdot 0{,}144 = 12{,}2 \text{ и т.д.}$$

Сумма $f(x)$ при нормированных значениях X_i, изменяющихся от -3 до +3, должна быть равна σ_1, - неименованному основному отклонению.

В нашем примере X_i изменяется от -I,86 до +3,2I , поэтому $\Sigma f(x) = 2{,}32 < \sigma_1$ на 0,04, а следовательно, распределяемое число $\mathcal{N} = 200$ не будет сходиться с теоретической суммой численностей кривой нормального распределения за счет неполной левой ветви. Если требуется вычислить ее, то вводят дополнительно интервалы и нормированные значения X_i , прибавляя к X_i разность I,86-I,44=0,42 и ведя дальнейшие расчеты.

6.2. Вычисление обобщенного нормального распределения - кривой Шарлье

Кривая обобщенного нормального распределения применяется, когда ряд не симметричный и имеет определенные показатели меры косости и крутости. Если ряд имеет косость небольшую, то кривая Шарлье - кривая типа А - лучше отображает эмпирическую зависимость распределения в сравнении с нормальной кривой. Однако следует отметить, что кривая Шарлье при больших значениях меры косости и крутости, достигающих 0,6 и более, в полной мере не может отобразить эмпирическое распределение и тем самым не отобразит общего характера закономерности изменения численностей в ряду.

Кривая типа А вычисляется на базе функции Шарлье с тремя ее членами:

$$f_A(x) = f(x) - \frac{\tau_3}{6} f'''(x) + f^{IV}(x) \frac{\tau_4 - 3}{24} \qquad (6.1)$$

где $f(x)$ - табличная функция Лапласа-Гаусса;

$f'''(x)$; $f^{IV}(x)$ - третья и четвертая производная функции $f(x)$;

$\tau_3 = \alpha$ - мера косости, или третий основной момент;

$\tau_4 - 3 = \varepsilon$ - мера крутости.

Вычисление кривой типа А первоначально дублирует расчеты в части определения нормированного отклонения X_i и взятия табличной функции $f(x)$ по ряду диаметров (см.табл.6.1 и 6.2)

Вычисление данного вида кривой требует предварительных расчетов и знание таких показателей ряда распределения диаметров, как: М, σ, N, τ_3 и τ_4. Такая кривая вычисляется, как правило, при наличии предварительных статистических расчетов. При взятии третьей и четвертой производных функций Лапласа-Гаусса $f'''(x)$ и $f^{IV}(x)$ необходимо соблюдать следующие правила: 1) для отрицательных значений нормированного отклонения - X_i, третья производная выписывается из таблицы с обратным знаком как она дана в таблице; 2) для положительных значений нормированных отклонений - X_i, третья производная выписывается со знаком как в таблице; 3) независимо от знака при нормированном отклонении - $x_i = (v_i - M)/\sigma$ четвертая производная выписывается со знаком, как в таблице.

При расчетах следует следить за правилом знаков в особенности во втором слагаемом функции (6.1).

Главным является определение $f_A(x)$ при заданных значениях

М, σ, τ_3 и τ_4. После того, как $f_A(x)$ определена по всем интервалам статистического ряда находят теоретические численности распределения по формуле:

$$\bar{n}_A = \frac{N d}{\sigma} f_A(x). \qquad (6.2)$$

Сумма имперических данных N = 200 должна быть практически равна сумме теоретической N_1 = 200 только в том случае, когда нормированные отклонения x_i достигают пределов +3 и -3.

Как видно из отклонений, кривая Шарлье лучше отобразила эмпирические данные распределения диаметров, чем кривая нормального распределения. Однако и она не сумела отобразить большую меру косости α = 0,731. Для лучшего отображения данного распределения следует рассмотреть другие виды кривых, например, кривая типа I Пирсона, однако это не входит в нашу задачу.

7. КРИТЕРИИ СОГЛАСИЯ

При вычислении нормальной кривой, кривой типа А, мы делали выводы о согласованности или несогласованности эмпирического ряда с тем или иным видам кривой, базируясь на значениях отклонений и визуального рассмотрения графиков, где нанесены опытные и выравненные значения.

Для математического обоснования согласованности опытных данных и сглаженных по тому или иному виду кривой служат критерии согласия.

Если критерий согласия показывает такую согласованность между опытными и теоретическими данными, то мы можем использовать все объективные черты теоретического распределения данного вида, которые отображают сущность самого явления, сущность самой кривой. В таком случае мы утверждаем, что природные свойства явления хорошо отображаются выбранным видом кривой распределения. Существуют различные критерии согласия между двумя рассматриваемыми рядами. Критерий Колмогорова, критерий Пирсона и другие. Применение критерия Колмогорова заключается в том, что сопоставляется эмпирическое распределение с нормальным распределением, причем сопоставляются не численности, а ряд накопленных частостей $F_n(x)$ с теоретическим рядом интегральной функции нормального распределения $F(x)$. Вычисление накопленных частостей $F_n(x)$ для эмпирического ряда производятся так:

$F_{n_1}(x) = n_1 : N = 3 : 200 = 0{,}015$;

Т а б л и ц а 5.I

Вычисление теоретических численностей распределения типа А - кривой Шарлье

Д = М = 3I,5 см; σ = 7,56 см; r_3 = 0,73I; r_4 = 3,365; N = 200; d = 3,2 см.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
v_i	n_i	$x_i = \frac{v_i - M}{\sigma}$	$f(x)$	$f'''(x)$	$f^{IV}(x)$	$-\frac{r_3}{6} f'''(x)$	$\frac{r_4 - 3}{24} f^{IV}(x)$	$f_A(x)$	$\bar{n}_i = \frac{Nd}{\sigma} f_A(x)$	$n_i - \bar{n}_i$
I7,4	3	-I,86	0,07I	+0,060	-0,4I0	-0,007	-0,006	0,058	4,9	-I,9
20,6	II	-I,44	0,I4I	-0,I89	-0,727	+0,023	-0,0II	0,I53	I3,0	-2,0
23,8	29	-I,02	0,237	-0,474	-0,5I2	+0,058	-0,008	0,287	24,3	+4,7
27,0	42	-0,60	0,333	-0,528	+0,323	+0,064	+0,005	0,402	34,0	+8,0
30,2	30	-0,I7	0,393	-0,I99	+I,II2	+0,024	+0,0I7	0,434	36,7	-6,7
33,4	25	+0,25	0,387	+0,284	+I,0I7	-0,035	+0,0I5	0,367	3I,I	-6,I
36,6	25	+0,67	0,3I9	+0,545	+0,I62	-0,066	+0,002	0,255	2I,6	+3,4
39,8	I3	+I,I0	0,2I8	+0,429	-0,609	-0,052	-0,009	0,I57	I3,3	-0,3
43,0	I2	+I,52	0,I26	+0,I32	-0,694	-0,0I6	-0,0II	0,099	8,4	+3,6
46,2	2	+I,94	0,06I	-0,090	-0,329	+0,0II	-0,005	0,067	5,7	-3,7
49,4	5	+2,37	0,024	-0,I49	+0,020	+0,0I8	+0,000	0,042	3,6	+I,4
52,6	I	+2,79	0,008	-0,I09	+0,I37	+0,0I3	+0,002	0,023	I,9	-0,9
55,8	2	+3,2I	0,002	-0,054	+0,I09	+0,007	+0,002	0,0II	0,9	+I,I
Итого	200	-	2,320	-	-	-	-	2,350	I99,4	+0,6

$F_{n_2}(x)=(n_1+n_2):N=$ (3 + II):200 = 0,070 и т.д. ,

а накопленные частости теоретического интегрального ряда распределения $F(x)$ берутся таблично, исходя из нормированного отклонения $x_i = \frac{(v_i - M) + a\tau d}{\sigma}$.

При взятии табличной функции $F(x)$ при отрицательных X_i следует брать дополнение до единицы к значениям функции.

