Министерство образования Республики Беларусь

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра высшей математики

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Методическое пособие по курсу "Высшая математика" для практических занятий и самостоятельной работы студентов инженерно-технических и химико-технологических специальностей

Минск 1999

УДК 519.2

Рассмотрено и рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом университета.

Составители: Л.Н.Алещенко, Р.М.Кончиц

Научный редактор профессор В.М.Марченко

Рецензенты: зав.кафедрой теории функций доктор физико-математических наук, профессор БГУ З.И.Зверович ; профессор кафедры теоретической механики В.С.Вихренко

По тематическому плану изданий учебно-методической литературы университета на 1998 год. Поз.36.

Для студентов всех специальностей.

ВВЕДЕНИЕ

Цель методического пособия - повышение эффективности практических занятий, стимулирование самостоятельной работы студентов, осуществление постоянного контроля усвоения материала.

В данном пособии представлены задачи по основным темам раздела "Теория вероятностей". Каждая тема содержит контрольные вопросы и упражнения, задачи для аудиторной и самостоятельной работы, задачи на повторение с учетом профессиональной ориентации. Приведены примерные варианты двух контрольных работ.

Все задачи помечены двумя цифрами и буквой (например, 1.2А, 3.4Б). Первая цифра указывает на номер раздела (темы), вторая - номер задачи в разделе, буква А - первый уровень сложности, Б - второй уровень сложности.

Задачи уровня А для аудиторной работы составляют обязательный минимум. Умение решать эти задачи и аналогичные им необходимо каждому студенту.

В конце пособия ко всем задачам даны ответы, к некоторым - указания (советы) или решения.

Предполагается, что решению приведенных задач предшествует самостоятельная работа студентов по изучению указанной в пособии литературы. Ответы на контрольные вопросы сделают эту работу более осознанной. Не исключено, что некоторые разделы (например "Повторение испытаний") могут быть вынесены на самостоятельное изучение.

1. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Теоретическая справка

Число P_n всех возможных способов переставить n элементов - число перестановок из n элементов - равно

$$n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots 2\cdot 1 .$$

Число A_n^m всевозможных способов разместить m элементов из n по m местам - число размещений - равно

$$n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-m+1) .$$

Число C_n^m всевозможных способов выбора m элементов из n - число сочетаний - равно A_n^m / P_m .

Таким образом, $P_n = 1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)\cdot n = n!$

(полагают $0!=1$).

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}.$$

Отметим следующие свойства:

$$C_n^m = C_n^{n-m},$$

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n.$$

Примеры

I. Количество способов распределения 5 должностей между 5 лицами равно $P_5 = 5! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5 = 120.$

2. Из группы в I5 человек выбираются 4 участника эстафеты. Количество способов расстановки спортсменов по четырем этапам эстафеты равно

$$A_{15}^4 = \frac{15!}{(15-4)!} = \frac{15!}{11!} = 15\cdot14\cdot13\cdot12 = 32760.$$

3. Количество способов выбора 3 дежурных из группы в 20 человек равно

$$C_{20}^3 = \frac{20!}{3!\cdot17!} = \frac{20\cdot19\cdot18}{1\cdot2\cdot3} = 1140.$$

Задачи и упражнения для аудиторной работы

I.IA. Бросают игральную кость с 6 гранями и правильную монету. Сколькими различными способами они могут упасть ?

I.2А. В сборочный узел входят 2 сопряженные детали: № I (валик) и № 2 (втулка). Узел имеет пониженное качество, если размер одной из деталей завышен, а другой - занижен, или одной детали нормален, а другой - завышен или занижен. На сборку поступила партия валиков и партия втулок. Из I0 валиков, входящих в партию, 7 имеют нормальные размеры, 2 - завышенные и I - заниженный. Из 20 втулок, входящих в партию, 16 имеют нормальные размеры, I - завышенный и 3 - заниженные. Сколько существует различных способов сопряжения валиков и втулок, в которых собранный узел оказывается пониженного качества ?

I.3А. Сколькими способами можно переставить буквы слова "гипербола" ? Сколько среди них таких, в которых буквы "г" и "и" стоят рядом ? Сколько таких, в которых эти буквы не стоят рядом ?

I.4А. Телефонный номер состоит из шести цифр. Сколько можно составить шестизначных номеров с разными цифрами ?

I.5А. Имеются 3 вакантные должности, на которые направляются 5 молодых специалистов. Сколько существует различных способов распределения специалистов, если должности равнозначны ?

I.6А. Сколькими способами можно выбрать из урны, содержащей 4 черных и 6 белых шаров, 3 шара так, чтобы среди них было ровно 2 белых ?

I.7Б. Сколькими способами можно составить комиссию из 3 человек, выбирая их среди 4 супружеских пар, если в комиссию входят: I) любые 3 из 8 человек; 2) 2 женщины и I мужчина; 3) представители разных семей ?

I.8Б. Сколькими способами можно распределить 8 билетов, (места в одном ряду) среди 4 юношей и 4 девушек так, чтобы никакие 2 лица одного пола не сидели рядом ?

I.9Б. Сколько можно образовать различных четырехзначных чисел, пользуясь цифрами 0,I,2,3,4,5,6,7,8,9, не повторяя ни одну из этих цифр?

I.IОБ. (Задача-шутка). В некотором государстве не было двух жителей с одинаковым набором зубов. Какова может быть наибольшая численность населения этого государства ? (Во рту человека может быть не более 32 зубов).

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

I.IIА. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить, используя цифры I,2,3,4,5, если: а) никакая цифра не повторяется более одного раза; б) повторения цифр допустимы; в) числа должны быть нечетными и повторений не должно быть.

I.I2А. Сколькими способами можно переставить буквы слова "мама" ? Сколько среди них таких, которые дают различные буквосочетания ?

I.I3А. Сколькими способами можно выставить на игру футбольную команду, состоящую из трех нападающих, трех полузащитников, четырех защитников и вратаря, если всего в команде 6 нападающих, 3 полузащитника, 6 защитников и I вратарь ?

I.I4Б. В автомашине 7 мест. Сколькими способами 7 человек могут сесть в эту машину, если место водителя могут занять трое из них ?

I.15Б. У одного человека есть 7 книг по математике, а у другого - 9 книг. Сколькими способами они могут обменять 3 книги одного на 3 книги другого ?

I.16Б. Пассажир оставил вещи в автоматической камере хранения, а когда пришел получать их, выяснилось, что он забыл номер. Он только помнит, что в номере были числа 23 и 47. Чтобы открыть камеру, нужно правильно набрать пятизначный номер. Какое наибольшее количество номеров нужно перебрать, чтобы открыть камеру ?

Задачи на повторение

I.17А. Сколькими способами можно переставить буквы в слове "математика"?

I.18А. На станции имеется 6 запасных путей. Сколькими способами диспетчер может расставить на них 4 поезда так, чтобы на каждом пути стоял только I поезд ?

I.19А. Сколько существует пятизначных чисел ? Сколько среди них таких, которые начинаются цифрой 2 и оканчиваются цифрой 4 ? которые не содержат цифры 5 ? которые делятся на 5 ?

I.20А. Автомобильные номера составляются из одной, двух или трех букв и четырех цифр. Найти число таких номеров, используя 32 буквы русского алфавита.

I.21А. У вас в группе 25 человек. Вы обменялись друг с другом фотокарточками. Сколько всего было роздано фотокарточек ?

I.22Б. Из десяти различных цветков нужно составить букет так, чтобы в него входило нечетное число цветков. Сколько существует способов для составления такого букета ?

I.23Б. Сколько различных комбинаций ответов можно дать на n разных вопросов, допускающих только ответ "да" или "нет", если на каждый вопрос должен быть получен ответ ?

I.24Б. 5 девушек и 3 юношей играют в городки. Сколькими способами они могут разбиться на 2 команды по 4 человека, если хотя бы один юноша входит в каждую команду ?

2. КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Контрольные вопросы и упражнения

I. Дайте определение элементарного события, пространства элементарных событий.

2. Составьте пространство элементарных событий Ω , соответствующее эксперименту: произведено 2 выстрела по мишени.

3. Приведите пример опыта с тремя элементарными исходами.

4. Сформулируйте определение события.

5. Дайте определение невозможного события, достоверного. Приведите примеры.

6. Какие события называются несовместными ?

7. Какие элементарные события называются равновозможными? Приведите примеры.

8. Какие события называются противоположными ? Приведите примеры.

9. Что называется суммой (объединением) событий ? произведением (пересечением) событий ?

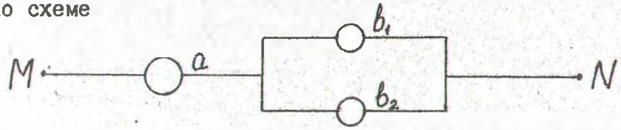
10. Дайте геометрическую интерпретацию понятиям суммы и произведения двух, трех и более событий.

11. Может ли сумма двух событий A и B совпадать с их произведением ?

12. Классическое определение вероятности.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

2.1А. Электрическая цепь между точками M и N составлена по схеме



Событие $A = \{$выход из строя элемента $a\}$; событие $B_i\ (i=1,2) = \{$выход из строя элемента $b_i\}$; событие $C = \{$разрыв цепи$\}$.

Записать через A и B_i выражение для событий C и $\bar{C}$.

2.2А. В сборочном цехе имеется партия валиков в количестве 100 шт., из которых 15 шт. с размерами в пределах первой группы допуска, 40 шт. - в пределах второй группы, 30 шт. - в пределах третьей группы и 15 шт. - в пределах четвертой группы. Сборщик из партии валиков вынимает наугад один. Найти вероятность того, что диаметр взятого валика размером: 1) в пределах первой группы допуска; 2) в пределах второй или третьей группы допуска.

2.3А. Брошены 2 игральные кости: а) какова вероятность выпадания на двух костях в сумме не менее 9 очков ? б) какова вероятность выпадания единицы, по крайней мере на одной кости ?

2.4А. В урне 4 черных и 6 белых шаров. Наугад вынули 3 шара. Найти вероятность того, что среди вынутых шаров: а) 3 белых; б) 2 белых и I черный.

2.5А. В коробке находится 6 одинаковых занумерованных кубиков, Наудачу по одному извлекают все кубики из коробки. Найти вероятность того, что номера извлеченных кубиков появятся в возрастающем порядке.

2.6А. Числа I,2,3,4,5 расставлены случайно. Найти вероятность того, что числа I и 2 расположены рядом и притом в порядке возрастания.

2.7А. Требуется определить вероятность того, что первый собранный узел окажется пониженного качества (см. № I.2А).

2.8А. Набирая номер телефона, абонент забыл последние 3 цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

2.9А. Из урны, содержащей 3 черных, 4 белых и 5 красных шаров, вынули наугад 3 шара. Найти вероятность того, что вынуты разноцветные шары.

2.I0Б. "Секретный" замок содержит на общей оси 4 диска, каждый из которых разделен на 5 секторов с различными написанными на них цифрами. Замок открывается только в том случае, если диски установлены так, что цифры дисков образуют определенное четырехзначное число. Найти вероятность того, что при произвольной установке дисков замок можно будет открыть.

2.IIБ. В автобусе 5 пассажиров. Найти вероятность того, что на каждой из оставшихся 5 остановок будет выходить по одному человеку (предполагается, что каждый из пассажиров с равной вероятностью может выйти на любой остановке).

2.I2Б. N человек случайным образом рассаживаются за круглым столом. Найти вероятность того, что 2 фиксированных лица Д и Ю окажутся сидящими рядом. (Решить в трех пространствах элементарных событий).

2.I3Б. Телефонную книгу раскрыли наугад и выбрали случайный номер телефона. Считая, что телефонные номера состоят из 7 цифр, причем все комбинации цифр равновероятны, найти вероятности следующих событий: А = $\{$четыре последние цифры телефонного номера одинаковы$\}$; В = $\{$все цифры различны$\}$; С = $\{$номер начинается с цифры 5$\}$; Д = $\{$номер содержит три цифры 5, две цифры I и две цифры 2 $\}$.

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

2.14А. В урне 10 белых, 15 черных, 20 синих и 25 красных шаров. Вынули один шар. Найти вероятность того, что этот шар белый, черный или синий.

2.15А. После бури на участке между 40-м и 70-м километром телефонной линии произошел обрыв провода. Какова вероятность того, что разрыв произошел между 50-м и 55-м километром линии?

2.16А. В партии из 50 изделий 5 окрашенных. Из партии выбирают наугад 6 изделий. Определить вероятность того, что среди этих 6 изделий 2 окажутся окрашенными.

2.17А. Слово "ремонт" составлено из разрезной азбуки. Затем карточки с отдельными буквами тщательно перемешиваются, наугад вытаскиваются 4 карточки и раскладываются в порядке вынимания. Какова вероятность получить при этом слово "море"?

2.18А. Студент из 30 вопросов 15 знает хорошо и 10 удовлетворительно. Найти вероятность того, что из 3 вопросов билета 2 он знает хорошо и I не знает.

2.19А. Из 6 букв разрезной азбуки составлено слово "ананас". Ребенок, не умеющий читать, рассыпал эти буквы и затем собрал в произвольном порядке. Найти вероятность того, что у него снова получилось слово "ананас".

2.20А. Подбросили 2 игральные кости. Найти вероятности следующих событий: $A = \{$число очков на обеих костях совпадает$\}$, $B = \{$число очков на первой кости больше, чем на второй$\}$, $Д = \{$сумма очков больше двух$\}$, $F = \{$хотя бы на одной кости появится 6 очков$\}$.

2.21А. В первом ящике находятся шары с номерами от I до 5, а во втором – с номерами от 6 до 10. Из каждого ящика вынули по одному шару. Какова вероятность того, что сумма номеров вынутых шаров: а) не меньше 7; б) равна 11.

2.22Б. Группа, состоящая из 8 человек, занимает место с одной стороны прямоугольного стола. Найти вероятность того, что 2 определенных лица окажутся рядом, если: а) число мест равно 8; б) число мест равно 12.