Таблица 7.I

Схема вычисления критерия согласия Колмогорова

v_i	n_i	Накопленные n_i'	x_i	$F_n(x)$	$F(x)$	$D=F_n(x)-F(x)$
I7,4	3	3	-I,65	0,0I5	0,049	0,034
20,6	II	I4	-I,23	0,070	0,II0	0,040
23,8	29	43	-0,8I	0,2I5	0,209	0,006
27,0	42	85	-0,39	0,425	0,348	0,077=D_{max}
30,2	30	II5	+0,04	0,575	0,5I6	0,059
33,4	25	I40	+0,46	0,700	0,677	0,023
36,6	25	I65	+0,88	0,825	0,8II	0,0I4
39,8	I3	I78	+I,3I	0,890	0,905	0,0I5
43,0	I2	I90	+I,73	0,950	0,958	0,008
46,2	2	I92	+2,I5	0,960	0,984	0,024
49,4	5	I97	+2,58	0,985	0,995	0,0I0
52,6	I	I98	+3,00	0,990	0,999	0,009
55,8	2	200	+3,42	I,000	0,999	0,00I
Итого	200	-	-	-	-	-

Сопоставляя $F_n(x)$ и $F(x)$, находим максимальное значение их разности D_{max}, представляющую случайную величину, предельное распределение которой было установлено Колмогоровым, как вероятность того, что $\lambda_0 = D_{max}\sqrt{N}$ не будет превосходить заданного числа λ . Для нашего примера это произведение равно:

$$\lambda_0 = 0{,}077 \cdot 14{,}14 = 1{,}09$$

Числу λ_0 = I,09 соответствует значение критерия Колмогорова $1-K(\lambda)$ = 0,I856, который берется таблично. Как видим, вероятность согласия нормального распределения и эмпирического мала, ряды не согласуются. К такому же выводу приходим при вычислении критерия Пирсона $P(\chi^2)$, когда вероятность согласия между рассматриваемыми рядами мала $P(\chi^2)$= 0,025, а сам показатель χ^2 = I6,45, взятый при 7 степенях свободы варьирования больше табличного. Число степеней свободы варьирования для нормального распределения равно числу интервалов (разрядов) минус 3. (N, M и σ). Таким образом, $\nu = n - 3 = 10-3=7$. Вычисление критерия Пирсона проще и более доступно. Критерий Колмогорова может давать большие погрешности, так как не предусмотрен для расчетов интервальных рядов.

Таблица 7.2

Схема вычисления критерия согласия Пирсона

Ряд диаметров М = 31,5 см; σ = 7,56 см

v_i	n_i	$\tilde{n}_i$	$(n_i-\tilde{n}_i)$	$(n_i-\tilde{n}_i)^2$	$\frac{(n_i-\tilde{n}_i)^2}{\tilde{n}_i}$
17,4	3	6,0	-3,0	9,00	1,50
20,6	11	12,2	-1,2	1,44	0,12
23,8	29	20,1	8,9	79,21	3,94
27,0	42	28,2	13,8	190,44	6,75
30,2	30	33,3	-3,3	10,89	0,33
33,4	25	32,8	-7,8	60,84	1,85
36,6	25	27,0	-2,0	4,00	0,15
39,8	13	18,5	-5,5	30,25	1,64
43,0	12	10,7	1,3	1,69	0,16
46,2	5	5,2	0,2	0,04	0,01
Итого	194	194,0	-	-	16,45 = χ^2

Число степеней свободы ν = 10-3 = 7 ; $P(\chi^2)$ = 0,025

8. ТАБЛИЦА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И СТАТИСТИЧЕСКИЕ ПОКАЗАТЕЛИ СВЯЗИ ДВУХ ВЕЛИЧИН

В предыдущих разделах рассматривались способы установления тех или иных свойств одной статистической величины на базе ее распределения, представленного в виде статистического ряда.

Изучение связи двух зависимых величин, в нашем случае, между диаметрами и высотами в спелых сосновых насаждениях, рассматривается на базе составления таблицы распределения.

Таблица распределения в ряде случаев называется корреляционной таблицей, или корреляционной решеткой, так как при большом числе наблюдений на ее основе вычисляется коэффициент корреляции r и корреляционное отношение η как характеристики тесноты связи между двумя показателями. Ранее отмечалось, что таблицы распределения и статистические ряды необходимо составлять так, чтобы был контроль статистических рядов и таблицы распределения, т.е. итоговые данные таблицы распределения должны давать численности статистических рядов по диаметру и высоте.

Таблица распределения составляется по данным частичной статистической совокупности в результате парной разности диаметра и высоты каждого ствола. Форма таблицы принимается такой, как она приведена в данном пособии, т.е. в системе координат первого ряда, когда отсчет и $x=Д$ и $y=H$ начинается с левого нижнего угла.

В форму таблицы первоначально нужно вписать интервалы по диаметру и интервалы по высоте в сокращенной записи (интервал записывается начальным числом (с черточкой), т.е. такие интервалы, которые положены в основу составления статистических рядов. Это необходимо, чтобы предыдущие расчеты были согласованы с данной таблицей как по вычисленным статистическим показателям, так и по моментам, которые применяются при установлении коэффициента корреляции r и корреляционного отношения η. Разноска парных соотношений Д и Н всех стволов производится в рабочую таблицу точками по системе конверта.

В контрольной работе приводится таблица с цифрами. Как видно из табл. 8.I,итоговые данные справа таблицы представляют собой статистический ряд по высоте, а итоги внизу представлены статистическим рядом по диаметру.

Распределение численностей таблицы показывает на направленность с левого нижнего угла на правый верхний угол. Распределения диаметров и высот располагаются в виде вытянутого эллипса, который указывает на наличие корреляционной связи между Д и Н.

8.I. Вычисление условных средних значений

Исходными данными для вычисления условных средних значений высот служит таблица распределения.

Условные средние значения высот вычисляются при постоянстве диаметра той или иной ступени толщины. Условные средние высоты - это средние высоты по ступеням толщины, на основании которых строится график высот; это средние значения условных статистических рядов по высоте для группы стволов в

Таблица 8.I

Таблица распределения диаметров и высот в спелых сосновых насаждениях

$H=y$ \ $D=x$		Интервалы по диаметру													Высота	
		I5,8-	I9,0-	22,2-	25,4-	28,6-	3I,8-	35,0-	38,2-	4I,4-	44,6-	47,8-	5I,0-	54,2-	v_y	n_y
Интервалы по высоте	28,5-											2			29	2
	27,5-				I	2	4	5	3	I		I	I		28	I8
	26,5-					5	4	2	4	4	2			2	27	23
	25,5-			2	II	6	8	I0	2	5		2			26	46
	24,5-				8	6	7	3	3	2					25	29
	23,5-			7	II	8	I	4	I						24	32
	22,5-		4	5	9	I	I	I							23	2I
	2I,5-		3	I2	2	I									22	I8
	20,5-		I			I									2I	2
	I9,5-	I	2												20	3
	I8,5-		I	I											I9	2
	I7,5-	2		2											I8	4
D	v_x	I7,4	20,6	23,8	27,0	30,2	33,4	36,6	39,8	43,0	46,2	49,4	52,6	55,8	-	200
	n_x	3	II	29	42	30	25	25	I3	I2	2	5	I	2	200	-
$H_{усл.}$		I8,3	2I,6	22,6	24,5	25,2	26,0	25,9	26,4	26,3	27,0	27,6	28,0	27,0	-	-

пределах интервала по диаметру, представленному средним диаметром $-Д = \vartheta_x$.

Все вертикальные столбцы табл. 8.I представляют собой численности условных статистических рядов по высоте, для которых необходимо вычислить условные средние значения высот по формуле

$$H_{усл} = \frac{\sum n_{xy} \vartheta_y}{n_x}, \qquad (8.I)$$

где n_{xy} - численности клеточек вертикального условного статистического ряда по высоте;

n_x - численность статистического ряда по диаметру, соответствующая условному ряду по высоте.

Пример расчета условных высот.

$$H_{усл.17,4} = \frac{1 \cdot 20 + 2 \cdot 18}{3} = 18,7 \text{ м};$$

$$H_{усл.20,6} = \frac{4 \cdot 23 + 3 \cdot 33 + 1 \cdot 21 + 2 \cdot 20 + 1 \cdot 19}{11} = \frac{238}{11} = 21,6 \text{м и т.д.},$$

где $H_{усл.17,4}$ - высота первого вертикального условного ряда (состоит из малого числа наблюдений - Iи 2);

$H_{усл.20,6}$ - высота второго вертикального условного ряда, в нем уже больше численностей: 4, 3, I, 2, I и так далее.

Все окончательные расчеты помещаются в нижней строке табл. 8.I. Вычисление $H_{усл.}$ в работе приводится только в качестве примера для двух, трех условных рядов. Следует помнить, что численности n_{xy} клеточек таблицы распределения умножаются на средние значения высот в пределах интервалов, т.е. на ϑ_y , а не на величину начального значения интервала. После того как все условные средние значения высот по интервалам статистического ряда диаметров вычислены, следует сделать контроль по формуле

$$H_{ср} = \frac{\sum H_{усл} \cdot n_x}{N}, \qquad (8.2)$$

где $H_{ср}$ - средняя высота всего древостоя;

n_x - численности статистического ряда по диаметру;

N - общее число наблюдений = 200.

$$H_{ср} = \frac{18,6 \cdot 3 + 21,6 \cdot 11 + 22,5 \cdot 29 + \ldots + 27,0 \cdot 2}{200} = 24,8 \text{ м}.$$

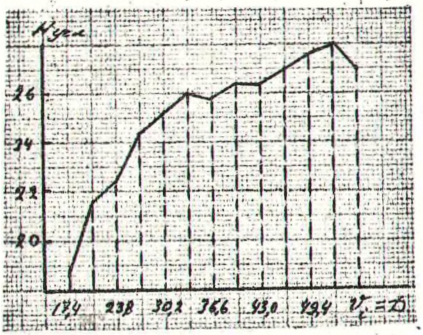

Рис. 4. Значение условных средних высот по интервалам диаметров - график высот

При получении контроля, можно быть уверенным в правильности расчетов и построить график высот. График высот оформляется на миллиметровке, тушью. Все расчеты $H_{усл}$ и график служат базой для вычисления ряда корреляционных уравнений при последующих расчетах.