2.23Б. В лифт семиэтажного дома на первом этаже вошли 3 человека. Каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любом из этажей, начиная со второго. Найти вероятности следующих событий: $A = \{$все пассажиры выйдут на четвертом этаже$\}$;

B = { все пассажиры выйдут одновременно на одном и том же этаже } ; C = { все пассажиры выйдут на разных этажах } .

2.24Б. Газ, состоящий из n молекул, находится в замкнутом сосуде. Мысленно разделим сосуд на n равных клеток и будем считать, что вероятность каждой молекулы попасть в каждую из n клеток одна и та же. Какова вероятность того, что молекулы окажутся распределенными так, что в 1- й клетке окажутся m_1 молекул, во 2 - ой - m_2 молекул и т.д., наконец, в n -й - m_n молекул ?

Задачи на повторение

2.25А. В кармане имеется несколько монет достоинством в 2 коп. и 10 коп (на ощупь неразличимых). Известно, что двухкопеечных монет втрое больше, чем гривенников. Наугад вынимается одна монета. Какова вероятность того, что это будет гривенник ?

2.26А. В урне 20 шаров с номерами от 1 до 20. Какова вероятность вынуть шар с номером 37 или 15 ?

2.27А. Из отвала, содержащего на поверхности n кусков окисленной руды и n' кусков сульфидной руды, отобрано наудачу m образцов и отправлено в лабораторию для анализа. При вскрытии ящика с образцами оказалось, что первые k из вынутых кусков относятся к руде окисленной. Какова вероятность того, что и следующий кусок будет относится к той же руде ? При решении задачи принять , что любые m из $n'+n$ кусков на поверхности отвала могли быть отобраны в ящик с одинаковой вероятностью.

2.28А. 1 сентября на первом курсе одного из факультетов запланированы по расписанию 3 лекции по различным предметам. Всего на курсе изучается 10 предметов. Какова вероятность угадать расписание занятий на 1 сентября, если считать, что любое расписание из 3 предметов равновозможно ?

2.29А. В урне 3 белых и 7 черных шаров. Какова вероятность того, что вынутые наугад 2 шара окажутся черными ?

2.30А. Студенческая группа, состоящая из 20 студентов, среди которых 6 девушек, получила 5 билетов в театр. Билеты разделили среди студентов случайным образом. Найти вероятность того, что 3 билета в театр достались девушкам.

2.31А. Известно, что 30 % болтов имеют положительное отклонение диаметра от номинала, а 70 % - отрицательное отклонение от номинала. Из партии болтов объемом n = 100 выбраны случайным образом 3 болта. Найти вероятность того, что: а) один из болтов является "плюсовым"; б) все 3 болта будут иметь отрицательное отклонение от номинала.

2.32А. Брошены 3 монеты. Найти вероятность того, что выпадут 2 "герба".

2.33Б. Три билета с номерами I,2,3, последовательно вынимаемые из ящика, имеют одинаковую вероятность появиться в любом порядке. Нужно определить вероятность того, что порядковый номер, по крайней мере, у одного из билетов совпадает с его собственным номером.

2.34Б. А и В и еще 8 человек стоят в очереди. Определить вероятность того, что А и В отделены друг от друга тремя лицами.

2.35Б. К четырехстороннему перекрестку подъехало с каждой стороны по автомобилю. Каждый автомобиль может с равной вероятностью совершить один из четырех маневров на перекрестке: развернуться и поехать обратно, поехать прямо, направо или налево. Через некоторое время все автомобили покинули перекресток. Найти вероятности следующих событий: $A = \{$все автомобили поедут по одной и той же улице$\}$; $B = \{$3 автомобиля поедут по одной и той же улице$\}$; $C = \{$по каждой из четырех улиц поедет ровно I автомобиль$\}$.

2.36Б. 7 яблок, 3 апельсина и 5 лимонов раскладываются случайным образом в 3 пакета, но так, чтобы в каждом было одинаковое число фруктов. Найти вероятность того, что в каждом из пакетов по одному апельсину.

2.37Б. Две монеты радиуса r занимают произвольное положение внутри круга радиуса R. В данный круг наудачу бросают точку. Определить вероятность того, что эта точка упадет на одну из монет, если монеты не пересекаются.

2.38Б. В некоторой точке С телефонной линии АВ длины L произошел разрыв. Определить вероятность того, что точка С удалена от точки А на расстояние не меньше l ?

2.39Б. Кусок проволоки длиною в 20 см был согнут наудачу в выбранной точке. Затем проволоку перегнули еще в двух местах таким образом, чтобы образовалась прямоугольная рамка. Найти вероятность того, что площадь полученной рамки не превосходит 21 см^2.

2.40Б. Точка появляется в эллипсе $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Найти вероятность того, что она окажется внутри эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=k^2$, $|k|<1$, считая, что вероятность появления точки в области пропорциональна ее площади.

2.41Б. Предполагая, что все значения $|p|\le 1$, $|q|\le 1$ равновероятны и единственно возможны, определить вероятность того, что корни уравнения $x^2+px+q=0$ действительны.

2.42Б. (Задача о встрече). Два лица А и В условились встретиться в определенном месте между двумя и тремя часами дня. Пришедший первым ждет другого в течение 10 мин, после чего уходит. Чему равна вероятность встречи этих лиц, если приход каждого из них в течение указанного часа может произойти в любое время ?

2.43Б. Рабочий обслуживает 2 машины. Длительные наблюдения показали, что каждой из этих машин он уделяет 8 мин в течение каждого часа. Найти вероятность того, что в течение 1 ч машина потребует внимания рабочего тогда, когда он будет занят обслуживанием второй машины.

3. ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Контрольные вопросы и упражнения

1. Дайте определение вероятностного пространства.
2. Сформулируйте определение условной вероятности.
3. Запишите теоремы сложения и умножения вероятностей.
4. Какие события называются независимыми ? Приведите примеры. Зависимы или независимы несовместные события ?

Задачи и упражнения для аудиторной работы

3.1А. Событие А = {хотя бы одно из имеющихся четырех изделий бракованное}, событие В = {бракованных изделий не менее двух}. Что означают противоположные события $\bar{A}$ и $\bar{B}$?

3.2А. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,6. После первого попадания стрельба прекращается. Найти вероятность того, что будет произведено ровно 4 выстрела.

3.3А. Три стрелка производят по одному выстрелу по цели, вероятность попадания в которую равна: для первого стрелка 0,6;

для второго - 0,7, для третьего - 0,8. Найти вероятность одного попадания в цель.

3.4А. Достаточным условием сдачи коллоквиума является ответ на один из двух вопросов, предлагаемых преподавателем студенту. Студент не знает ответов на восемь вопросов из тех сорока, которые могут быть предложены. Какова вероятность сдачи коллоквиума. ?

3.5А. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,5. По мишени стреляют одиночными выстрелами до первого попадания, после чего стрельбу прекращают. Найти вероятность того, что будет сделано не более трех выстрелов.

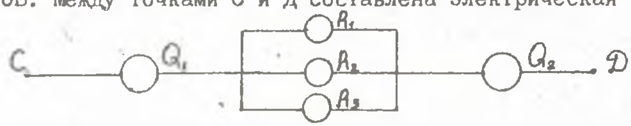
3.6А. Рабочий обслуживает 3 станка, работающих независимо друг от друга. Вероятность того, что в течение часа не потребует внимания рабочего первый станок - 0,9, второй - 0,8, третий - 0,85. Найти вероятность того, что в течение часа хотя бы один станок потребует внимания рабочего.

3.7А. На предприятии брак составляет в среднем 1,5 % от общего выпуска изделий. Среди годных изделий первый сорт составляет 80 %. Какова вероятность того, что наудачу взятое изделие окажется изделием первого сорта, если оно взято из общей массы подготовленной продукции ?

3.8А. Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и поэтому набирает наудачу. Определить вероятность того, что ему придется звонить не более чем в четыре места.

3.9Б. Известно, что событие В влечет событие А ($B \subseteq A$). Следует ли из $\overline{B}$, что $\overline{A}$ произошло ?

3.10Б. Между точками С и Д составлена электрическая цепь



Выходы из строя за время t элементов цепи характеризуются следующими вероятностями:

элемент	Q_1	Q_2	A_1	A_2	A_3
вероятность	0,5	0,7	0,6	0,8	0,4

и являются событиями независимыми.

Определить вероятно ть разрыва цепи за указанный промежуток времени.

3.IIБ. Два игрока поочередно бросают монету. Выигрывает тот игрок, у которого раньше выпадет "герб". Определить вероятность выигрыша для каждого из игроков.

3.I2Б. На станцию связи за день поступило 20 телеграмм, адресованных в 4 различных пункта (по 5 в каждый пункт). Из всех телеграмм выбирают наугад 4 телеграммы. Найти вероятности событий: $A = \{$все телеграммы адресованы в разные пункты$\}$; $B = \{$все телеграммы адресованы в один и тот же пункт$\}$.

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

3.I3А. При движении автомобиля на его левые и правые колеса попадают препятствия (выступы и впадины дорожного полотна). Пусть A означает событие, заключающееся в попадании препятствия под левое колесо, B – под правое колесо. Какой смысл имеют события: а) $\bar{A}$; в) $A+B$; г) $\overline{A+B}$?

3.I4А. Студент разыскивает нужную ему формулу в трех справочниках. Вероятность того, что формула содержится в первом, втором, третьем справочниках, соответственно равна 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятности того, что формула содержится : а) только в одном справочнике; б) только в двух справочниках; в) во всех трех справочниках.

3.I5А. Вероятности того, что нужная сборщику деталь находится в первом, втором, третьем, четвертом ящиках соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8; 0,9. Найти вероятности того, что деталь содержится: а) не более чем в трех ящиках; б) не менее чем в двух ящиках.

3.I6А. Блок-схема составлена из двух последовательно соединенных элементов (I и 2). Вероятности выхода из строя этих элементов соответственно равны $p_1 = 0{,}I$ и $p_2 = 0{,}2$. Определить вероятность выхода из строя цепи.

3.I7А. Охотник выстрелил 3 раза по удаляющейся цели. Вероятность попадания в нее в начале стрельбы равна 0,8 и после каждого выстрела уменьшается на 0,I. Найти вероятность того, что он: а) промахнется все 3 раза; б) попадет хотя бы I раз; в) попадет 2 раза.

3.I8А. Случайным образом записывается рациональная дробь, числитель и знаменатель которой двузначные числа. Какова вероятность того, что эта дробь: а) сократима на 5; б) несократима на 9 ?

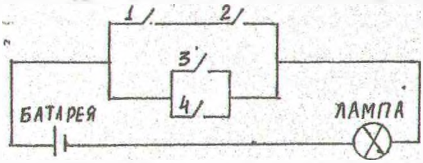
3.I9А. Студенты выполняют контрольную работу в классе контролирующих машин. Работа состоит из трех задач и оценивается положительно, если решено не менее двух задач. Для каждой задачи зашифровано 5 различных ответов, из которых только I правильный. Студент Иванов выбирает ответы для каждой задачи наудачу. Какова вероятность того, что он получит положительную оценку ?

3.20А. В собираемый механизм входят 2 одинаковые шестерни. Технические условия нарушаются, если они окажутся с отклонениями по толщине зуба в плюс от среднего размера (заедание). У сборщика имеется I0 шестерен, из которых 3 "плюсовые ". Требуется определить вероятность нарушения технических условий на сборке.

3.2IБ. Сколько раз нужно повторить испытание, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,75, утверждать, что хотя бы один раз произойдет событие А, вероятность появления которого в каждом испытании равна 0,05 ?

3.22Б. Вероятность того, что в южном городе N температура в июле в любой день меньше 5^0, равна α (α – малое число, квадратом которого можно пренебречь). Какова вероятность того, что в течение первых трех дней июля температура будет не меньше 5^0 ?

3.23Б. Найти вероятность того, что в цепи, изображенной на рисунке, лампочка будет гореть (т.е.цепь будет замкнута), если известно, что любой из переключателей I,2,3,4, независимо от других, с одинаковой вероятностью может быть замкнут или разомкнут.



Задачи на повторение

3.24А. Событие А – $\{$хотя бы одна из трех проверяемых деталей бракованная$\}$, В – $\{$все детали доброкачественные$\}$. Что означает событие: а) А + В; б) АВ ?

3.25А. В первом ящике 2 белых и I0 черных шаров, во втором ящике 8 белых и 4 черных шара. Из каждого ящика вынули по шару. Какова вероятность, что оба шара белые ?

3.26А. В ящике I0 красных и 6 синих пуговиц. Вынимают наудачу 2 пуговицы. Какова вероятность того, что пуговицы будут одноцветными ?

3.27А. В двух урнах находятся шары, отличающиеся только цветом, причем в первой урне 5 белых шаров, II черных и 8 красных, а во второй – соответственно 10, 8, 6. Из обеих урн наудачу извлекают по одному шару. Какова вероятность, что оба шара одного цвета ?

3.28А. В первом ящике I белый, 2 красных и 3 синих шара; во втором ящике 2 белых, 6 красных и 4 синих шара. Из каждого ящика вынули по шару. Какова вероятность, что среди вынутых шаров нет синих ?

3.29А. Бросают 4 игральные кости. Найти вероятность того, что на них выпадет по одинаковому числу очков.

3.30А. Два стрелка, для которых вероятности попадания в мишень равны соответственно 0,7 и 0,8, производят по одному выстрелу. Определить вероятность хотя бы одного попадания в мишень.

3.31А. Производится стрельба по удаляющейся цели. При первом выстреле вероятность попадания равна 0,8; при каждом следующем выстреле вероятность уменьшается в 2 раза. Произведено 4 выстрела. Определить вероятности следующих событий: $A = \{$хотя бы одно попадание$\}$; $B = \{$ровно одно попадание$\}$.