8.2. Коэффициент корреляции и корреляционное отношение

Коэффициент корреляции является мерой тесноты связи между двумя величинами (Д и Н). Он может вычисляться при малом и большом числе наблюдений. Коэффициент корреляции r является показателем тесноты связи при линейной форме зависимости между двумя величинами и изменяется в пределах от -I до +I. Больше этих абсолютных значений он быть не может. Если значение r положительное, то зависимость прямая, если r имеет отрицательное значение, то зависимость обратная. Высокая степень тесноты связи характеризуется значениями 0,8 - 0,9. При переходе r к значениям, близким к I, связь из корреляционной превращается в функциональную. Это теоретическое положение, которое на практике мало когда осуществляется. Обычные значения коэффициента r, с которыми можно считаться это 0,5 и выше.

Связь с коэффициентами ниже 0,5 - это расплывчатые связи и по значению одного признака трудно судить о значении другого признака. Для малого числа наблюдений коэффициент корреляции вычисляется по формуле

$$r = \frac{\Sigma d_x d_y}{N \sigma_x \sigma_y}, \qquad (8.3)$$

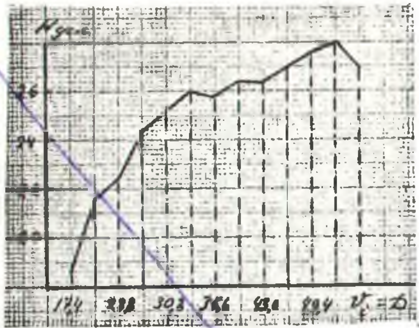

Рис. 4. Значение условных средних высот по интервалам диаметров - график высот

При получении контроля, можно быть уверенным в правильности расчетов и построить график высот. График высот оформляется на миллиметровке, тушью. Все расчеты $H_{усл}$ и график служат базой для вычисления ряда корреляционных уравнений при последующих расчетах.

8.2. Коэффициент корреляции и корреляционное отношение

Коэффициент корреляции является мерой тесноты связи между двумя величинами (Д и Н). Он может вычисляться при малом и большом числе наблюдений. Коэффициент корреляции r является показателем тесноты связи при линейной форме зависимости между двумя величинами и изменяется в пределах от -I до +I. Больше этих абсолютных значений он быть не может. Если значение r положительное, то зависимость прямая, если r имеет отрицательное значение, то зависимость обратная. Высокая степень тесноты связи характеризуется значениями 0,8 - 0,9. При переходе r к значениям, близким к I, связь из корреляционной превращается в функциональную. Это теоретическое положение, которое на практике мало когда осуществляется. Обычные значения коэффициента r, с которыми можно считаться это 0,5 и выше.

Связь с коэффициентами ниже 0,5 - это расплывчатые связи и по значению одного признака трудно судить о значении другого признака. Для малого числа наблюдений коэффициент корреляции вычисляется по формуле

$$r = \frac{\Sigma d_x d_y}{N \sigma_x \sigma_y}, \qquad (8.3)$$

где $\alpha_x = \vartheta_x - M_x$, $\alpha_y = \vartheta_y - M_y$ - центральные отклонения наблюдаемых значений от среднеарифметической величины того или иного признака;

N - общее число наблюдений;

σ_x, σ_y - именованные среднеквадратические отклонения коррелируемых признаков.

В данной работе большое число наблюдений, поэтому коэффициент корреляции необходимо вычислять при помощи моментов (см. раздел 4, где уже вычислены начальные, центральные, основные и смешанные моменты).

Вычисление коэффициента корреляции ведется по формуле

$$r = \frac{\mu_{11}}{\sigma_{1x}\,\sigma_{1y}}, \qquad (8.4)$$

где μ_{11} - смешанный центральный момент первого порядка между Д=х и Н=у;

σ_{1x}, σ_{1y} - неименованные среднеквадратические отклонения, численно равные $\sqrt{\mu_2}$.

Смешанный центральный момент первого порядка между Х и У вычисляется по формуле

$$\mu_{11} = m_{11} - m_{1x}\, m_{1y}. \qquad (8.5)$$

В разделе 4 имеем следующие значения моментов:

$m_{11} = 0{,}620$, $m_{1x} = -1{,}600$, $m_{1y} = 1{,}815$,

$\sigma_{1x} = 2{,}36$, $\sigma_{1y} = 2{,}21$,

тогда $\mu_{11} = 0{,}620 + 1{,}600 \cdot 1{,}815 = 3{,}524$

$$r = \frac{3{,}524}{2{,}36 \cdot 2{,}21} = 0{,}67$$

Основная ошибка коэффициента корреляции

$$m_r = \pm \frac{1 - r^2}{\sqrt{N}} = \frac{1 - 0{,}449}{14{,}14} = \pm 0{,}039 .$$

В тех случаях, когда зависимость между величинами криволинейная, вычисляют корреляционное отношение η. Данное отношение изменяется в пределах от 0 до +1 и отрицательной величиной не может быть.

Если корреляционное отношение стремиться к +1, то это означает, что криволинейная корреляция стремиться к функциональной зависимости. В целях сопоставления часто вычисляют сразу два показателя r и η, причем следует помнить, что корреляционное отношение всегда по своей абсолютной величине больше коэффициента корреляции, т.е. $\eta > r$.

При малом числе наблюдений η вычисляется по формуле

$$\eta^2_{y/x} = \frac{\sum \alpha_y^2 - \sum \Delta^2}{\sum \alpha_y^2} \qquad (8.6)$$

где α_y - центральное отклонение ($V_y - M_y$) зависимой переменной;

Δ - отклонение условного среднего значения от средней величины зависимой переменной ($\Delta = M_{yx} - M_y$).

У нас большое число наблюдений, сведенное в корреляционную табл. 8.I, для которой вычислены необходимые суммы, статистические показатели и моменты. В этом случае следует использовать схему вычисления смешанных моментов на базе корреляционной табл. 4.3, где определяется $\sum \frac{(\sum n_{xy} K_y)^2}{n_x}$ =I233.

Корреляционное отношение, вычисляемое с применением моментов, определяется по формуле

$$\eta^2_{y/x} = \frac{1}{\mu_{2y}} \left[\frac{1}{N} \sum \frac{(\sum n_{xy} K_y)^2}{n_x} - m^2_{1y} \right] \qquad (8.7)$$

В нашем случае эти показатели равны

μ_{2y} = 4,89I , $\sum \frac{(\sum n_{xy} K_y)^2}{n_x}$ = I233 , m_{1y} =I,8I5

N = 200, тогда

$$\eta^2_{y/x} = \frac{I}{4{,}89I} \left(\frac{I233}{200} - 3{,}294 \right) = 0{,}587; \quad \eta_{y/x} = 0{,}765;$$

$$\eta^2_{y/x} = 0{,}765 > r = 0{,}67$$

9. КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ СВЯЗИ

Существует много видов корреляционных уравнений связи между двумя и более величинами. Многие из них принадлежат к линейным, параболическим, гиперболическим и другим видам связи. Вид корреляционного уравнения, линейный или криволинейный может быть установлен графически или статистически.

Чаще всего принимают во внимание природу самого явления, которое мы изучаем. Линейный характер изменения зависимых величин может быть определен сравнительно быстро. Что касается видов криволинейных зависимостей, то здесь лучше всего применять различные критерии по тому или иному виду, например, по параболической зависимости. Удобно выбирать тот или иной вид криволинейного уравнения, вычислив несколько наиболее вероятных криволинейных связей, например, параболического вида того или иного порядка и найти сумму квадратов отклонений $\Sigma\Delta^2$. По величине наименьшей суммы квадратов отклонений выбирают тот или иной вид корреляционного уравнения связи между двумя величинами.

9.I. Вычисления параметров корреляционого уравнения прямой по способу наименьших квадратов

Способ наименьших квадратов предусматривает проведение такой теоретической линии регрессии, которая прошла бы как можно ближе к опытным данным условных средних значений y (в нашем примере условных средних значений высот) в зависимости от x, в результате чего $\Sigma\Delta^2 = (H_{ум} - \bar{H})$ была бы наименьшей. Первый приближенный вариант отыскания теоретических значений $\bar{y} = \bar{H}$ на базе опытных данных - это графический метод сглаживания. Однако как бы мы ни старались проводить графические линии регрессии мы не достигаем, что $\Sigma\Delta^2 = min$. Это можно достичь только в результате аналитического способа выравнивания опытных данных при помощи того или иного вида корреляционного уравнения. Так, например, при линейной связи между величинами, находится уравнение вида $\bar{y} = a + bx$, где x и y зависимые величины. a и b - параметры корреляционного уравнения прямой.