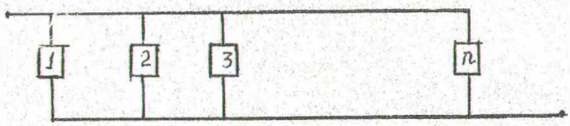
3.32А. Имеются три урны с номерами 1,2,3. В первой урне 7 белых и 5 черных шаров, во второй – 3 белых и 7 черных шаров, в третьей – 2 белых и 3 черных шара. Из каждой урны наудачу извлекают по одному шару. Найти вероятности событий: $A = \{$в выборке будет ровно 2 белых шара$\}$; $B = \{$в выборке больше белых шаров, чем черных$\}$.

3.33А. Из урны, содержащей 6 белых и 4 черных шара, наудачу и последовательно извлекают по одному шару до появления черного шара. Найти вероятность того, что придется производить четвертое извлечение, если выборка производится: а) с возвращением; б) без возвращения.

3.34А. В шкафу находится 9 однотипных приборов. В начале опыта все они новые (ни разу не бывшие в эксплуатации). Для временной эксплуатации берут наугад 3 прибора; после эксплуатации их возвращают в шкаф. На вид прибор, бывший в эксплуатации, не отличается от нового. Найти вероятность события $A = \{$после трехкратного выбора и эксплуатации не останется новых приборов$\}$.

3.35А. Детали могут быть изготовлены с применением двух технологий: в первом случае деталь проходит 3 технологические операции, вероятности получения брака при каждой из которых равны соответственно 0,0I; 0,02;0,03. Во втором случае деталь проходит 2 операции, вероятности получения брака при которых одинаковы и равны 0,03. Определить, какая технология обеспечивает большую вероятность получения первосортной продукции, если в первом случае для доброкачественной детали вероятность получения продукции первого сорта равна 0,9, а во втором - 0,8.

3.36Б. Вероятность безотказной работы одного элемента



релейной схемы в течение времени Т равна 0,3. Для повышения надежности схемы параллельно подсоединяют n элементов. Каково должно быть n, чтобы вероятность безотказной работы схемы за время Т была не менее 0,99 ?

3.37Б. В лотерее n билетов, из которых m выигрышных. Какова вероятность выиграть, имея k билетов ?

3.38Б. Каждый из I0 аспирантов группы случайным образом и независимо от остальных выбирает один из четырех дней наступающей недели (понедельник, вторник, среда или четверг) для работы в библиотеке. Найти вероятности следующих событий: А = $\{$в понедельник в библиотеку явится I аспирант, во вторник - 2, в среду - 3, в четверг - 4 аспиранта$\}$; В = $\{$все I0 аспирантов соберутся в четверг$\}$.

3.39Б. Из сосуда, содержащего 2 белых и 4 черных шара, двое поочередно извлекают шары и не возвращают обратно в сосуд. Вычислить вероятность вынуть первым белый шар каждому из участников.

3.40Б. Вероятность поражения стрелком мишени при каждом выстреле равна q. Найти вероятность того, что число последовательных (подряд) промахов будет оставаться меньше трех в течение: а) трех выстрелов; б) четырех выстрелов; в) пяти выстрелов.

4. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ. ФОРМУЛА БАЙЕСА

Контрольные вопросы и упражнения

1. Дайте определение полной группы событий.

2. Запишите формулу полной вероятности. Приведите примеры ее применения.

3. Запишите формулу Байеса. Приведите примеры ее применения.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

4.1А. Имеются две урны. В первой урне два белых и три черных шара, во второй - три белых и пять черных. Из первой и второй урн наугад берут по одному шару и кладут их в третью урну. Из третьей урны наугад берут один шар. Найти вероятность того, что это белый шар.

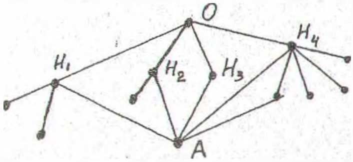
4.2А. Два автомата производят детали, которые поступают на общий конвейер. Вероятность получения нестандартной детали на первом автомате равна 0,075, а на втором - 0,09. Производительность второго автомата вдвое больше, чем первого. Найти вероятность того, что наугад взятая с конвейера деталь нестандартная.

4.3А. На распределительной базе находятся электрические лампочки, изготовленные на двух заводах. Среди них 60 % изготовлено на первом заводе и 40 % - на втором. Известно, что из каждых 100 лампочек, изготовленных на первом заводе, 99 соответствует стандарту, а из 100 лампочек, изготовленных на втором заводе, соответствует стандарту 98. Определить вероятность того, что взятая наудачу лампочка с базы будет соответствовать стандарту.

4.4А. В цехе работает 20 станков. Из них 10 - марки А, 6 - марки В, 4 - марки С. Вероятность того, что качество детали окажется отличным, для этих станков соответственно равна 0,9; 0,8; 0,7. Какой процент отличных деталей выпускает цех в целом ?

4.5А. На наблюдательной станции установлены 4 радиолокатора различных конструкций. Вероятность обнаружения цели с помощью первого локатора равна 0,86; второго - 0,9; третьего - 0,92; четвертого - 0,95. Наблюдатель наугад включает один из локаторов. Какова вероятность обнаружения цели ?

4.6А. На рисунке изображена схема дорог. Туристы вышли из пункта 0, выбирая наугад на разветвлении дорог один из возможных путей. Какова вероятность того, что они попадут в пункт А ?



4.7А. Имеются 2 партии одинаковых изделий по I5 и 20 шт., причем в первой партии 2, а во второй - 3 бракованных изделия. Наудачу взятые 3 изделия из первой партии переложены во вторую, после чего выбирается наудачу I изделие из второй партии. Определить вероятность того, что выбранное изделие является бракованным.

4.8Б. (Задача-сказка). Один властелин, которому надоел его звездочет со своими ложными предсказаниями, решил казнить его. Однако он решил дать звездочету последний шанс. Ему было велено распределить по двум урнам 4 шара: 2 черных и 2 белых. Палач выберет наугад одну из урн и из нее вытащит один шар. Если шар будет черным, то звездочета казнят, в противном случае его жизнь будет спасена. Каким образом звездочет должен разместить шары в урнах, чтобы обеспечить себе максимальную вероятность быть спасенным ? (Ответ обосновать).

4.9Б. В каждой из трех урн содержится 6 черных и 4 белых шара. Из первой урны наудачу извлечен один шар и переложен во вторую урну, после чего из второй урны наудачу извлечен один шар и переложен в третью урну. Найти вероятность того, что шар, наудачу извлеченный из третьей урны, окажется белым.

4.IOБ. На фабрике, изготовляющей болты, первая машина производит 25 %, вторая - 35 %, третья - 40 % всех изделий. В их продукции брак составляет соответственно 5, 4 и 2 %. Случайно выбранный болт оказался дефектным. Какова вероятность того, что он был произведен третьей машиной ?

4.IIБ. Вероятности определения химического состава проверяемых деталей на промежуточном контроле для каждого из трех контролеров соответственно равны 4/5 , 3/4, 2/3. При одновременном контроле тремя контролерами химический состав трех деталей оказался правильно определенным для двух деталей. Найти вероятность того, что недостаточный контроль провел третий контролер.

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

4.12А. В лаборатории имеется 6 автоматов и 4 полуавтомата. Вероятность того, что за время выполнения некоторого расчета автомат не выйдет из строя, равна 0,95; для полуавтомата эта вероятность равна 0,8. Студент производит расчет на наудачу взятой машине. Найти вероятность того, что до окончания расчета машина не выйдет из строя.

4.13А. В тире имеется 6 ружей, вероятности попадания из которых равны соответственно 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,8; 0,9. Определить вероятность попадания при одном выстреле, если стреляющий берет одно из ружей наудачу.

4.14А. С первого автомата на сборку поступает 40 %, со второго – 35 %, с третьего – 25 % деталей. Среди деталей первого автомата 0,2 % бракованных, второго – 0,3 %, третьего – 0,5 %. Найти вероятность того, что поступившая на сборку деталь бракованная.

4.15А. В ящике содержится 12 деталей завода № 1, 20 деталей завода № 2, 18 деталей завода № 3. Вероятность того, что детали завода № 1 отличного качества, равна 0,9; для деталей завода № 2 и № 3 эти вероятности соответственно равны 0,6 и 0,9. Найти вероятность того, что извлеченная наудачу деталь окажется отличного качества.

4.16А. Вероятности того, что во время работы цифровой электронной машины возникает сбой в арифметическом устройстве, в оперативной памяти, в остальных устройствах, относятся как 3:2:5. Вероятности обнаружения сбоя в арифметическом устройстве, в оперативной памяти и в остальных устройствах соответственно равны 0,8; 0,9; 0,9. Найти вероятность того, что возникший в машине сбой будет обнаружен.

4.17А. В ящике имеется 5 деталей, изготовленных заводом № 1, и 10 деталей, изготовленных заводом № 2. Сборщик последовательно вынимает из ящика детали одну за другой. Найти вероятность того, что во второй раз будет извлечена деталь, изготовленная заводом № 1.

4.18Б. По цели производится 3 независимых выстрела. Вероятность попадания в цель при первом выстреле равна 0,1, при втором – 0,2 и при третьем – 0,3. Для поражения цели достаточно двух попаданий. При одном попадании цель поражается с вероятностью 0,6. Найти вероятность поражения цели.

4.19Б. В ящике лежат 20 теннисных мячей, в том числе 15 новых и 5 играных. Для игры наудачу выбирают 2 мяча и после игры возвращают обратно. Затем для второй игры также наудачу извлекают 2 мяча. Какова вероятность того, что вторая игра будет проводиться новыми мячами ?

4.20Б. Четыре стрелка независимо один от другого стреляют по одной мишени, делая каждый по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,4, для второго - 0,6, для третьего - 0,7, для четвертого - 0,8. После стрельбы в мишени обнаружены 3 пробоины. Найти вероятность того, что промахнулся четвертый стрелок.

Задачи на повторение

4.21А. Имеются три урны. В первой a белых шаров и b черных; во второй - c белых и d черных; в третьей - только белые. Из какой-то одной урны наугад вынули один шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

4.22А. В телевизионном ателье имеются 4 кинескопа. Вероятность того, что кинескоп выдержит гарантийный срок службы, соответственно равна 0,8; 0,85; 0,9; 0,95. Найти вероятность того, что взятый наугад кинескоп выдержит гарантийный срок службы.

4.23А. В группе спортсменов 20 лыжников, 6 велосипедистов, 4 бегуна. Вероятность выполнения квалификационной нормы равна: для лыжника 0,9; для велосипедиста 0,8; для бегуна 0,75. Найти вероятность того, что спортсмен, вызванный наудачу, выполнит норму.

4.24А. Характеристика материала, взятого для изготовления продукции, с вероятностями 0,18; 0,32; 0,5 может находиться в трех различных интервалах. В зависимости от свойств материала вероятности получения первосортной продукции равны соответственно 0,5; 0,7; 0,9. Определить вероятность получения первосортной продукции.

4.25А. В сборочный цех завода поступают детали с трех автоматов. I автомат дает 3 % брака, II - 1 % и III - 2 %. Определить вероятность попадания на сборку небракованной детали, если с каждого автомата поступило соответственно 500, 200, 300 деталей.

4.26А. Прибор может работать в двух режимах: нормальном и особом. Нормальный режим наблюдается в 80 % всех случаев работы на приборе; особый - в 20 %. Вероятность выхода прибора из строя за время t в нормальном режиме равна 0,I, в особом - 0,7. Найти полную вероятность выхода прибора из строя за время t.

4.27А. Деталь, необходимая для сборки прибора, поступает с двух автоматов, производительность которых одинакова. Вычислить вероятность поступления на сборку стандартной детали, если один из автоматов дает в среднем 3 % нарушений стандарта, а второй - 2 %.

4.28А. Два датчика посылают сигналы в общий канал связи, причем первый из них посылает втрое больше сигналов, чем второй. Вероятность получить искаженный сигнал от первого датчика - 0,01, от второго - 0,03. Какова вероятность получить искаженный сигнал в общем канале связи ?

4.29А. Имеются две урны: в первой a белых шаров и b черных; во второй - c белых и d черных. Из первой урны во вторую перекладывают, не глядя, один шар. После этого из второй урны берут один шар. Найти вероятность того, что этот шар будет белым.

4.30А. Из трамвайного парка в случайном порядке выходят 4 трамвая № I и 8 трамваев маршрута № 2. Найти вероятность того, что второй из вышедших на линию трамваев будет иметь № I.

4.31Б. В урну, содержащую 3 шара, опустили белый шар, после чего из урны наудачу извлекли 2 шара. Найти вероятность того, что извлеченные шары окажутся белыми. (Любые предположения о первоначальном числе белых шаров в урне равновозможны).

4.32Б. Из полного комплекта домино (28 шт.) наугад берут 2 кости. Определить вероятность того, что вторую кость можно приставить к первой.

4.33Б. В первой урне находится 6 белых и 4 черных шара,во второй - 3 белых и 2 черных. Из первой урны наудачу извлекают сразу 3 шара. Шары того цвета, которые окажутся в большинстве, опускают во вторую урну и перемешивают. После этого из второй урны наудачу извлекают один шар. Какова вероятность того, что этот шар белый ?

4.34Б. Потоки грузовых и легковых автомашин, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относятся как 3:2. Вероятность того, что будет заправляться грузовая машина,равна 0,I; для легковой автомашины эта вероятность равна 0,2. К бензоколонке подъехала для заправки машина. Найти вероятность того, что эта машина грузовая.

5. ПОВТОРЕНИЕ ИСПЫТАНИЙ

Контрольные вопросы и упражнения

1. Дайте определение схемы Бернулли. Приведите примеры опытов, которые приводят к схеме Бернулли.

2. Напишите формулу определения вероятности того, что в n независимых опытах некоторое событие А появится ровно m раз, если в отдельном опыте вероятность появления события равна p .

3. Сформулируйте локальную теорему Муавра-Лапласа, теорему Пуассона, интегральную теорему Муавра-Лапласа.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

5.1А. В урне 20 белых и 10 черных шаров. Случайным образом вынули подряд 4 шара, возвращая каждый раз вынутый шар в урну. Какова вероятность того, что из четырех вынутых шаров окажется два белых.