Для нахождения параметров a и b уравнения прямой по способу наименьших квадратов необходимо составить систему нормальных уравнений, а именно: а) для нахождения первого нормального уравнения все члены уравнения прямой в общем виде ,множить на коэффициент при a (т.е. на единицу) и произвести суммирование: $an + b\Sigma x = \Sigma y$; б) для нахождения второго нормального уравнения все члены уравнения прямой в общем виде умножить на коэффициент при b (т.е. на x) и произвести суммирование: $a\Sigma x + b\Sigma x^2 = \Sigma xy$.

Система нормальных уравнений для вычисления параметров уравнения будет следующей

$$\begin{cases} an + b\Sigma x = \Sigma y \\ a\Sigma x + b\Sigma x^2 = \Sigma xy. \end{cases} \tag{9.I}$$

Для вычисления параметров корреляционного уравнения прямой произвести расчеты по четырем этапам:

I) определение Σx, Σx^2; Σy; Σxy;

2) решение системы (9.I) с двумя неизвестными;
3) определение теоретических значений $\bar{y}$ - линии регрессии;
4) установление квадратов отклонений как критерия пригодности в выборе вида уравнений и сопоставления отдельных его видов.

Таблица 9.I

Схема вычисления параметров корреляционного уравнения прямой по способу наименьших квадратов

$$\bar{y} = a + bx$$

$D=x$	$H_{ср}=y$	x^2	xy	$\bar{y}$	$\Delta=y-\bar{y}$	Δ^2
I7,4	I8,7	302,8	325,4	2I,5	-2,8	7,84
20,6	2I,6	424,4	445,0	22,I	-0,5	0,25
23,8	22,6	566,4	537,9	22,7	-0,I	0,0I
27,0	24,5	729,0	66I,5	23,3	+I,2	I,44
30,2	25,2	9I2,0	76I,0	23,9	+I,3	I,69
33,4	26,0	III5,6	868,4	24,5	+I,5	2,25
36,6	25,9	I339,6	947,9	25,I	+0,8	0,64
39,8	26,4	I584,0	I050,7	25,8	+0,6	0,36
43,0	26,3	I849,0	II30,9	26,4	-0,I	0,0I
46,2	27,0	2I34,4	I247,4	27,0	0	0
49,4	27,6	2440,4	I363,4	27,6	0	0
52,6	28,0	2766,8	I472,8	28,2	-0,2	0,04
55,8	27,0	3II3,6	I506,6	28,8	-I,8	3,24
Σx	Σy	Σx^2	Σxy	-	-	$\Sigma \Delta^2$
475,8	326,8	I9278,0	I23I8,9	-	-	I7,77

Исходя из табл. 9.I, имеем Σx = 475,8; Σx^2 = I9278,0; Σy = 326,8; Σxy = I23I8,9; n = I3.

Следует отметить, что эти суммы необходимо вычислить с повторным контролем-суммированием, так как от них зависит не только вычисление параметров корреляционного уравнения прямой, но и вычисление других видов уравнений криволинейной зависимости.

Исходя из полученных сумм, система нормальных уравнений (9.I) запишется:

$$\begin{cases} 13a + 475{,}8\,b = 326{,}8 \\ 475{,}8\,a + 19278{,}0\,b = 12318{,}9 \end{cases}$$

Разделим все числа на коэффициент при a в каждом уравнении и найдем разность:

$$
\begin{array}{r}
-\; a + 36{,}60\,b = 25{,}138 \\
a + 40{,}52\,b = 25{,}891 \\
\hline
-\;3{,}92\,b = -0{,}753
\end{array},
$$

откуда $b = 0{,}192$

Подставляя значение $b = 0{,}192$ в первое уравнение, получим: $a + 7{,}027 = 25{,}138$ или $a = 25{,}138 - 7{,}027 = 18{,}11$

Корреляционное уравнение (рис.5) прямой будет иметь вид:

$$H_{усл} = 18{,}11 + 0{,}192\,Ð \qquad (9.2)$$

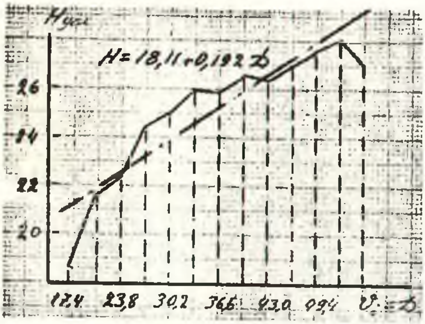

Рис.5. Линейная зависимость между условными высотами и средними диаметрами по интервалам статистического ряда

Подставляя в данное уравнение значения диаметров 17,4; 20,6; 23,8; 27,0 и т.д., мы получим значения $\bar{y} = \bar{H}_{усл}$, соответствующие прямой линии регрессии. Найдя квадраты отклонений, мы можем установить основную ошибку уравнения прямой по формуле

$$m_{1.x} = \pm \sqrt{\frac{\Sigma \Delta^2}{n-2}} = \pm \sqrt{\frac{17{,}77}{13-2}} = \pm 1{,}27 \text{ м}.$$

Из сопоставления с другими видами корреляционных уравнений эта ошибка будет самая большая, это означает, что оно не отображает закономерности изменения высот по ступеням толщины в спелых сосновых насаждениях.

9.2. Вычисление параметров корреляционного уравнения параболы второго порядка по способу наименьших квадратов

Вычисление параметров a, b, c корреляционного уравнения параболы второго порядка $\bar{y} = a + bx + cx^2$ производится по системе нормальных уравнений:

$$
\begin{aligned}
&a n + b\Sigma x + c\Sigma x^2 = \Sigma y; \\
&a\Sigma x + b\Sigma x^2 + c\Sigma x^3 = \Sigma xy; \qquad (9.3)\\
&a\Sigma x^2 + b\Sigma x^3 + c\Sigma x^4 = \Sigma x^2 y,
\end{aligned}
$$

16, 06

Т а б л и ц а 9.2

Схемы вычисления параметров корреляционного уравнения параболы второго порядка по способу наименьших квадратов $\bar{y} = a + bx + cx^2$

$D = x$	$H = y$	x^2	x^3	x^4	xy	x^2y	$\bar{y}$	$\Delta = y - \bar{y}$	Δ^2
17,4	18,7	302,8	5269	91676	325,4	5662,4	19,7	-1,0	1,00
20,6	22,6	424,4	8743	180098	445,0	9167,0	21,2	+0,4	0,16
23,8	22,6	566,4	13480	320832	537,9	12800,6	22,4	+0,2	0,04
27,0	24,5	729,0	19683	531441	616,5	17860,5	23,7	+0,8	0,64
30,2	25,2	912,0	27542	831780	761,0	22982,4	24,7	+0,5	0,25
33,4	26,0	1115,6	37261	1251970	868,4	29005,6	25,6	+0,4	0,16
36,6	25,9	1339,6	49029	1794474	947,9	34695,6	26,2	-0,3	0,09
39,8	26,4	1584,0	63043	2509119	1050,7	41817,6	26,8	-0,4	0,16
43,0	26,3	1849,0	79507	3418801	1130,9	48628,7	27,2	-0,9	0,81
46,2	27,0	2134,4	98609	4555748	1247,4	57628,8	27,3	-0,3	0,09
49,4	27,6	2440,4	120556	5955454	1363,4	67355,0	27,4	+0,2	0,04
52,6	28,0	2766,8	145534	7655071	1472,8	77470,4	27,3	+0,7	0,49
55,8	27,0	3113,6	173739	9694629	1506,6	84067,2	27,1	-0,1	0,01
Σx	Σy	Σx^2	Σx^3	Σx^4	Σxy	Σx^2y	$\bar{y}$	–	$\Sigma\Delta^2$
475,8	326,8	19278,0	841995	38791093	12318,9	509141,8	–	–	3,94

которая составляется в соответствии с правилом системы нормальных уравнений для параболы второго порядка, когда все ее члены умножаются на коэффициент при a , b и c с последующим суммированием по типу, как это показано при вычислении параметров корреляционного уравнения прямой. Чаще всего (при наличии пособия) система нормальных уравнений для параболы второго порядка (9.3) берется в готовом виде. Так, например, при нахождении параметров корреляционного уравнения параболы третьего порядка $\bar{y} = a + bx + cx^2 + dx^3$ принимает следующую систему

$$\begin{aligned} an + b\Sigma x + c\Sigma x^2 + d\Sigma x^3 &= \Sigma y \\ a\Sigma x + b\Sigma x^2 + c\Sigma x^3 + d\Sigma x^4 &= \Sigma xy \\ a\Sigma x^2 + b\Sigma x^3 + c\Sigma x^4 + d\Sigma x^5 &= \Sigma x^2 y \\ a\Sigma x^3 + b\Sigma x^4 + c\Sigma x^5 + d\Sigma x^6 &= \Sigma x^3 y \end{aligned} \qquad (9.4)$$

В данной работе следует рассмотреть вычисление параболы второго порядка (табл. 9.2), из которой видно, что такие суммы, как Σx ; Σy ; Σx^2 и Σxy уже участвовали при вычислении параметров уравнения прямой. В табл. 9.2 они дублируются, но, кроме их, находятся еще суммы Σx^3 ; Σx^4 и $\Sigma x^2 y$, которые участвуют в системе нормальных уравнений 9.3.

Прежде чем приступить к решению системы с тремя неизвестными параметрами, необходимо все коэффициенты разделить на коэффициент при a в каждом нормальном уравнении, тогда получим

$$\begin{cases} 13a + 475{,}8b + 19278c = 326{,}8 \\ 475{,}8a + 19278b + 841995c = 12318{,}9 \\ 19278a + 841995b + 38791093c = 509141{,}8 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} a + 36{,}600b + 1482{,}923c = 25{,}13846 \\ a + 40{,}517b + 1769{,}640c = 25{,}89092 \\ a + 43{,}676b + 2012{,}194c = 26{,}41050 \end{cases}$$

Сгруппируем первое и второе, а также второе и третье уравнения и образуем систему уравнений с двумя неизвестными, тогда получим:

$$\begin{array}{r} 40{,}517b + 1769{,}640c = 25{,}89092 \\ -\ 36{,}600b + 1482{,}923c = 25{,}13846 \\ \hline 3{,}917b + 286{,}717c = 0{,}75246 \end{array} \qquad \mathrm{I}$$

и

$$\begin{array}{r} 43{,}676b + 2012{,}194c = 26{,}41050 \\ -\ 40{,}517b + 1769{,}640c = 25{,}89092 \\ \hline 3{,}159b + 242{,}554c = 0{,}51958 \end{array} \qquad \mathrm{II}$$

Система с двумя неизвестными получится

$$\begin{cases} 3{,}917\,b + 286{,}717\,c = 0{,}75246 \\ 3{,}159\,b + 242{,}554\,c = 0{,}51958\,. \end{cases}$$

Разделив коэффициенты данной системы на коэффициент при b и взяв разность, получим

$$\begin{array}{r} 73{,}19811\,c = 0{,}19210 \\ -\ 76{,}78189\,c = 0{,}16448 \\ \hline 3{,}58378\,c = -0{,}02762 \\ c = -0{,}00771\,. \end{array}$$

Подставляя параметр $c = -0{,}00771$ в уравнение

$$3{,}917\,b + 286{,}717\,c = 0{,}75246,$$

получим параметр $b = 0{,}7565$, а затем и параметр $a = 8{,}884$. Таким образом, параметры получены следующие:

$a = 8{,}884$; $b = 0{,}7565$; $c = -0{,}00771$.

Уравнение зависимости между условной средней высотой по ступеням толщины и диаметрами в спелых сосновых насаждениях может быть выражено в следующем виде

$$\bar{y} = 8{,}884 + 0{,}75565\,x - 0{,}00771\,x^2 \qquad (9.5)$$

или $H_{усл} = 8{,}884 + 0{,}7565\,D - 0{,}00771\,D^2$.

После того как уравнение связи между двумя признаками (D и H) найдено, необходимо найти теоретические условные средние высоты по ступеням толщины диаметров, подставляя в уравнение 9.5 значения диаметров $D = x$ (см. таблицу 9.2) для каждой ступени толщины, а затем найти сумму наименьших отклонений для параболы $\Sigma\Delta^2 = 3{,}94$.

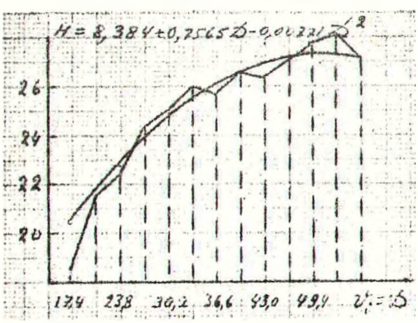

Рис. 6. Параболическая зависимость второго порядка между условными средними высотами и средними диаметрами по интервалам статистического ряда

Основная ошибка корреляционного уравнения параболы второго порядка равна

$$m_{2x} = \pm\sqrt{\frac{\Sigma\Delta^2}{n-3}} = \pm\sqrt{\frac{3{,}94}{10}} = \pm\,0{,}628 \text{ м}.$$

Следовательно, сумма квадратов отклонения и основная ошибка уравнения параболы второго порядка в несколько раз меньше, чем при уравнении прямой. Это говорит о том, что парабола второго порядка лучше отобразила зависимость между $Д$ и $Н$ в сопоставлении с уравнением прямой.

9.3. Вычисление параметров корреляционного уравнения логарифмической кривой

Семейство логарифмических кривых и всевозможные преобразования в логарифмическую форму обширно. В данной работе следует предусмотреть вычисление логарифмической кривой в ее простейшей форме в виде $y = a + b\lg x$, что применительно к нашему решаемому примеру будет $H = a + b\lg x$. Необходимо помнить, что x как независимая переменная составляет всего лишь порядковый номер соответствующей ступени того или иного признака по оси абсцисс.

Таким образом, для работы с данным видом уравнения необходимо знать порядковые номера x и соответствующие им значения диаметров.

Таблица 9.3

Схема вычисления параметров корреляционного уравнения логарифмической кривой вида $\bar{y} = a + b\lg x$ по способу наименьших квадратов

$Д$	$H_{ук}=y$	x	$\lg x$	$(\lg x)^2$	$y\lg x$	$\bar{y}$	$\Delta=y-\bar{y}$	Δ^2
17,4	18,7	1	0,000	0,000	0,000	19,9	-1,2	1,44
20,6	21,6	2	0,301	0,091	6,502	22,0	-0,4	0,16
23,8	22,6	3	0,477	0,228	10,780	23,2	-0,6	0,36
27,0	24,5	4	0,602	0,362	14,749	24,1	+0,4	0,16
30,2	25,2	5	0,699	0,489	17,615	24,8	+0,4	0,16
33,4	26,0	6	0,778	0,606	20,228	25,3	+0,7	0,49
36,6	25,9	7	0,845	0,714	21,886	25,8	+0,1	0,01
39,8	26,4	8	0,903	0,816	23,839	26,2	+0,02	0,04
43,0	26,3	9	0,954	0,911	25,090	26,5	+0,2	0,04
46,2	27,0	10	1,000	1,000	27,000	26,8	+0,2	0,04
49,4	27,6	11	1,041	1,085	28,732	27,1	+0,5	0,25
52,6	28,0	12	1,079	1,165	30,212	27,4	+0,6	0,36
55,8	27,0	13	1,114	1,241	30,078	27,6	-0,6	0,36
-	Σy	n	$\Sigma\lg x$	$\Sigma(\lg x)^2$	$\Sigma y\lg x$	-	-	$\Sigma\Delta^2$
-	326,8	13	9,792	8,708	256,711	-	-	3,87

Здесь x нельзя приравнивать цифровому значению диаметра. Для вычисления параметров a и b применяется система нормальных уравнений

$$an + b\sum \lg x = \sum y$$
$$a\sum \lg x + b\sum (\lg x)^2 = \sum y \lg x . \qquad (9.6)$$

Из табл. 9.3 видно, что значения x ; $\lg x$; $(\lg x)^2$ для всех примеров, уравнений будут одни и те же. При решении своей задачи их следует выписывать из табл. 9.3. Разное значение разрядных численностей n приводит к различию значений $\sum \lg x$ и $\sum (\lg x)^2$, которые входят в состав системы нормальных уравнений 9.6.