5.2А. Рабочий обслуживает 10 однотипных станков. Вероятность того, что станок потребует внимания рабочего в течение часа, равна 0,05. Найти вероятность того, что в течение часа этих требований будет от 3 до 5.

5.3А. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,4. По мишени производится 7 независимых выстрелов. Найти вероятность хотя бы одного попадания в мишень.

5.4А. В мастерской независимо работают 10 моторов. При существующем режиме работы вероятность того, что мотор в данный момент работает с полной нагрузкой, равна 0,8. Найти вероятность того, что в данный момент не менее 8 моторов работают с полной нагрузкой.

5.5А. Определить вероятность того, что в серии из 1000 независимых опытов число удачных опытов будет равно 450, если вероятность того, что опыт будет удачен, постоянна и равна 0,5.

5.6А. При установившемся технологическом процессе 60 % всех изготовляемых заводом изделий выпускается высшим сортом. Приемщик наугад берет 200 шт. изделий. Чему равна вероятность того, что среди них изделий высшего сорта окажется от 120 до 150 шт.?

5.7А. Вероятность выпуска сверла повышенной хрупкости (брак) равна 0,02. Сверла случайным образом укладывают в коробки по 100 шт. Найти вероятность того, что: а) в коробке не окажется бракованных сверл; б) число бракованных сверл окажется не более 3.

5.8А. Что вероятнее - выиграть у равносильного противника в игре, в которой нет ничейных исходов, не менее четырех партий из пяти или не менее пяти партий из восьми ?

5.9Б. Производятся независимые испытания прибора. При каждом испытании прибор выходит из строя с вероятностью 0,1. После первого выхода из строя прибор ремонтируется, после второго - признается негодным. Найти вероятность того, что прибор окончательно выйдет из строя точно при шестом испытании.

5.10Б. Вероятность для данного баскетболиста забросить мяч в корзину при броске равна 0,3. Произведено 12 независимых бросков. Найти наивероятнейшее число попаданий и соответствующую вероятность.

5.11Б. Вероятность возникновения опасной для прибора перегрузки в каждом опыте равна 0,4. Определить вероятность отказа прибора в серии из трех независимых опытов, если вероятности отказа прибора при одной, двух и трех опасных перегрузках соответственно равны: 0,2; 0,5 и 0,8.

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

5.12А. Вероятность выигрыша по облигации займа за время его действия 0,25. Найти вероятность того, что из 8 случайным образом приобретенных облигаций 6 будет выигрышных.

5.13А. По цели производится 5 независимых выстрелов. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,6. Для получения зачета по стрельбе требуется более двух попаданий. Найти вероятность получения зачета.

5.14А. Вероятность того, что любой абонент звонит на коммутатор в течение часа, равна 0,005. Телефонная станция обслуживает 600 абонентов. Какова вероятность того, что в течение часа позвонят 5 абонентов ?

5.15А. В партии из 1000 изделий имеется 10 дефектных. Найти вероятность того, что среди наудачу взятых из этой партии 50 изделий ровно 5 окажутся дефектными.

5.16А. Вероятность выхода из строя за некоторое время T одного конденсатора равна 0,2. Определить вероятность того, что из 100 независимо работающих конденсаторов в течение времени T выйдет из строя: а) не менее 30 и менее 60 конденсаторов;

б) не более 20 конденсаторов; в) более 20 конденсаторов.

5.17А. Монету подбрасывают 5 раз. Найти вероятность того, что "герб" выпадет менее 4 раз.

5.18А. Вероятность того, что изделие не выдержит испытания, равна 0,0004. Найти вероятность того, что из 1000 наудачу взятых изделий не выдержат испытаний не менее 2 изделий.

5.19Б. Вероятность получения удачного результата при производстве сложного химического опыта равна 2/3. Найти наивероятнейшее число удачных опытов, если было проведено 7 независимых испытаний.

5.20Б. Во время каждого из опытов на 1 ч. в цепь включается батарея мощностью 120 Вт и 200 Вт; вероятности благоприятного исхода опыта равны соответственно 0,06 и 0,08. Результат проведенной серии опытов считается достигнутым в случае хотя бы одного благоприятного исхода опыта с батареей в 200 Вт или хотя бы двух с батареей в 120 Вт. Общая энергия, затраченная на проведение всех опытов, не может превышать 1200 Вт.ч. Какие батареи выгоднее использовать ?

5.21Б. Какова вероятность попадания при одном выстреле, если при четырех независимых выстрелах $P_4(0) = P_4(1)$?

Задачи на повторение

5.22А. Наблюдениями установлено, что в некоторой местности в сентябре в среднем бывает 12 дождливых дней. Какова вероятность, что из случайно взятых в этом месяце 8 дней 3 окажутся дождливыми ?

5.23А. Игральную кость подбрасывают 5 раз. Найти вероятность того, что 2 раза появится число очков, кратное 3.

5.24А. Устройство состоит из 8 независимо работающих элементов. Вероятности отказа каждого элемента за время T одинаковы и равны 0,2. Найти вероятность отказа прибора, если для этого достаточно, чтобы отказали хотя бы 2 элемента из 8.

5.25А. По каналу связи передается 6 сообщений, каждое из которых, независимо от других, с вероятностью 0,2 оказывается искаженным. Найти вероятности следующих событий: C = {ровно 2 сообщения искажены} ; Д = {не менее 3 сообщений искажены}.

5.26А. Какова вероятность того, что хотя бы один из трех независимых узлов (рама, передняя и задняя оси, подвеска) ходовой части автомобиля останется исправным после 1000-километрового пробега, если известно, что для каждого узла такая вероятность равна 0,9 ?

5.27А. Электростанция обслуживает сеть с 10000 независимо работающими лампами, вероятность включения каждой из которых вечером равна 0,6. Определить вероятность того, что число одновременно включенных ламп будет находиться между 5900 и 6100.

5.28А. При массовом производстве полупроводниковых диодов вероятность брака при формовке равна 0,1. Какова вероятность того, что из 400 наугад взятых диодов 50 будет бракованных ?

5.29А. На факультете насчитывается 500 студентов. Какова вероятность того, что 1 сентября является днем рождения одновременно для 2 студентов данного факультета ?

5.30А. Прядильщица обслуживает 1000 независимо работающих веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение 1 мин равна 0,004. Найти вероятность того, что в течение 1 мин обрыв произойдет на 5 веретенах.

5.31А. Если в среднем левши составляют 1 %, каковы шансы на то, что среди 200 человек: а) окажется ровно четверо левшей; б) можно найти четверо левшей ?

5.32А. Производство дает 1 % брака. Какова вероятность того, что из наугад взятых на исследование 1100 изделий выбраковано будет больше 17 ?

5.33Б. Для данного баскетболиста вероятность забросить мяч в корзину при броске равна 0,4. Произведено 10 независимых бросков. Найти наивероятнейшее число попаданий и соответствующую вероятность.

5.34Б. Вероятность наступления события в каждом испытании равна 0,1. Сколько надо провести независимых испытаний, чтобы с вероятностью 0,9 можно было ожидать, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности не более чем на 0,06 ?

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

Вариант 1

1А. В книге 96 страниц. Какова вероятность того, что порядковый номер наудачу взятой страницы будет четным числом ?

2А. Батарея из 3 орудий производит залп по цели. Вероятности попадания в цель первым, вторым и третьим орудиями соответственно равны 0,7; 0,8; 0,9. Найти вероятность того, что цель поражена хотя бы двумя попаданиями.

3А. На склад поступают одинаковые электрические утюги. I завод поставляет 80 %, II - 20 % всех утюгов. Известно, что I завод выпускает 90 % продукции, способной прослужить положенный срок, а II - 95 %. Какова вероятность того, что наугад взятый утюг прослужит положенный срок ?

4Б. Техническое устройство состоит из 5 узлов; каждый узел во время эксплуатации отказывает (выходит из строя) с вероятностью 0,4. Отдельные узлы отказывают независимо друг от друга. Если откажет более 2 узлов, устройство не может работать; если откажет I или 2 узла, оно работает, но с пониженной эффективностью. Найти вероятности событий: $B = \{$устройство может работать$\}$; $E = \{$устройство работает с пониженной эффективностью$\}$.

5Б. В двух ящиках содержится по I5 деталей, причем из них в первом ящике 9, во втором - I0 стандартных изделий. Из первого ящика наудачу извлечены 2 детали и переложены во второй ящик. Найти вероятность того, что наудачу извлеченная после этого деталь из второго ящика будет стандартной.

Вариант 2

IА. В ящике I2 писем, из них 7 иногородних и 5 городских. Какова вероятность, что среди вынутых наугад 5 писем окажется 3 иногородних ?

2А. Два спортсмена участвуют в соревнованиях. Вероятность того, что I спортсмен выполнит норму мастера, равна 0,95, а II - 0,9. Найти вероятность того, что норма будет выполнена: а) только одним спортсменом; б) хотя бы одним спортсменом.

3А. Сборщик получил 2 коробки одинаковых деталей, изготовленных заводом № I, и 3 коробки деталей, изготовленных заводом № 2. Вероятность того, что деталь завода № I стандартна, равна 0,9, а заводом № 2 - 0,85. Из произвольно взятой коробки сборщик наудачу извлек деталь. Найти вероятность того, что извлечена стандартная деталь.

4Б. Завод отправил на базу 5000 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равна 0,0002. Найти и приближенно оценить вероятность того, что на базу прибудут менее 2 негодных изделий.

5Б. На трех станках обрабатывают однотипные детали. Вероятность брака для I станка равна 0,02; для II - 0,03; для III - 0,04. Обработанные детали складывают в один ящик.

Производительность I станка в 3 раза больше, чем II, а III-в 2 раза меньше, чем II. Определить вероятность того, что взятая наудачу деталь окажется бракованной.

6. ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Контрольные вопросы и упражнения

I. Сформулируйте определения: случайной величины; дискретной случайной величины; ряда распределения дискретной случайной величины (многоугольника распределения); математического ожидания дискретной случайной величины; дисперсии случайной величины; среднего квадратичного отклонения случайной величины; функции распределения случайной величины.

2. Перечислите основные свойства математического ожидания, дисперсии, функции распределения случайной величины.

3. Укажите размерности математического ожидания, дисперсии, среднего квадратичного отклонения, функции распределения случайной величины.

4. Дайте определения биномиального распределения и распределения Пуассона. Какова между ними связь ?

5. Приведите примеры случайных величин, связанных со следующим опытом: игральная кость подброшена 3 раза.

6. Какие из следующих таблиц:

а)

ξ	0	I	2	3
p	0,I	0,5	0,I	0,3

б)

ξ	I	2	3	4
p	0	0,4	0,2	0,3

в)

ξ	I	I	2	3
p	0,I	0,2	0,3	0,4

могут служить законом распределения случайной величины ?

7. Какие из следующих случайных величин имеют биномиальное распределение: а) число попаданий в мишень при трех независимых выстрелах, если вероятность попадания при каждом выстреле одна и та же; б) число очков, выпавших при бросании одной игральной кости; в) число "гербов", выпавших при четырехкратном бросании монеты ?

Задачи и упражнения для аудиторной работы

6.IА. В урне 5 белых и 25 черных шаров. Наудачу вынули I шар. Построить ряд распределения числа вынутых белых шаров.

6.2А. Из партии в 15 изделий, среди которых имеются 2 бракованных, выбраны случайным образом 3 изделия для проверки их качества. Построить ряд распределения числа бракованных изделий, содержащихся в выборке.

6.3А. В группе из 5 изделий имеется 1 бракованное. Чтобы его обнаружить, выбирают наугад одно изделие за другим и каждое вынутое проверяют. Построить ряд распределения числа проверенных изделий.

6.4А. Построить ряд распределения числа попаданий мячом в корзину при двух бросках, если вероятность попадания при каждом броске равна 0,4.

6.5А. В урне имеются 4 шара с номерами от 1 до 4. Наудачу вынули 2 шара. Построить ряд распределения суммы номеров вынутых шаров.

6.6А. Из урны, содержащей 4 белых и 2 черных шара, наудачу извлекают 2 шара. Построить ряд распределения числа ξ черных шаров среди этих двух. Найти для этой случайной величины M_ξ, D_ξ, σ_ξ, $P(1 \le \xi < 3)$, $P(\xi \ge 2)$, $P(\xi > M_\xi)$, $P(\xi = 1{,}5)$. Построить график $F_\xi(x)$.

6.7А. Написать закон распределения дискретной случайной величины ξ - числа появлений " герба" при двух независимых бросаниях правильной монеты. Найти числовые характеристики этой случайной величины. Найти $P(|\xi - M_\xi| < 1)$.

6.8А. Имеется 6 ключей, из которых только 1 подходит к замку. Найти математическое ожидание числа попыток при открывании замка, если ключ, не подошедший к замку, в последующих опробованиях не участвует.

6.9А. Охотник, имеющий 5 патронов, стреляет в цель до первого попадания (или пока не израсходует все патроны). Найти дисперсию числа израсходованных патронов. Построить график функции распределения этой случайной величины, если вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,4.

6.10А. Из урны, содержащей 5 белых и 3 черных шара, последовательно наудачу вынимают шары, причем операция извлечения продолжается до появления белого шара. Найти среднее квадратичное отклонение числа ξ извлеченных черных шаров, если вынутые шары в урну не возвращаются. Найти $P(|\xi - M_\xi| < \sigma_\xi)$.

6.11А. Из урны, содержащей 5 белых и 3 черных шара, случайным образом вынимают шары, причем операция извлечения продолжается до появления белого шара. Составить ряд распределения числа ξ извлеченных черных шаров, если вынутые шары возвращаются в урну. Найти вероятность попадания случайной величины в интервал (0, 5; 3).