Подставляя указанные и другие суммы в эту систему, получим

$$\begin{cases} 13\,a + 9{,}792\,b = 326{,}8 \\ 9{,}792\,a + 8{,}708\,b = 256{,}711 \end{cases}$$

Разделив оба уравнения на свои коэффициенты при параметре a, найдем их разность

$$\begin{array}{r} 0{,}753\,b = 25{,}138 \\ -\ 0{,}889\,b = 26{,}216 \\ \hline 0{,}156\,b = 1{,}078 \\ b = 6{,}910 \end{array}$$

Решая первое уравнение по отношению к параметру a, найдем

$$13a + 67{,}662 = 326{,}8$$
$$13a = 259{,}137$$
$$a = 19{,}93$$

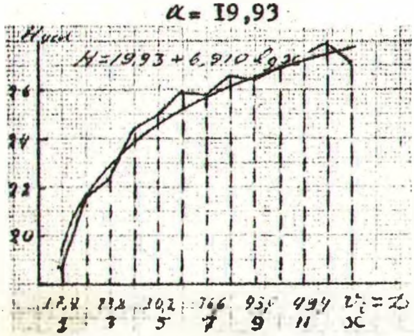

Рис.7. Логарифмическая зависимость между условными средними высотами и средними диаметрами по интервалам статистического ряда

Найденное уравнение будет иметь вид (рис.7): $H_{усл} = 19{,}93 + 6{,}910 \lg x$. Подставляя значения $\lg x$ из табл.9.3 в данное уравнение, получим теоретические значения высот по ступеням толщины. Значения $\sum \Delta^2$ в нашем случае получилось 3,87. Основная ошибка уравнения логарифмической кривой данного вида будет:

$$m_{lx} = \pm\sqrt{\frac{\Sigma\Delta^2}{n-2}} = \pm\sqrt{\frac{3,87}{11}} = \pm\, 0,593 \text{ м} .$$

Как видно, основная ошибка корреляционного уравнения логарифмической кривой данного вида меньше, чем у параболы второго порядка, а поэтому оно лучше отображает зависимость между D и H. Кроме того, по своей математической основе это уравнение лучше всего подходит к отображению данного соотношения так как, достигнув определенной высоты, дерево уже не станет меньшим. У параболы этого не происходит, она уже в более крупных ступенях толщины, независимо от данных, делает "поворот", т.е. уменьшение значений, что не соответствует действительности.

9.4. Вычисление параметров корреляционного уравнения гиперболы по способу наименьших квадратов

В лесохозяйственной, лесотаксационной практике в целом ряде случаев применяется гиперболическая зависимость. Наиболее часто встречается зависимость по уравнению вида $\bar{y} = a + \frac{b}{x}$, параметры которого определяются по системе нормальных уравнений

$$an + b\Sigma\frac{1}{x} = \Sigma y$$

$$a\Sigma\frac{1}{x} + b\frac{1}{x^2} = \Sigma\frac{1}{x}y \qquad (9.8)$$

Подставляя соответствующие суммы из вспомогательной таблицы 9.4 расчетов, получим:

$$\begin{cases} 13a + 0,4024b = 326,8 \\ 0,4024a + 0,0143b = 9,7267 \end{cases}$$

Разделив оба уравнения на свои коэффициенты при параметре и взяв их разность, получим:

$$\begin{array}{r} 0,0310b = 25,1385 \\ -\ 0,0355b = 24,1717 \\ \hline 0,0045b = -0,9668 \\ b = -214,84 \end{array}$$

Решая первое уравнение по отношению к параметру a, находим

$$13a - 86,4516 = 326,8$$

$$13a = 413,2516$$

$$a = 31,79$$

Параметры уравнения найдены $a = 31,79$; $b = -214,84$. Вычисленное уравнение гиперболы имеет вид

$$\bar{H}_{усл} = 31,79 - \frac{214,84}{D} \qquad (9.9)$$

Таблица 9.4

Вычисление параметров корреляционного уравнения гиперболы $\bar{y} = a + \frac{b}{x}$

$D=x$	$H_{усл}=y$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{y}{x}$	$\bar{y}$	$\Delta=y-\bar{y}$	Δ^2
17,4	18,7	0,0575	0,0033	1,0747	19,4	-0,7	0,49
20,6	21,6	0,0485	0,0024	1,0485	21,4	+0,2	0,04
23,8	22,6	0,0420	0,0018	0,9496	22,8	-0,2	0,04
27,0	24,5	0,0370	0,0014	0,9074	23,8	+0,7	0,49
30,2	25,2	0,0331	0,0011	0,8344	24,7	+0,5	0,25
33,4	26,0	0,0299	0,0009	0,7784	25,4	+0,6	0,36
36,6	25,9	0,0273	0,0007	0,6995	25,9	0,0	0,00
39,8	26,4	0,0251	0,0006	0,6633	26,4	0,0	0,00
43,0	26,3	0,0233	0,0005	0,6116	26,8	-0,5	0,25
46,2	27,0	0,0216	0,0005	0,5844	27,1	-0,1	0,01
49,4	27,6	0,0202	0,0004	0,5587	27,4	+0,2	0,04
52,6	28,0	0,0190	0,0004	0,5323	27,7	+0,3	0,09
55,8	27,0	0,0179	0,0003	0,4839	27,9	-0,9	0,81
n	Σy	$\Sigma \frac{1}{x}$	$\Sigma \frac{1}{x^2}$	$\Sigma \frac{y}{x}$	-	-	$\Sigma \Delta^2$
13	326,8	0,4024	0,0143	9,7267	-	-	2,87

Подставляя в уравнение 9.9 значения диаметров, помещенные в табл. 9.4, мы получаем теоретические условные средние значения высот по интервалам диаметров и вычисляем наименьшую сумму квадратов $\Sigma\Delta^2$ и основную ошибку уравнения, которая в нашем случае равна

$$m_{/x} = \pm\sqrt{\frac{\Sigma\Delta^2}{n-2}} = \pm\sqrt{\frac{2,87}{11}} = \pm 0,511 \text{ м}.$$

Сопоставляя основные ошибки корреляционных уравнений, вычисленных при одинаковом числе наблюдений с учетом числа степеней свободы варьирования, мы видим, что уравнение гиперболы данного вида лучше отобразила зависимость между D и H в спелых сосновых насаждениях. Близко к нему подходит и уравнение логарифмической кривой.

Вариант 1-4-В-10

ПРИЛОЖЕНИЯ

Таблица I

Общая статистическая совокупность диаметров (Д) и высот в спелых сосновых насаждениях

Номера столбцов											
I				2				3			
$Д_{см}$	$Н_м$	$Д_{см}$	$Н_м$	$Д_{см}$	$Н_м$	$Д_{см}$	$Н_м$	$Д_{см}$	$Н_м$	$Д_{см}$	$Н_м$
20,6	21,4	41,6	27,6	20,1	22,7	31,0	23,5	23,0	23,6	26,0	23,6
31,3	23,6	40,2	27,2	29,6	21,8	29,6	22,9	26,1	22,6	35,2	24,4
27,6	25,6	32,0	24,6	18,3	19,9	27,5	23,8	38,0	25,6	23,4	23,5
31,5	25,9	25,0	24,6	30,5	24,2	32,0	26,5	34,8	24,9	29,3	24,1
29,6	25,0	23,0	21,5	36,5	26,7	42,0	25,6	22,6	20,7	32,2	25,1
30,0	25,9	37,5	26,6	27,3	24,8	31,5	23,5	25,6	24,4	34,6	27,1
28,5	25,4	46,6	26,6	38,5	27,7	27,1	22,0	52,1	29,6	40,1	25,8
27,0	24,4	39,6	26,1	27,6	26,4	26,7	24,3	49,5	28,5	28,6	23,9
35,5	25,4	46,0	26,6	31,6	25,8	29,5	23,6	26,3	23,7	25,9	23,8
38,0	25,1	31,5	26,6	45,1	28,8	31,0	25,4	37,0	24,1	32,6	25,8
37,3	25,6	21,6	21,6	46,9	29,0	32,0	24,5	25,8	22,7	27,0	23,7
16,0	19,5	31,0	24,6	46,6	28,7	22,6	23,1	17,0	18,7	22,6	22,8
32,0	24,6	39,0	23,5	20,0	21,1	32,6	25,8	26,5	23,9	31,7	23,8
34,6	25,6	32,0	24,5	27,0	22,4	45,5	28,3	47,3	28,8	24,9	23,6
35,1	25,4	21,5	23,3	36,4	24,7	23,6	22,2	37,6	24,7	43,8	28,1
24,6	23,9	31,0	26,0	20,5	22,8	25,0	23,7	20,9	21,5	28,6	27,1
18,6	21,6	33,0	26,6	32,3	25,6	33,0	26,4	36,1	24,9	27,0	22,5
27,6	22,7	44,4	26,6	29,5	23,6	35,4	24,9	19,5	19,8	21,1	23,6
46,6	28,3	24,6	22,7	26,0	23,7	36,3	25,4	27,0	22,9	32,0	25,7
24,4	22,2	28,5	24,0	28,2	26,0	30,0	24,5	36,2	25,8	40,3	27,6
32,2	24,4	32,0	23,5	22,5	22,7	31,5	24,6	23,1	21,8	32,0	25,8
27,0	23,9	29,6	27,4	34,3	27,4	39,6	26,6	29,0	23,8	29,0	23,6
26,0	21,0	39,6	26,0	30,6	23,7	23,3	22,6	41,2	28,2	31,7	23,6
23,6	25,9	28,6	25,5	24,1	23,5	41,0	26,0	31,6	24,4	30,9	23,5
24,0	20,1	43,0	26,6	42,6	26,7	34,5	26,6	30,2	24,1	30,7	23,4