6.I2А. Из урны, содержащей 5 белых и 3 черных шара, наудачу вынимают 4 шара, причем каждый раз вынутый шар возвращают в урну и перемешивают. Найти дисперсию числа извлеченных черных шаров. Найти вероятность того, что число извлеченных черных шаров будет не более 2.

6.I3А. Найти ошибку в следующих рассуждениях. Пусть случайная величина ξ имеет закон распределения

ξ	- I	0	I
p	I/3	I/3	I/3

Отсюда

$$M_\xi = -1\cdot\frac{1}{3} + 0\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot\frac{1}{3} = 0, \quad M(\xi^2) = M(\xi)\cdot M(\xi) = 0.$$

С другой стороны, $M(\xi^2) = (-1)^2\cdot\frac{1}{3} + 0^2\cdot\frac{1}{3} + 1^2\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

6.I4А. Известно, что ξ и η - независимые случайные величины $D_\xi = 1$, $D_\eta = 2$. Найдите ошибку в следующих вычислениях: $D(2\xi - 3\eta) = 4D_\xi - 9D_\eta = 4 - 18 = -14 < 0$.

6.I5Б. Является ли функция

а) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0 \\ 0{,}3, & \text{если } 0 < x \le 1 \\ 0{,}5, & \text{если } 1 < x \le 2 \\ 1, & \text{если } x > 2 \end{cases}$ или б) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0 \\ 0{,}3, & \text{если } 0 < x \le 1 \\ 0{,}2, & \text{если } 1 < x \le 2 \\ 1, & \text{если } x > 2 \end{cases}$.

функцией распределения некоторой случайной величины ? В случае положительного ответа построить ряд распределения случайной величины.

6.I6Б. Два стрелка стреляют по одной мишени независимо друг от друга. Первый стрелок выстрелил один раз, второй - дважды. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,4; для второго - 0,3. Составить закон распределения общего числа попаданий. Найти вероятность того, что общее число попаданий будет больше одного.

6.17Б. Производится два независимых выстрела по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле равна p. Рассматриваются случайные величины: ξ – разность между числом попаданий и числом промахов; η – сумма числа попаданий и числа промахов. Построить для каждой из случайных величин ξ, η ряд распределения. Найти их числовые характеристики.

6.18Б. Статистическое среднее число вызовов, поступающих на АТС в минуту, равно 120. Найти вероятности следующих событий: $A = \{$за 2 сек. на АТС не поступит ни одного вызова$\}$; $B = \{$за 1 сек. на АТС поступит хотя бы один вызов$\}$; $C = \{$за 3 сек. на АТС поступит не менее 3 вызовов$\}$.

6.19В. Число неисправностей, обнаруженных во время техосмотра автомобиля, распределено по закону Пуассона с параметром a. Если неисправностей не обнаружено, техническое обслуживание машины продолжается в среднем 2 ч. Если обнаружены 1 или 2 неисправности, то на устранение каждой из них тратится в среднем еще 0,5 ч. Если обнаружено больше 2 неисправностей, то машина ставится на профилактический ремонт, где она находится в среднем 4 ч. Определить закон распределения среднего времени Т обслуживания и ремонта машины и его математическое ожидание.

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

6.20А. В партии из 6 деталей имеются 4 стандартные. Наудачу отобраны 3 детали. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных.

✓ 6.21А. В партии деталей 10 % нестандартных. Наудачу отобраны 4 детали. Составить закон распределения нестандартных деталей среди четырех отобранных.

6.22А. Рабочий обслуживает 3 независимо работающих станка. Вероятность того, что в течение часа не потребует внимания рабочего, равна для первого станка 0,7, для второго – 0,8, для третьего – 0,9. Найти дисперсию числа станков, которые не потребуют внимания рабочего в течение часа. Найти $P(\xi \geq M\xi)$.

6.23А. Вероятность изготовления нестандартной детали равна 0,1. Из партии контролер случайным образом берет деталь и проверяет ее качество. Если она оказывается нестандартной, дальнейшие испытания прекращаются, а партия задерживается. Если деталь окажется стандартной, то контролер берет следующую и т.д. Но всего он проверяет не более 5 деталей. Найти математическое ожидание числа проверяемых стандартных деталей. Найти $P(\xi \leq 6)$.

6.24А. Срок службы шестерен коробок передач зависит от следующих независимых факторов: усталости материала в основании зуба, контактных напряжений и жесткости конструкции. Вероятность отказа каждого фактора в одном испытании равна 0,I. Найти функцию распределения числа факторов, отказавших в одном испытании.

6.25А. Игральную кость подбрасывают случайным образом 3 раза. Найти среднее квадратичное отклонение числа выпадений шестерки. Найти $P(|\xi - M_\xi| < \sigma_\xi)$.

6.26А. Найти математическое ожидание числа выпавших очков при случайном подбрасывании игральной кости.

6.27А. Распределение дискретной случайной величины ξ есть

ξ	I	3	5	7	9
p	0,I	0,2	0,3	0,3	0,I

Найти распределение случайной величины $\eta = \min\{\xi, 4\}$.

6.28А. Могут ли математическое ожидание и дисперсия случайной величины быть: а) больше I; б) меньше 0 ?

6.29А. Найдите ошибку в следующих рассуждениях. Пусть $D_\xi = 2$. Тогда $D(2\xi) = 4D(\xi) = 8$. С другой стороны, $D(2\xi) = D(\xi + \xi) = D_\xi + D_\xi = 4$.

6.30Б. Вероятность того, что стрелок попадает в мишень при каждом независимом выстреле, равна 0,8. Стрелку последовательно выдаются патроны до тех пор, пока он не промахнется. Составить закон распределения числа патронов, выданных стрелку; найти наивероятнейшее число m_0 выданных стрелку патронов.

6.31Б. Рассматривая детерминированную величину как случайную, построить для нее: I) ряд распределения; 2) функцию распределения; 3) найти математическое ожидание и дисперсию.

6.32Б. Сколько изюма должны содержать в среднем сдобные булочки для того, чтобы вероятность иметь хотя бы одну изюминку в булке была не менее 0,99 ?

Задачи на повторение

6.33А. Случайная величина ξ принимает значения - I,0 и I с вероятностями, соответственно равными I/4, I/2 и I/4. Написать выражение функции распределения и построить ее график.

6.34А. Случайная величина ξ имеет ряд распределения:

ξ	-2	-I	0	I	2
p	0,I	0,2	0,2	0,4	0,I

Найти вероятность того, что величина ξ примет значение, не превосходящее по абсолютной величине I.

6.35А. В урне 5 белых и 25 черных шаров. Наудачу вынули один шар. Для случайной величины ξ - числа вынутых белых шаров - найти D_ξ, $P(\xi > 0,5)$.

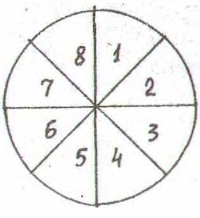
6.36А. Для сборки прибора требуется иметь 4 одинаковые детали; всего в нашем распоряжении I0 деталей, из которых 6 доброкачественных и 4 негодных; на вид детали неразличимы. Из имеющихся деталей случайным образом выбирают 5 деталей (одну лишнюю - "в запас "). I. Найти ряд распределения числа доброкачественных деталей в выборке. 2. Найти вероятность того, что не менее 4 из них окажутся доброкачественными.

6.37А. Имеется 7 радиоламп, среди которых 3 неисправные, на вид неотличимые от новых. Наугад берут 4 радиолампы и вставляют в 4 патрона. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение числа радиоламп, которые будут работать.

6.38А. Найти математическое ожидание числа лотерейных билетов, на которые выпадут выигрыши, если приобретено 40 билетов, причем вероятность выиграть по каждому билету равна 0,05 ?

6.39А. На участке имеется 5 одинаковых станков, коэффициент использования которых по времени составляет 0,8. Найти математическое ожидание числа работающих станков при нормальном ходе производства.

6.40А. Мишень установлена так, что может вращаться вокруг оси (см.рисунок). При попадании в сектор I стрелок выигрывает I руб., в сектор 2 - 2 руб. и т.д. При достаточно большой угловой скорости вращения мишени стрелок не в состоянии различить цифры, выписанные на секторах, и поэтому он стреляет наугад. Будет ли иг-



ра беспроигрышной, если за право стрелять один раз надо платить 5 руб. ?

6.41А. На пути движения автомобиля находятся 4 независимо работающих светофора, каждый из которых либо разрешает, либо запрещает дальнейшее движение автомобиля с вероятностью 0,5. Построить график функции распределения числа светофоров, пройденных автомобилем до первой остановки. Найти $P(-1 < \xi \le 2)$.

6.42Б. Имеется n заготовок для одной и той же детали. Вероятность изготовления годной детали из каждой заготовки равна Р. Построить ряд распределения числа заготовок, оставшихся после изготовления первой годной детали.

6.43Б. Два стрелка стреляют каждый по своей мишени, делая независимо друг от друга по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка p_1, для второго – p_2. Рассматриваются две случайные величины: ξ – число попаданий первого стрелка; η – число попаданий второго стрелка и их разность $\mu = \xi - \eta$.

Построить ряд распределения случайной величины μ и найти ее характеристики M_μ и D_μ.

6.44Б. Производится ряд попыток включить двигатель. Каждая попытка заканчивается успехом (включением двигателя), независимо от других, с вероятностью $p = 0{,}6$ и занимает время τ. Найти распределение общего времени Т, которое потребуется для запуска двигателя.

6.45Б. Дан закон распределения случайной величины ξ

ξ	1	2	3	4	5
p	$1{,}5a^2$	a^2	a	a	0,5

Найдите: 1) a; 2) $P(\xi \ge 3)$; 3) $P(\xi < 4)$; 4) наибольшее значение k, при котором $P(\xi \ge k) > 0{,}75$.

6.46Б. К случайной величине ξ прибавили постоянную, неслучайную величину a. Как от этого изменяются ее характеристики: 1) математическое ожидание; 2) дисперсия; 3) среднее квадратичное отклонение ?

6.47Б. Учащийся должен определить дату каждого из трех исторических событий: восстания Степана Разина, крестьянской войны Пугачева и восстания декабристов, пользуясь списком из трех дат: 1667 г., 1773 г., 1825 г. Не зная правильного ответа, он подбирает даты наугад. Составьте закон распределения числа правильно названных дат. Найдите вероятность того, что ученик угадает хотя бы одну дату.

6.48Б. Корректура в 500 страниц содержит 1300 опечаток. Считая применимым закон Пуассона, найти наиболее вероятное число опечаток на одной странице текста и вероятность этого числа.

6.49Б. При испытании легированной стали на содержание углерода вероятность того, что в случайно взятой пробе процент углерода превысит допустимый уровень, равна $P = 0{,}01$. Считая применимым " закон редких явлений " (закон Пуассона), вычислить, сколько в среднем необходимо испытать образцов, чтобы с вероятностью $P = 0{,}95$ указанный эффект наблюдался по крайней мере 1 раз.

6.50Б. Средняя плотность болезнетворных микробов в 1 м^3 воздуха равна 100. Случайным образом берут на пробу 2 дм^3 воздуха. Найти вероятность того, что в нем будет обнаружен хотя бы один микроб.

6.51Б. Устройство состоит из 4 независимых элементов. Вероятность отказа любого элемента за время опыта равна 0,2. Найдите математическое ожидание числа опытов, в каждом из которых откажет только 1 элемент, если всего произведено 100 независимых опытов.

7. НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Контрольные вопросы и упражнения

1. Дайте определение непрерывной случайной величины.

2. Сформулируйте определение плотности распределения вероятностей.

3. Приведите формулы, которые выражают связь плотности распределения с функцией распределения.

4. Дайте определение математического ожидания непрерывной случайной величины.

5. Напишите выражение плотности нормального закона распределения и объясните смысл входящих в него параметров.

6. Чему равны математическое ожидание и дисперсия нормального распределения с плотностью $p_1(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x+1)^2}{8}\right]$?

7. Дайте определение функции Лапласа и перечислите ее свойства.

8. Напишите все известные Вам формулы вычисления вероятности попадания случайной величины на заданный интервал.

9. Сформулируйте правило "трех сигм".

10. Может ли при каком-либо значении аргумента быть: 1) функция распределения больше 1; 2) плотность распределения больше 1; 3) функция распределения отрицательной; 4) плотность распределения отрицательной ?

Задачи и упражнения для аудиторной работы

7.1А. Функция распределения равномерной распределенной случайной величины имеет вид

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x<0\\ ax, & \text{при } 0\le x\le 2\\ 1, & \text{при } x>2\end{cases}$$

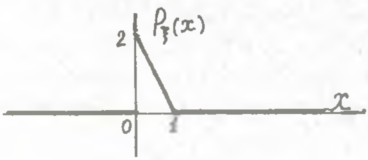
1. Найти коэффициент a, плотность $p_\xi(x)$, математическое ожидание M_ξ, дисперсию D_ξ, среднее квадратичное отклонение σ_ξ непрерывной случайной величины ξ. 2. Построить графики функций $F_\xi(x)$ и $p_\xi(x)$. 3. Вычислить $P(0\le\xi\le 1{,}5)$, $P(\xi>M_\xi)$, $P(\xi<1)$, $P(|\xi-M_\xi|<1)$.

7.2А. Определить, при каких значениях a функция

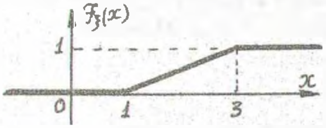
$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le 0\\ a\sin x, & \text{при } 0<x\le\pi\\ 0, & \text{при } x>\pi\end{cases}$$

является плотностью распределения вероятностей случайной величины ξ, и найти: а) функцию распределения случайной величины; б) $P(\pi/6<\xi<\pi/3)$, $P(\xi=\pi/2)$, $P(-\pi<\xi<\pi/2)$, $P(-\pi<\xi<2\pi)$.

7.3А. (Устно). Случайная величина распределяется по закону "прямоугольного треугольника" в интервале (0;1) (см.рисунок). Найти: $P(\xi<2)$, $P(\xi>1{,}5)$, $P(0{,}5<\xi<1)$.



7.4А. Функция распределения случайной величины ξ задана графиком (см.рисунок). Найти M_ξ, $P(\xi<2)$, $P(\xi>0)$.



7.5А. Случайная величина распределена по нормальному закону с $a = 3$, $\sigma = 4$. Найти: $P_\xi(x)$, $P(1<\xi<3)$, $P(\xi=2)$, $P(\xi>5)$, $P(\xi\le 0)$.

7.6А. Найти вероятность того, что значение нормально распределенной случайной величины ξ отклонится от ее математического ожидания менее, чем на 2, если $M_\xi = -10$, $D_\xi = 9$.

7.7А. Случайная величина ξ - ошибка измерений - распределена по нормальному закону. Найти вероятность того, что ξ примет значение между -3σ и 3σ (предполагается, что систематическая погрешность отсутствует).

7.8А. Деталь, изготовленная автоматом, считается годной, если отклонение контролируемого размера от номинала не превышает 10 мм. Случайные отклонения контролируемого размера от номинала подчиняются нормальному закону с $a = 0$, $\sigma = 5$. Какова вероятная доля годных деталей в общем числе деталей ?

7.9Б. Плотность распределения задается следующим образом:

$$P_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0 \\ x, & \text{при } 0 < x \le 1 \\ 2-x, & \text{при } 1 < x \le 2 \\ 0, & \text{при } x > 2 \end{cases}$$

Найти: M_ξ, $P(0{,}5 < \xi < 1{,}5)$, $P(\xi > 0{,}5)$, $P(\xi < 2)$.

7.10Б. Случайная величина ξ имеет плотность вероятности (показательное распределение)

$$P_\xi(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t}, & \text{при } t \ge 0 \end{cases}$$

Найти функцию распределения: $F_\xi(t)$, M_ξ, D_ξ, σ_ξ, $P(\xi < M_\xi)$.

7.11Б. Вероятность обнаружения затонувшего судна за время поиска t задается формулой $P(\xi<t) = 1-e^{-\gamma t}$ $(\gamma>0)$.

Определить вероятное время поиска, необходимое для обнаружения судна.

7.12Б. Шкала секундомера имеет цену деления 0,2 с. Какова вероятность сделать по этому секундомеру отсчет времени с ошибкой более 0,05 с, если отсчет делается наудачу с округлением в ближайшую сторону до целого деления ?

7.13Б. Случайные ошибки измерения подчинены нормальному закону со средним квадратичным отклонением $\sigma = 20$ мм и математическим ожиданием $a = 0$. Найти вероятность того, что из трех независимых измерений ошибка хотя бы одного из них не превзойдет по абсолютной величине 4 мм.

7.14Б. Стрельба ведется из точки 0 вдоль прямой Ox. Средняя дальность полета снаряда равна m . Предполагается, что дальность полета ξ распределена по нормальному закону со средним квадратичным отклонением $\sigma = 80$ м. Найти, какой процент выпускаемых снарядов дает перелет от 120 м до 160 м.

<u>Задачи и упражнения для самостоятельной работы</u>

7.15А. Определить, при каком значении a функция

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x \le 2 \\ a(x^2-4), & \text{при} \quad 2 < x \le 3 \\ 1, & \text{при} \quad x > 3 \end{cases}$$

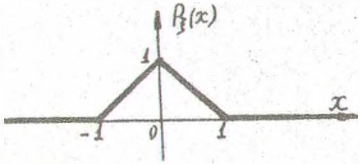
является функцией распределения и найти σ_ξ, $P(1 < \xi \le 2{,}5)$.

7.16А. Определить, при каком значении a функция

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x \le 0 \\ ax^2, & \text{при} \quad 0 < x \le 3 \\ 0, & \text{при} \quad x > 3 \end{cases}$$

является плотностью распределения вероятностей случайной величины ξ и найти $F_\xi(x)$, $P(\xi > 2)$.

7.17А. (Устно). Случайная величина ξ подчинена закону Симпсона (закону "равнобедренного треугольника") на участке от -1 до 1 (см.рисунок). Найти: M_ξ, $P(\xi \le 0)$, $P(\xi > 2)$, $P(|\xi| < 1/2)$.



7.18А. Диаметры деталей, выпускаемых цехом, распределяются по нормальному закону с параметрами $M_\xi = 5$ см, $D_\xi = 0{,}81$ см^2. Найти вероятность того, что диаметр наудачу взятой детали а) заключен в пределах от 4 до 7 см; б) отличается от математического ожидания не более чем на 2 см.

7.19А. Найти $P(\xi > 3)$ и $P(-1 < \xi < 2)$ для случайной величины с плотностью вероятностей $p_\xi(x) = \frac{1}{3\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{(x+1)^2}{9}\right]$.

7.20Б. Случайная величина ξ распределена по закону Коши

$$p_\xi(x) = \frac{a}{1+x^2}, \quad a = const.$$

а) Найти a, $F_\xi(x)$, $P(-1 < \xi < 1)$; б) существуют ли для случайной величины ξ числовые характеристики: математическое ожидание и дисперсия ?

7.21Б. Время ожидания у бензоколонки автозаправочной станции является случайной величиной ξ, распределенной по показательному закону со средним временем ожидания, равным t_0. Найти вероятности следующих событий: 1) $A = \left\{\frac{t_0}{2} < \xi < \frac{3}{2}t_0\right\}$; 2). $B = \{\xi > t_0\}$.

7.22Б. Для равномерно распределенной на $[a,b]$ случайной величины ξ найти $p_\xi(x)$, $F_\xi(x)$, M_ξ, D_ξ, σ_ξ.

7.23Б. Предположим, что рост взрослых мужчин является случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Пусть математическое ожидание ее равно 175 см, а среднее квадратичное отклонение – 6 см. Определить вероятность того, что хотя бы один из наудачу выбранных пяти мужчин будет иметь рост от 170 до 180 см.

Задачи на повторение

7.24А. Случайная величина задана функцией распределения

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 1 \\ \frac{x-1}{2}, & \text{при } 1 \le x \le 3 \\ 1, & \text{при } x > 3 \end{cases}.$$

Найти D_ξ, $P(2{,}5 \le \xi \le 3{,}5)$.

7.25А. Дана плотность распределения случайной величины

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0 \\ \lambda(4x - x^3), & \text{при } 0 < x \le 2 \\ 0, & \text{при } x > 2 \end{cases}, \quad \lambda = const$$

Найти λ ; $F_\xi(x)$, $P(-2 < \xi < 1)$, M_ξ .

7.26А. Дана функция

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0 \\ a x^2, & \text{при } 0 < x \le 1 \\ a(2-x)^2, & \text{при } 1 < x \le 2 \\ 0, & \text{при } x > 2 \end{cases}, \quad a = const$$

При каком значении a функция $f(x)$ является плотностью распределения случайной величины ξ ?

7.27А. Случайная величина ξ имеет функцию распределения

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0 \\ x^2/16, & \text{при } 0 \le x < 2 \\ x - \frac{7}{4}, & \text{при } 2 \le x < 11/4 \\ 1, & \text{при } x \ge 11/4 \end{cases}$$

Найти: а) плотность вероятности $P_\xi(x)$ случайной величины ξ ; б) построить графики $F_\xi(x)$ и $P_\xi(x)$; в) найти вероятность попадания случайной величины ξ на отрезок $[1;\ 1{,}5]$.

7.28Б. Плотность распределения случайной величины ξ задана следующим образом:

$$P_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0 \\ x, & \text{при } 0 < x \le 1 \\ 2 - x, & \text{при } 1 < x \le 2 \\ 0, & \text{при } x < 2 \end{cases}$$

Найти σ_ξ , $P(\xi < 1{,}5)$. Построить график функции $P_\xi(x)$.

7.29Б. Показать, что функция $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + \pi^2}$ является плотностью вероятности некоторой случайной величины ξ , и вычислить вероятность попадания случайной величины ξ на участок $(\pi, +\infty)$.

7.30Б. Проверить, будет ли функция

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0 \\ e^{-x}, & \text{при } x \ge 0 \end{cases}$$

являться плотностью вероятности. Найти функцию распределения $F_\xi(x)$ и вероятность $P(1 \le \xi < 2)$.

7.31Б. Случайная величина ξ подчинена закону с плотностью распределения $P_\xi(x) = \lambda e^{-|x|}$. Определить значение λ .

7.32Б. Случайная величина ξ (время работы лампы конденсатора) задается плотностью распределения

$$P_\xi(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{при} \quad x \le 0 \\ 0{,}001 \exp\left[-\frac{x}{1000}\right], & \text{при} \quad x > 0 \end{cases}$$

Найти: I) $F_\xi(x)$; 2) вероятность того, что лампа конденсатора будет работать не более 1000 ч; 3) M_ξ , D_ξ , σ_ξ .

7.33Б. Все значения равномерно распределенной случайной величины лежат на отрезке [2; 8] . Найти вероятность попадания случайной величины в промежуток [3; 5] .

7.34Б. Равномерно распределенная случайная величина ξ сосредоточена на интервале (0; 2). Определить M_ξ , D_ξ, нарисовать график ее функции распределения.

7.35Б. Шкала рычажных весов, установленных в лаборатории, имеет цену делений I г. При измерении массы химических компонентов смеси отсчет делается с точностью до целого деления с округлением в ближайшую сторону. Какова вероятность, что абсолютная ошибка определения массы: а) не превысит величины среднеквадратичного отклонения возможных ошибок определения массы; б) будет заключена между значениями σ и 2σ ?

7.36Б. Поезда данного маршрута городского трамвая идут с интервалом в 5 мин. Пассажир подходит к трамвайной остановке в нёкоторый момент времени. Какова вероятность появления пассажира не ранее чем через I мин после ухода предыдущего поезда, но не позднее чем за 2 мин до отхода следующего поезда ?

7.37Б. Размер диаметра втулок, изготовляемых цехом, можно считать нормально распределенной случайной величиной с математическим ожиданием a = 2,5 см и дисперсией σ^2= 0,0001 см^2. В каких границах можно практически гарантировать размер диаметра втулки, если за вероятность практической достоверности принимается 0,997 ?

7.38Б. Коробки с шоколадом запаковываются автоматически. Их средняя масса равна 1,06 кг. Найти среднее квадратичное отклонение, если 5 % коробок имеют массу меньше I кг. Предполагается, что масса коробок распределена по нормальному закону.

7.39Б. Случайная величина ξ - ошибка измерительного прибора - распределена по нормальному закону с дисперсией 16 мк. Систематическая ошибка прибора отсутствует. Найти вероятность того, что в пяти независимых измерениях ошибка превзойдет по модулю 6 мк не более трех раз.

7.40Б. В нормально распределенной совокупности 15 % значений x меньше 12 и 40 % значений x больше 16,2. Найти среднее значение и среднее квадратичное отклонение данного распределения.

Вопросы для самопроверки

7.41А. Всякая ли случайная величина имеет: а) математическое ожидание ? б) дисперсию ? в) функцию распределения ? г) плотность вероятностей ?

7.42А. Приведите примеры непрерывных и дискретных случайных величин.

7.43А. Может ли математическое ожидание случайной величины быть больше, чем ее среднее квадратичное отклонение ?

7.44А. У случайной величины ξ изменили знак на обратный. Как изменится при этом M_ξ, D_ξ и σ_ξ ?

7.45А. Вероятность события равна 0. Следует ли из этого, что событие невозможно ?

7.46А. Вероятность события равна 1. Следует ли из этого, что событие достоверно ?

7.47А. Для каких случайных величин существует: ряд распределения, функция распределения, плотность вероятностей ?

7.48Б. Может ли функция распределения случайной величины: а) иметь конечные разрывы ? б) бесконечные разрывы ? в) на некоторых участках оставаться постоянной ? г) всюду быть постоянной ? д) убывать ?

7.49Б. Может ли плотность распределения случайной величины иметь: а) конечные разрывы ? б) бесконечные разрывы ? в) на некотором участке оставаться постоянной ? г) всюду оставаться постоянной ? д) убывать ?

7.50Б. Укажите размерность плотности распределения вероятностей.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

Вариант I

1А. Два стрелка независимо друг от друга стреляют по одной мишени, делая по одному выстрелу. Вероятность попадания при одном выстреле для первого стрелка равна 0,3; для второго – 0,4.

Построить ряд распределения числа попаданий. Найти M_ξ, $P(-1<\xi<1)$, $P(\xi<\frac{1}{2})$, $P(\xi=\frac{1}{2})$.

2А. Дана

$$P_\xi(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le 0\\ ax, & \text{при } 0<x\le 2\\ 0, & \text{при } x>2\end{cases}$$

Найти a, $P(1<\xi<3)$, D_ξ.

3Б. Для нормально распределенной случайной величины ξ с $a=3$, $D_\xi=2$. Найти $P(0<\xi<3)$, $P(\xi=2)$ и вероятность того, что случайная величина примет значение, большее I.

4Б. Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения 6 мин. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередной автобус менее 2 мин.

Вариант 2

IА. Дана

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le 0\\ ax^2, & \text{при } 0<x\le 2\\ 1, & \text{при } x>2\end{cases}$$

Найти: a, $P_\xi(x)$, M_ξ, $P(\xi>1)$.

2А. Из урны, содержащей 3 белых и 5 черных шаров, извлекают шары до появления белого шара. Построить ряд распределения числа извлеченных черных шаров. Найти $P(1<\xi<3)$, $P(\xi=1{,}3)$, D_ξ.

3Б. Вероятность отказа детали за время испытаний на надежность равна 0,2. Найти математическое ожидание числа отказавших деталей, если испытанию будет подвергнуто I0 деталей.

4Б. Найти вероятность того, что случайная величина отклонится от своего математического ожидания более чем на среднее квадратичное отклонение, если ξ распределена по нормальному закону с $M_\xi=1$, $D_\xi=4$.

8. СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Контрольные вопросы и упражнения

I. Дайте определение дискретной двумерной случайной величины (ξ, η). Приведите примеры.

2. Дайте определение непрерывной двумерной случайной величины (ξ, η). Приведите примеры.

3. Сформулируйте определение и свойства функции распределения двумерной случайной величины.

4. Сформулируйте определение и свойства плотности распределения двумерной случайной величины (ξ, η).

5. Запишите формулы вычисления плотности распределения каждой из случайных величин ξ и η через плотность распределения двумерной случайной величины (ξ, η).

6. Двумерная случайная величина задана таблицей.

$\eta \backslash \xi$	x_1	x_2	x_3
y_1	0,1	0	0,2
y_2	0	0,2	0,3
y_3	0,1	0	0,1

Составить ряд распределения каждой из случайных величин ξ и η.

7. Сформулируйте необходимое и достаточное условие независимости непрерывных случайных величин.

8. Сформулируйте необходимое и достаточное условие независимости дискретных случайных величин.

9. Двумерная случайная величина (ξ , η) задана плотностью вероятности:

$$p_{\xi,\eta}(x,y) = \frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}$$

Зависимы или независимы случайные величины ξ и η ?

10. Дайте определение корреляционного момента $K_{\xi,\eta}$ между случайными величинами ξ и η .

11. Сформулируйте определение и свойства коэффициента корреляции $r_{\xi,\eta}$ между случайными величинами ξ и η .

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

8.15. Дана таблица, определяющая закон распределения двумерной случайной величины (ξ , η). Найти: 1) коэффициент λ ; 2) математические ожидания $M\xi$, $M\eta$; 3) дисперсии $D\xi$, $D\eta$; 4) коэффициент корреляции $r_{\xi,\eta}$.

$\xi \backslash \eta$	20	40	60
10	3λ	λ	0
20	2λ	4λ	2λ
30	λ	2λ	5λ

8.2Б. Двумерное распределение случайной величины (ξ, η) задано таблицей. Найти $K_{\xi,\eta}$.

$\eta \backslash \xi$	3	10	12
4	0,17	0,13	0,25
5	0,10	0,30	0,05

8.3Б. Двумерная случайная величина (ξ, η) подчинена закону распределения с плотностью

$$P(x,y)=\begin{cases} axy, & (x,y)\in D \\ 0, & (x,y)\notin D. \end{cases}$$

Область D - треугольник, ограниченный прямыми $x+y=1$, $x=0$, $y=0$. Найти: 1) a; 2) M_ξ, M_η; 3) D_ξ, D_η; 4) $r_{\xi,\eta}$.

8.4Б. Двумерная случайная величина (ξ, η) задана функцией распределения

$$F_{\xi,\eta}(x,y)=\begin{cases} 0, & \text{при } x\le 0 \text{ или } y\le 0, \\ \sin x\cdot \sin y, & \text{при } 0<x\le\frac{\pi}{2} \text{ и } 0<y<\frac{\pi}{2} \\ \sin x, & \text{при } 0<x<\frac{\pi}{2} \text{ и } y\ge\frac{\pi}{2} \\ \sin y, & \text{при } 0<y<\frac{\pi}{2} \text{ и } x\ge\frac{\pi}{2} \\ 1, & \text{при } x\ge\frac{\pi}{2} \text{ и } y\ge\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Найти коэффициент корреляции.

8.5Б. Двумерная случайная величина (ξ, η) подчинена закону распределения с плотностью

$$P_{\xi,\eta}(x,y)=\begin{cases} a\sin(x+y), & \text{при } 0\le x\le\frac{\pi}{2} \text{ и } 0\le y\le\frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{при любых других значениях } x \text{ и } y. \end{cases}$$

Найти $P\left(0\le\xi\le\frac{\pi}{2};\ 0\le\eta\le\frac{\pi}{4}\right)$.

8.6Б. Функция распределения двумерной случайной величины (ξ, η) имеет вид

$$F_{\xi,\eta}(x,y)=\begin{cases} (1-e^{-4x})(1-e^{-2y}), & \text{при } x>0 \text{ и } y>0 \\ 0, & \text{при } x\le 0 \text{ или } y\le 0. \end{cases}$$

Найти $P(x,y)$, $P(0\le\xi\le 1;\ 0\le\eta<1)$.

8.7Б. Плотность вероятности двумерной случайной величины (ξ , η) задана выражением

$$P_{\xi,\eta}(x,y)=\begin{cases} x+y, & \text{при } 0<x<1 \text{ и } 0<y<1 \\ 0, & \text{при любых других значениях } x \text{ и } y. \end{cases}$$

Найти коэффициент корреляции между случайными величинами ξ и η.

8.8В. Двумерная случайная величина (ξ , η) равномерно распределена в треугольнике, ограниченном прямыми $y=x$, $y=0$, $x=2$. Найти коэффициент корреляции случайных величин ξ и η.

8.9Б. Двумерная случайная величина (ξ , η) подчинена закону равномерной плотности распределения внутри круга радиуса r с центром в начале координат. Установить, являются ли случайные величины ξ и η зависимыми. В случае их зависимости определить, коррелированы ли они.

8.10Б.

$\eta \backslash \xi$	x_1	x_2	x_3
y_1	0,15	0,12	0,09
y_2	0	0,35	0,21
y_3	0	0	0,08

Двумерная случайная величина (ξ , η) задана таблицей.

Зависимы или независимы случайные величины ξ и η ?

8.11Б.

$\eta \backslash \xi$	x_1	x_2	x_3
y_1	0,02	0,06	0,12
y_2	0,05	0,15	0,30
y_3	0,01	0,03	0,06
y_4	0,02	0,06	0,12

Двумерная случайная величина (ξ , η) задана таблицей.

Зависимы или независимы случайные величины ξ и η ? Коррелированы или некоррелированы они ?

<u>Вопросы для самопроверки</u>

8.12Б. Следует ли из некоррелированности случайных величин их независимость ? А наоборот ?

8.13Б. Каков коэффициент корреляции случайных величин ξ и $\eta=1-2\xi$?

8.14Б. Коррелированы ли две случайные величины $\eta=2\xi+3$ и $\zeta=1-3\xi$? Если да, то каков их коэффициент корреляции ?

8.15Б. Чему равен корреляционный момент двух случайных величин ξ и $1+\xi$?

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Лапласа

2. Таблица значений функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,33	0,1293	0,66	0,2454	0,99	0,3389
0,01	0,0040	0,34	0,1331	0,67	0,2486	1,00	0,3413
0,02	0,0080	0,35	0,1368	0,68	0,2517	1,01	0,3438
0,03	0,0120	0,36	0,1406	0,69	0,2549	1,02	0,3461
0,04	0,0160	0,37	0,1443	0,70	0,2580	1,03	0,3485
0,05	0,0199	0,38	0,1480	0,71	0,2611	1,04	0,3508
0,06	0,0239	0,39	0,1517	0,72	0,2642	1,05	0,3531
0,07	0,0279	0,40	0,1554	0,73	0,2673	1,06	0,3554
0,08	0,0319	0,41	0,1591	0,74	0,2703	1,07	0,3577
0,09	0,0359	0,42	0,1628	0,75	0,2734	1,08	0,3599
0,10	0,0398	0,43	0,1664	0,76	0,2764	1,09	0,3621
0,11	0,0438	0,44	0,1700	0,77	0,2794	1,10	0,3643
0,12	0,0478	0,45	0,1736	0,78	0,2823	1,11	0,3665
0,13	0,0517	0,46	0,1772	0,79	0,2852	1,12	0,3686
0,14	0,0557	0,47	0,1808	0,80	0,2881	1,13	0,3708
0,15	0,0596	0,48	0,1844	0,81	0,2910	1,14	0,3729
0,16	0,0636	0,49	0,1879	0,82	0,2939	1,15	0,3749
0,17	0,0675	0,50	0,1915	0,83	0,2967	1,16	0,3770
0,18	0,0714	0,51	0,1950	0,84	0,2995	1,17	0,3790
0,19	0,0753	0,52	0,1985	0,85	0,3023	1,18	0,3810
0,20	0,0793	0,53	0,2019	0,86	0,3051	1,19	0,3830
0,21	0,0832	0,54	0,2054	0,87	0,3078	1,20	0,3849
0,22	0,0871	0,55	0,2088	0,88	0,3106	1,21	0,3869
0,23	0,0910	0,56	0,2123	0,89	0,3130	1,22	0,3883
0,24	0,0948	0,57	0,2157	0,90	0,3159	1,23	0,3907
0,25	0,0987	0,58	0,2190	0,91	0,3186	1,24	0,3925
0,26	0,1026	0,59	0,2224	0,92	0,3212	1,25	0,3944
0,27	0,1064	0,60	0,2257	0,93	0,3238	1,26	0,3962
0,28	0,1103	0,61	0,2291	0,94	0,3264	1,27	0,3980
0,29	0,1141	0,62	0,2324	0,95	0,3289	1,28	0,3997
0,30	0,1179	0,63	0,2357	0,96	0,3315	1,29	0,4015
0,31	0,1217	0,64	0,2389	0,97	0,3340	1,30	0,4032
0,32	0,1255	0,65	0,2422	0,98	0,3365	1,31	0,4049

Окончание прилож. 2

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
I,32	0,4066	I,68	0,4535	2,08	0,48I2	2,80	0,4974
I,33	0,4082	I,69	0,4545	2,I0	0,482I	2,82	0,4976
I,34	0,4099	I,70	0,4554	2,I2	0,4830	2,84	0,4977
I,35	0,4II5	I,7I	0,4564	2,I4	0,4838	2,86	0,4979
I,36	0,4I3I	I,72	0,4573	2,I6	0,4846	2,88	0,4980
I,37	0,4I47	I,73	0,4582	2,I8	0,4854	2,90	0,498I
I,38	0,4I62	I,74	0,459I	2,20	0,486I	2,92	0,4982
I,39	0,4I77	I,75	0,4599	2,22	0,4868	2,94	0,4984
I,40	0,4I92	I,76	0,4608	2,24	0,4875	2,96	0,4985
I,4I	0,4207	I,77	0,46I6	2,26	0,488I	2,98	0,4986
I,42	0,4222	I,78	0,4625	2,28	0,4887	3,00	0,49865
I,43	0,4236	I,79	0,4633	2,30	0,4893	3,20	0,4993I
I,44	0,425I	I,80	0,464I	2,32	0,4898	3,40	0,49966
I,45	0,4265	I,8I	0,4649	2,34	0,4904	3,60	0,49984I
I,46	0,4279	I,82	0,4656	2,36	0,4909	3,80	0,499928
I,47	0,4292	I,83	0,4664	2,38	0,49I3	4,00	0,499968
I,48	0,4306	I,84	0,467I	2,40	0,49I8	4,50	0,499997
I,49	0,43I9	I,85	0,4678	2,42	0,4922	5,00	0,499997
I,50	0,4332	I,86	0,4686	2,44	0,4927	$x>5$	0,5
I,5I	0,4345	I,87	0,4693	2,46	0,493I		
I,52	0,4357	I,88	0,4699	2,48	0,4934		
I,53	0,4370	I,89	0,4706	2,50	0,4938		
I,54	0,4382	I,90	0,47I3	2,52	0,494I		
I,55	0,4394	I,9I	0,47I9	2,54	0,4945		
I,56	0,4406	I,92	0,4726	2,56	0,4948		
I,57	0,44I8	I,93	0,4732	2,58	0,495I		
I,58	0,4429	I,94	0,4738	2,60	0,4953		
I,59	0,444I	I,95	0,4744	2,62	0,4956		
I,60	0,4452	I,96	0,4750	2,64	0,4959		
I,6I	0,4463	I,97	0,4756	2,66	0,496I		
I,62	0,4474	I,98	0,476I	2,68	0,4963		
I,63	0,4484	I,99	0,4767	2,70	0,4965		
I,64	0,4495	2,00	0,4772	2,72	0,4967		
I,65	0,4505	2,02	0,4783	2,74	0,4969		
I,66	0,45I5	2,04	0,4793	2,76	0,497I		
I,67	0,4525	2,06	0,4803	2,78	0,4973		

ОТВЕТЫ

1.1. 12. 1.2. 83. 1.3. 362880; 80640; 282240. 1.4. 151200. 1.5. 10. 1.6. $C_6^2 \cdot C_4^1 = 60$. 1.7. 1) 56; 2) 24; 3) $C_4^3 \cdot 2^3 = 32$. 1.8. $2\cdot(4!)^2 = 1152$. 1.9. $9\cdot A_9^3 = 4536$. 1.10. 2^{32}. Совет: можно зашифровать каждый набор зубов последовательностью нулей и единиц (нуль ставится, если на данном месте нет зуба, и единица, если есть). 1.11. а) 120; б) 625; в) 72. 1.12. 4 !; 6. 1.13. 300. 1.14. 2160. 1.15. 2940. 1.16. 60. 1.17. 3628800. 1.18. 360. 1.19. $9\cdot 10^4$; $10^?$; 52488; $18\cdot 10^3$. 1.20. $33824\cdot 10^4$. 1.21. 600. 1.22. 512. 1.23. 2^n. 1.24. $3\cdot C_5^3 = 30$.