842,4 608,4

Продолжение табл. I

Номера столбцов											
4				5				6			
$Д_{см}$	$Н_м$	$Д_{см}$	$Н_м$	$Д_{см}$	$Н_м$	$Д_{см}$	$Н_м$	$Д_{см}$	$Н_м$	$Д_{см}$	$Н_м$
46,6	26,4	29,6	27,I	47,0	27,7	28,5	25,2	43,4	28,4	52,4	27,I
2I,6	20,I	29,7	24,6	35,3	22,5	30,3	25,2	20,I	20,4	44,6	28,6
34,0	27,0	26,6	25,5	36,3	24,6	33,3	25,2	26,9	25,7	3I,6	24,7
30,6	23,I	25,5	23,7	22,0	22,4	36,5	26,6	29,3	23,6	23,6	23,0
44,0	27,3	23,I	2I,6	48,5	26,I	27,6	26,6	2I,0	2I,5	26,5	24,4
38,I	24,5	29,5	23,5	35,3	26,2	26,5	23,3	30,4	22,4	22,6	22,7
40,5	27,I	22,6	22,2	38,0	25,5	I7,5	I8,6	28,4	25,3	3I,0	24,6
26,I	22,6	42,0	26,6	22,2	24,0	46,4	24,6	I7,6	I8,6	29,5	23,5
24,2	22,I	30,6	25,6	23,3	29,0	29,0	26,5	30,3	25,I	28,9	25,4
3I,6	27,3	4I,6	25,6	38,5	26,2	38,5	25,5	26,0	23,7	32,6	24,7
46,6	24,6	23,0	I9,0	28,3	24,5	26,2	25,6	35,4	25,5	3I,0	25,4
24,5	24,6	44,0	28,3	24,0	23,6	I5,6	I9,I	38,0	25,7	24,6	22,6
39,0	27,6	2I,5	22,2	20,0	22,6	37,5	28,6	24,6	22,7	50,4	28,5
28,0	22,2	36,5	27,6	25,5	23,5	40,I	27,3	39,9	26,4	32,0	24,I
36,0	27,0	26,0	2I,6	22,0	22,2	I9,0	I8,0	3I,0	23,5	22,6	I7,9
33,3	25,0	28,0	23,5	30,5	23,3	I5,5	I9,0	3I,4	25,6	27,0	22,0
24,6	23,6	28,4	22,7	29,6	22,5	26,0	22,5	39,6	27,0	I9,3	22,4
39,6	26,6	36,5	26,0	47,4	27,5	30,6	23,6	28,0	22,6	29,4	24,9
33,6	26,3	40,5	25,5	I7,5	I9,6	29,6	25,2	24,6	22,7	32,0	23,5
29,5	24,6	40,6	26,5	33,0	26,0	33,3	26,0	38,7	25,6	40,6	27,5
32,0	24,3	I7,5	I9,6	26,0	25,5	28,0	25,0	25,9	23,6	29,6	23,4
39,3	26,3	29,6	2I,5	27,0	23,6	32,5	I9,4	22,0	23,9	28,0	23,5
4I,0	27,6	36,5	26,0	25,0	23,6	40,0	26,6	4I,6	27,6	30,5	26,0
37,6	27,6	35,I	24,6	28,0	22,6	30,3	25,7	30,6	24,0	40,6	24,I
36,0	24,4	23,I	22,0	37,3	26,2	22,9	I7,8	28,4	24,4	22,9	22,6
911,3	603,4	767,6	6076					709,7	605,5	783,8	507,1

Продолжение табл. I

Номера столбцов											
7				8				9			
$Д_{см}$	$Н_м$	$Д_{см}$	$Н_м$	$Д_{см}$	$Н_м$	$Д_{см}$	$Н_м$	$Д_{см}$	$Н_м$	$Д_{см}$	$Н_м$
2I,8	24,4	32.0	25,4	25,5	24,6	24,0	2I,6	28,I	25,6	29,5	24,5
30,I	24,3	39,6	26,9	42,I	25,9	28,3	25,3	36,0	28,0	22,2	2I,9
30,4	24,I	28,I	26,4	28,I	25,7	36,6	26,6	26,4	22,6	33,6	27,3
34,6	26,3	29,6	25,I	32,6	24,6	24,5	22,9	56,6	26,6	3I,5	27,0
22,6	I7,7	49,6	25,7	22,7	22,4	33,0	27,4	38,6	28,0	39,5	26,6
42,2	25,0	34,6	25,7	27,7	25,6	36,0	28,4	36,6	26,0	25,0	23,6
26,6	23,6	30,I	25,6	27,0	25,I	56,6	26,7	30,I	24,6	40,6	25,3
4I,0	27,0	24,6	22,7	45,I	26,6	25,0	23,5	35,2	22,6	36,0	25,6
37,I	27,6	27,5	25,7	37,5	26,0	33,7	23,4	33,3	26,6	22,6	I8,6
37,0	26,4	35,I	24,6	26,6	22,6	22,6	I7,7	30,3	28,3	43,4	27,5
25,I	24,4	20,I	23,I	32,7	25,9	35,0	25,6	I9,4	I9,3	26,5	24,0
22,0	20,I	24,7	22,2	42,7	27,3	33,4	27,4	42,6	26,6	30,6	26,0
24,6	25,9	27,I	24,7	27,0	24,3	27,I	23,9	28,I	24,7	25,6	22,4
30,6	23,0	22,I	22,7	24,6	22,3	26,7	28,4	3I,7	25,8	28,7	2I,3
2I,0	22,6	49,5	27,5	25,7	23,7	3I,0	22,0	37,8	26,0	32,6	24,8
33,0	24,6	22,5	22,0	42,0	25,6	3I,6	26,6	26,3	22,7	35,I	24,4
I8,6	20,0	26,5	23,0	35,I	24,7	38,6	26,0	26,6	23,0	3I,0	24,5
24,0	22,0	34,0	27,6	24,5	22,6	28,0	23,5	27,3	23,0	26,0	22,6
44,4	26,6	28,0	22,7	28,6	25,9	53,0	27,6	22,5	22,7	34,6	25,8
25,I	23,6	23,4	22,9	49,5	25,7	25,8	24,7	38,0	27,5	3I,4	24,8
42,4	26,6	37,4	23,8	30,6	25,0	39,5	26,0	20,5	2I,6	28,0	25,6
36,6	26,7	25,I	24,I	50,0	28,6	29,5	24,0	42,2	25,0	38,I	27,7
28,7	24,4	26,I	22,6	37,0	23,7	32,0	24,6	39,6	24,4	27,6	25,5
I8,7	I7,9	30,9	25,6	2I,7	20,7	32,6	24,7	26,6	25,6	29,9	27,0
3I,0	23,7	2I,6	2I,9	45,0	26,7	3I,6	25,7	30,2	28,3	33,3	28,4

Продолжение табл. I

Номера столбов							
10						11	
Д см	Н м	Д см	Н м	Д см	Н м	Д см	Н м
46,6	27,7	33,5	25,6	36,4	26,6	27,0	23,0
28,0	25,3	36,5	25,0	27,5	23,4	34,5	24,6
32,6	25,7	31,6	25,5	30,6	23,6	25,0	23,7
28,6	26,6	41,0	27,0	29,0	23,0	32,0	24,0
22,6	24,0	31,0	24,8	20,4	20,3	22,6	22,7
35,6	25,7	37,0	24,0	38,0	27,5	33,5	25,6
33,5	25,5	26,6	29,0	24,6	27,6	26,4	29,6
43,5	26,0	27,0	23,6	19,9	19,4	36,6	24,4
30,3	24,4	21,9	20,1	32,6	25,9	24,6	22,7
24,0	22,6	38,5	26,5	37,5	26,7	22,0	22,7
35,6	25,6	36,5	26,5	34,6	25,6	38,4	25,5
28,1	24,3	31,0	25,0	34,6	26,4	26,5	24,0
24,4	24,4	30,5	26,0	30,6	23,9	35,0	24,9
30,5	23,6	51,0	27,7	20,6	20,4	51,8	24,8
29,6	22,7	30,7	23,0	22,6	24,0	33,0	26,4
28,5	21,6	24,5	25,7	39,0	27,9	30,0	24,4
32,6	26,4	38,0	25,6	20,6	20,4	22,5	21,7
26,0	24,7	36,6	25,7	33,4	25,0	26,7	25,9
22,2	21,6	23,0	22,7	26,0	22,9	30,5	28,9
25,7	23,3	22,7	22,5	32,4	24,9	32,7	26,0
17,7	18,8	29,5	24,4	22,7	24,0	18,6	17,5
32,1	25,3	34,5	25,5	34,8	25,4	30,6	23,6
37,2	26,2	23,8	24,4	42,0	25,7	42,6	26,6
36,5	26,7	49,5	27,7	30,6	23,8	22,5	22,0
23,6	20,2	32,6	25,9	18,6	17,5	24,0	22,0
757,6	608,9	819,0	679,4				

Таблица 2

Значения интегральной функции $F(x)$, дифференциальной функции распределения $f(x)$ и ее производных $f'''(x)$ и $f^{IV}(x)$

x	$F(x)$	$f(x)$	$f'''(x)$	$f^{IV}(x)$	x	$F(x)$	$f(x)$	$f'''(x)$	$f^{IV}(x)$
0,00	0,500	0,399	+0,000	+I,I97	0,68	0,752	0,3I7	+0,546	+0,I39
02	508	399	024	I96	70	758	3I2	549	094
04	5I6	399	048	I92	72	764	308	550	049
06	524	398	072	I86	74	770	303	55I	+0,004
08	532	398	095	I78	76	776	299	550	-0,039
I0	540	397	II9	I67	78	782	294	549	082
I2	548	396	I42	I54	80	788	290	547	I25
I4	556	395	I65	I39	82	794	285	544	I66
I6	564	394	I87	I2I	84	800	280	540	206
I8	57I	393	2I0	I02	86	805	276	536	245
20	579	39I	232	080	88	8II	27I	530	284
22	587	389	253	056	90	8I6	266	524	320
24	595	388	274	030	92	82I	26I	5I8	356
26	603	386	294	I,002	94	826	256	5I0	390
28	6I0	384	3I4	0,973	96	83I	252	502	423
30	6I8	38I	333	94I	98	836	247	493	454
32	626	379	35I	908	I,00	84I	242	484	484
34	633	377	369	873	02	846	237	474	5I2
36	64I	374	386	837	04	85I	232	463	539
38	648	37I	403	800	06	855	227	452	564
40	655	368	4I8	76I	08	860	223	44I	587
42	663	365	433	72I	I0	864	2I8	429	609
44	670	362	447	679	I2	869	2I3	4I7	629
46	677	359	460	637	I4	873	208	404	648
48	684	355	473	594	I6	877	204	39I	664
50	69I	352	484	550	I8	88I	I99	377	679
52	698	348	495	506	20	885	I94	364	693
54	705	348	504	460	22	889	I90	350	704
56	7I2	34I	5I3	4I5	24	893	I85	335	7I4
58	7I9	337	52I	369	26	896	I80	32I	722
60	726	333	528	323	28	900	I76	306	729
62	732	329	534	277	30	903	I7I	292	734
64	739	325	539	23I	32	907	I67	277	738
0,66	0,745	0,32I	+0,543	+0,I85	I,34	0,9I0	0,I63	+0,262	-0,740

Продолжение табл. 2

x	$F(x)$	$f(x)$	$f'''(x)$	$f^{IV}(x)$	x	$F(x)$	$f(x)$	$f'''(x)$	$f^{IV}(x)$
1,36	0,913	0,158	+0,248	-0,739	2,04	0,979	0,050	-0,118	-0,232
38	916	154	233	739	08	981	046	127	194
40	922	146	203	733	12	983	042	134	159
42	922	146	203	733	16	985	039	139	125
44	925	141	189	727	20	986	035	144	093
46	928	137	174	721	24	987	032	147	063
48	931	133	160	713	28	989	030	149	035
50	933	130	146	704	32	990	027	150	-0,009
52	936	126	132	694	36	991	025	149	+0,015
54	938	122	118	683	40	992	022	148	036
56	941	118	104	671	44	993	020	147	053
58	943	115	091	658	48	993	018	144	072
60	945	111	078	644	52	994	017	141	087
62	947	107	065	629	56	995	015	137	100
64	950	104	053	614	60	995	014	133	111
66	952	101	041	598	64	996	012	128	119
68	954	097	029	581	68	996	011	123	126
70	955	094	018	563	72	997	010	118	132
72	957	091	+0,007	545	74	997	009	115	134
74	959	088	-0,004	527	78	997	008	110	137
76	961	085	015	508	82	998	007	105	139
78	962	082	025	489	86	998	007	099	139
80	964	079	034	469	90	998	006	093	139
82	966	076	043	449	94	998	005	088	137
84	967	073	052	430	98	998	005	082	134
86	968	071	060	410	3,02	999	004	077	131
88	970	068	068	389	06	999	004	072	127
90	971	066	076	369	12	999	003	065	121
92	973	063	082	349	16	999	003	060	116
94	974	061	090	329	20	999	002	055	111
96	975	058	096	309	24	999	002	051	105
98	976	056	103	290	28	999	002	047	100
2,00	0,977	0,054	-0,108	-0270	3,32	0,999	0,002	-0,043	+0,094

Т а б л и ц а 3

Значения χ^2, соответствующие значениям $P(\chi^2)$ и числам степеней свободы ν

ν \ $P(\chi^2)$	0,99	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30	0,I0	0,05	0,0I	0,00I
3	0,I	0,4	0,6	I,0	I,4	2,4	3,7	6,3	7,8	II,3	I6,3
4	0,3	0,7	I,I	I,6	2,2	3,4	4,9	7,8	9,5	I3,3	I8,5
5	0,6	I,I	I,6	2,3	3,0	4,4	6,I	9,2	II,I	I5,I	20,6
6	0,9	I,6	2,2	3,I	3,8	5,3	7,2	I0,6	I2,6	I6,8	22,5
7	I,2	2,2	2,8	3,8	4,7	6,3	8,4	I2,0	I4,I	I8,5	24,3
8	I,6	2,7	3,5	4,6	5,5	7,3	9,5	I3,4	I5,5	20,I	26,I
9	2,I	3,3	4,2	5,4	6,4	8,3	I0,7	I4,7	I6,7	2I,7	27,9
I0	2,6	3,9	4,9	6,2	7,3	9,3	II,8	I6,0	I8,3	23,2	29,6
II	3,I	4,6	5,6	7,0	8,2	I0,3	I2,9	I7,3	I9,7	24,7	3I,3
I2	3,6	5,2	6,3	7,8	7,0	II,3	I4,0	I8,5	2I,0	24,2	32,9
I3	4,I	5,9	7,0	8,6	9,9	I2,3	I5,I	I9,8	22,4	27,7	34,5
I4	4,7	6,6	7,8	9,5	I0,8	I3,3	I6,2	2I,I	23,7	29,I	36,I
I5	5,2	7,3	8,3	I0,3	II,7	I4,3	I7,3	22,3	25,0	30,6	37,7
I6	5,8	8,0	9,3	II,2	I2,6	I5,3	I8,4	23,5	26,3	32,0	39,3
I7	6,4	8,7	I0,I	I2,0	I3,5	I6,3	I9,5	24,8	27,6	33,4	40,8
I8	7,0	9,4	I0,9	I2,9	I4,4	I7,3	20,6	26,0	28,9	34,8	43,2
I9	7,6	I0,I	II,6	I3,7	I5,4	I8,3	2I,7	27,2	30,I	36,2	43,8
20	8,2	I0,9	I2,4	I4,6	I6,3	I9,3	22,8	28,4	3I,4	37,6	45,3
30	I5,0	I8,5	20,6	23,4	25,5	29,3	33,5	40,3	43,8	50,9	59,7

$P(\chi^2)$ - вероятность случайного расхождения между двумя признаками, явлениями.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение и программа курса I

I. Методические указания по выполнению контрольных работ и подготовке теоретического курса........... 6

2. Сводка данных наблюдения 8

3. Статистические ряды и их графические изображения... II

4. Вычисление моментов статистических величин......... I5

5. Вычисление статистических показателей ряда распределения и их основных ошибок................ 26

6. Кривые распределения 30

7. Критерий согласия 34

8. Таблица распределения и статистические показатели связи двух величин 37

9. Корреляционные уравнения связи 43

10. Приложения 54

Общая статистическая совокупность соотношения диаметров и высот в спелых сосновых насаждениях.... 54

Значения интегральной функции $F(x)$, дифференциальной функции распределения $f(x)$ и ее производных $f'''(x)$ и $f^{IV}(x)$........................ 58

Значения χ^2, соответствующие значениям $P(\chi^2)$ и числам степеней свободы ν 60

Составитель Олег Антонович Трулль

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ПО КУРСУ
"ВАРИАЦИОННАЯ СТАТИСТИКА"

Редактор Е.И.Скоробогатая. Корректор Н.А.Забнева.
Подписано в печать 10.II.78. АТ14474. Формат 60х84/16.
Усл.печ.л.2,79. Уч.-изд.л.3. Тираж 500 экз.
Заказ 884. Цена 9 коп.
Отпечатано на ротапринте БТИ им.С.М.Кирова
220630, Минск, Свердлова, 13.