2.1. $C = A + B_1 B_2$; $\bar{C} = \bar{A}(\bar{B}_1 + \bar{B}_2)$. 2.2. 1) 3/20; 2) 0,7. 2.3. а) 5/18; б) 11/36. 2.4. а) 1/6; б) 0,5. 2.5. 1/720. 2.6. 4 !/5 ! = 1/5. 2.7. 83/200. 2.8. 1/720. 2.9. 3/11. 2.10. $1/5^4$. 2.11. $5!/5^5 = 24/625$. 2.12. 1) $\frac{2N(N-2)!}{N!}$; 2) $\frac{2N}{A_N^2}$; 3) $\frac{2}{N-1}$. 2.13. $P(A) = 0{,}001$; $P(B) = A_{10}^4 \cdot 10^{-4} \approx 0{,}605$; $P(C) = 0{,}1$; $P(Д) = \frac{7!}{3!\,2!\,2!\cdot 10^7} \approx 2{,}1\cdot 10^{-5}$. 2.14. 1/7; 1/2. 2.15. 1/6. Предполагая, что разрывы на участках одинаковой длины равновозможны. 2.16. ≈ 0.094. 2.17. 1/360. 2.18. 15/116 2.19. $\frac{3!2!}{6!} = 1/60$. 2.20. $P(A) = 1/6$; $P(B) = 5/12$; $P(Д) = 35/36$; $P(F) = 11/36$. 2.21. 1) 1; 2) 0,2. 2.22. а) $\frac{2\cdot 7!}{8!} = 0{,}25$; б) $\frac{2\cdot A_{11}^2}{A_{12}^3} = 1/6$. 2.23. $P(A) = \frac{1}{6^3} = 1/216$; $P(B) = 1/36$; $P(C) = \frac{A_6^3}{6^3} = 5/9$.

2.24. $\frac{C_n^{m_1}\cdot C_{n-m_1}^{m_2}\cdots C_{n-(m_1+m_2+\dots+m_{k-2})}^{m_{k-1}}}{n^k}$. 2.25. 0,25. 2.26. 0,05.

2.27. $\frac{n-K}{n+n'-K}$. 2.28. 1/720. 2.29. 7/15. 2.30. $\approx 0{,}1174$. 2.31. а) $\approx 0{,}448$; б) $\approx 0{,}339$. 2.32. 3/8. 2.33. 2/3. 2.34. $\frac{2\cdot 6\cdot 8!}{10!} = 2/15$. 2.35. $P(A) = \frac{4}{4^4} = 1/64$; $P(B) = 3/16$; $P(C) = 3/32$.

2.36. $\frac{C_{12}^4\cdot C_3^1}{C_{15}^5}\cdot\frac{C_8^4\cdot C_2^1}{C_{10}^5}\cdot\frac{C_4^4\cdot C_1^1}{C_5^5} = 25/91$. 2.37. Т.к. Ω = {точка брошена в круг радиуса 2} ; A = {точка упала на одну из монет}, то $P(A) = \frac{2\pi r^2}{\pi R^2} = \frac{2r^2}{R^2}$. 2.38. $1 - \frac{\ell}{L}$. 2.39. 0,6.

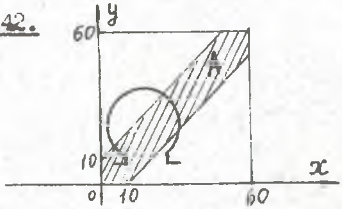
2.40. Т.к. $\Omega = \{(x,y): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1\}$, $A = \{(x,y): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le k^2\}$,

то $P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{\pi a b k^2}{\pi a b} = k^2$.

2.41. Т.к. $\Omega = \{(p,q): |p| \le 1, |q| \le 1\}$, $A = \{(p,q): p^2 - 4pq \ge 0\}$,

то $P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{2(1 + \int_0^1 0{,}25 p^2 dp)}{4} = 13/24$.

2.42.



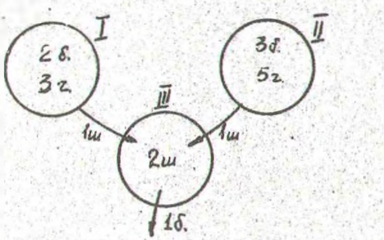
Пусть $\Omega = \{x,y\}; 0 \le x \le 60$, $0 \le y \le 60$, тогда $A = \{(x,y): |x-y| \le 10\}$ (см.рисунок) и $P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{60^2 - 50^2}{60^2} = 11/36$.

2.43. $\approx 0{,}25$.

3.1. $\bar{A}$ = {все изделия доброкачественные} ; $\bar{B}$ = {бракованных изделий менее двух} . 3.2. $0{,}4^3 \cdot 0{,}6 = 0{,}0384$. 3.3. 0,188.
3.4. $\frac{32}{40} + \frac{8}{40} \cdot \frac{32}{39} \approx 0{,}964$. 3.5. 0,875. 3.6. 0,388. 3.7. 0,788
3.8. $\frac{1}{10} + \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{9} + \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{8} + \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{7} = 0{,}4$. 3.9. Нет. 3.10. Пусть A = {разрыв цепи} , тогда $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0{,}5\,(1 - 0{,}6 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}4) \cdot 0{,}3 = 0{,}8788$.
3.11. Пусть A = {выигрывает первый игрок} , B = {выигрывает второй игрок} , тогда $P(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \ldots = \frac{2}{3}$, $P(B) = 1 - P(A) = 1/3$. 3.12. $P(A) = \frac{5}{20} \cdot \frac{5}{19} \cdot \frac{5}{18} \cdot \frac{5}{17} \cdot 4! \approx 0{,}129$; $P(B) = \frac{5}{20} \cdot \frac{4}{19} \cdot \frac{3}{18} \cdot \frac{2}{17} \cdot 4 \approx 0{,}00413$.
3.13. а) $\bar{A}$ = {препятствие не попало под левое колесо} ;
б) $A+B$ = {препятствие попало хотя бы под одно колесо} ;
в) $\overline{A+B}$ = {препятствие под колеса не попало} . 3.14. а) 0,188; б) 0,452; в) 0,336. 3.15. а) 0,6976; б) 0,9573. 3.16. 0,28.
3.17. а) 0,024; б) 0,976; в) 0,452. 3.18. а) 0,04; б) 80/81.
3.19. 13/125. 3.20. 1/15. 3.21. Не менее 28. 3.22. $\approx 1 - 3\alpha$.
3.23. 13/16. Совет: перейти к противоположному событию.

3.24. а) $A+B=\Omega$; б) $A\cdot B=\Phi$. 3.25. I/9. 3.26. 0,5.
3.27. 3I/96. 3.28. I/3. 3.29. $1/6^3$. 3.30. 0,94. 3.31. $P(A)=0{,}9136$;
$P(B)=0{,}4344$. 3.32. $P(A)\approx 0{,}318$; $P(B)\approx 0{,}388$. 3.33. а) 0,2I6;
б) I/6. 3.34. $1 \cdot \frac{C_6^3}{C_9^3} / \frac{C_3^3}{C_9^3} \approx 0{,}0028$. 3.35. Первая. 3.36. $n \geq 13$.
3.37. $1-C_{n-m}^{k}/C_n^{k}$. 3.38. $P(A)=10\cdot C_9^2\cdot C_7^3\cdot C_4^4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\approx 0{,}012$; 0,0I2;
$P(B)=\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\approx 10^{-6}$. 3.39. $p_1=\frac{2}{6}+\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}+\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1=3/5$; $p_2=2/5$. 3.40. а) $1-p^3$; б) $1-p^3-qp^3$;
в) $1-p^3-2qp^3$. Совет: переходить к противоположным событиям.

4.I.



$A=\{$из третьей урны взят белый шар$\}$.
Гипотезы:
$H_1=\{$в третьей урне 2 белых шара$\}$; $H_2=\{$в третьей урне белый и черный шары$\}$; $H_3=\{$в третьей урне 2 черных шара$\}$ (см. рисунок).

$P(H_1)=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{8}$; $P(H_2)=\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{8}+\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{8}$; $P(H_3)=\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{8}$;
$P(A/H_1)=1$; $P(A/H_2)=1/2$; $P(A/H_3)=0$. По формуле полной вероятности.
$P(A)=31/80$. 4.2. 0,085. 4.3. 0,986. 4.4. 83 %. 4.5. 0,9075.
4.6. $\approx 0{,}558$. 4.7. $\approx 0{,}1478$. 4.8. В одну из урн положить I белый шар, в другую - все остальные. 4.9. 0,4. 4.10. $\approx 0{,}2319$.
4.II. 6/I3. 4.I2. 0,89. 4.I3. $\approx 0{,}583$. 4.I4. 0,003I. 4.I5. 0,78.
4.I6. 0,87. 4.I7. I/3. 4.I8. 0,3368. 4.I9. $\approx 0{,}445$. 4.20. $\approx 0{,}088$.
4.2I. $p=\frac{1}{3}\left(\frac{a}{a+b}+\frac{c}{c+d}+1\right)$. 4.22. 0,875. 4.23. 0,86. 4.24. 0,764.
4.25. 0,977. 4.26. 0,22. 4.27. 0,975. 4.28. 0,0I5.
4.29. $\frac{ac+bc+a}{(a+b)(c+d+1)}$. 4.30. I/3. 4.3I. Какие возможны предположения о первоначальном числе белых шаров в урне ? 5/I2.
4.32. 7/I8. 4.33. $\frac{349}{560}$. 4.34. 3/7.

5.I. $P_4(2) = C_4^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{27}$. 5.2. $P_{10}(3 \le m \le 5) =$
$= P_{10}(3) + P_{10}(4) + P_{10}(5) \approx 0{,}01$. 5.3. $P(1 \le m \le 7) =$
$= 1 - P_7(0) \approx 0{,}972$.
5.4. $\approx 0{,}678$. 5.5. $P_{1000}(450) \approx 0{,}00017$. 5.6. $\approx 0{,}5$.
5.7 а) $\approx 0{,}1353$; б) $P_{100}(m \le 3) \approx 0{,}8571$. 5.8. Вероятнее выиграть не менее 5 партий из 8. 5.9. $5 \cdot 0{,}9^4 \cdot 0{,}1^2 = 0{,}0328$.
5.10. Наивероятнейшее число m_0 попаданий при n бросках, в каждом из которых оно может появиться с вероятностью p, определяется из двойного неравенства $np - q \le m_0 \le np + p$, где $q = 1 - p$. Таким образом, $2{,}9 \le m_0 \le 3{,}9$. Наивероятнейшее число попаданий $m_0 = 3$. $P_{12}(3) \approx 0{,}2397$. 5.11. 0,2816. 5.12. $\approx 0{,}0038$.
5.13. 0,68256. 5.14. $\approx 0{,}101$. 5.15. 0,00015 5.16. а) $\approx 0{,}006$; б) $\approx 0{,}5$; в) $\approx 0{,}4013$. 5.17. 0,8125. 5.18. $\approx 0{,}0616$. 5.19. $m_0 = 5$.
5.20. По 200 Вт. Указание: учесть общую энергию при подсчете числа опытов с батареей в 120 Вт и с батареей в 200 Вт.
5.21. 0,2. 5.22. $\approx 0{,}2787$. 5.23. $\approx 0{,}3292$. 5.24. $\approx 0{,}4967$.
5.25. $P(C) \approx 0{,}246$; $P(Д) \approx 0{,}099$. 5.26. 0,999. 5.27. $\approx 0{,}9586$.
5.28. $\approx 0{,}02$. 5.29. $\approx 0{,}2385$. 5.30. $\approx 0{,}1563$. 5.31. а) 0,0902; б) $\approx 0{,}1429$. 5.32. $\approx 0{,}965$. 5.33. $m_0 = 4$: $P_{10}(m_0) \approx 0{,}2508$.
5.34. Известно, что $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$. Используя таблицу значений функции $\Phi(x)$, находим $n = 69$.

6.1. Пусть ξ – число вынутых белых шаров. Т.к. $P(\xi = 0) = 5/6$, $P(\xi = 1) = 1/6$, то ряд распределения имеет вид

ξ	0	1
p	5/6	1/6

6.2.

ξ	0	1	2
p	22/35	12/35	1/35

6.3.

ξ	1	2	3	4	5
p	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2

6.4.

ξ	0	1	2
p	0,36	0,48	0,16

6.5.

ξ	3	4	5	6	7
p	1/6	1/6	1/3	1/6	1/6

6.6.

ξ	0	1	2
p	2/5	8/15	1/15

$M_\xi = 2/3$; $D_\xi = 16/45$; $\sigma_\xi = 4\sqrt{5}/15$; $P(1 \le \xi < 3) = P(\xi = 1) + P(\xi = 2) = 3/5$; $P(\xi \ge 2) = 1/15$; $P(\xi > M_\xi) = 3/5$; $P(\xi = 1{,}5) =$

$= \;0;$

$$\mathcal{F}_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x \leq 0 \\ 2/5, & \text{при} \quad 0 < x \leq 1 \\ 14/15, & \text{при} \quad 1 < x \leq 2 \\ 1, & \text{при} \quad x > 2 \end{cases}$$

<u>6.7.</u>

ξ	0	1	2
p	0,25	0,5	0,25

; $M_\xi = 1$; $\mathcal{D}_\xi = 0{,}5$; $P(|\xi - M_\xi| < 1) =$ $= 0{,}5$. <u>6.8.</u> 4. <u>6.9.</u> $\approx 1{,}96$. <u>6.10.</u> $\sigma_\xi \approx 0{,}73$: $P(|\xi - M_\xi| < \sigma_\xi) = 25/28$.
<u>6.11.</u> $P(0{,}5 < \xi < 3) \approx 0{,}32$; $P(\xi = k) = \dfrac{5}{8} \cdot \left(\dfrac{3}{8}\right)^k$;

$k = 0, 1, 2, \ldots$ <u>6.12.</u> 1) 0.9375; 2) ≈ 0.848. <u>6.15.</u> а) Да;

ξ	0	1	2
p	0,3	0,2	0,5

; б) нет.

<u>6.16.</u>

ξ	0	1	2	3
p	0,294	0,448	0,222	0,036

: $P(\xi > 1) = 0{,}258$.

<u>6.17.</u>

ξ	-2	0	2
p	$(1-p)^2$	$2p(1-p)$	p^2

:

η	2
p	1

: $M_\xi = 2(2p - 1)$; $M_\eta = 2$;
$\mathcal{D}_\xi = 8p(1-p)$; $\mathcal{D}_\eta = 0$. <u>6.18.</u> $P(A) \approx 0.018$; $P(B) \approx 0.865$; $P(C) \approx 0.938$.
<u>6.19.</u> $M_T = 6 - e^{-a} \cdot (4 + 3{,}5a + 1{,}5a^2)$;

T	2	2,5	3	6
p	e^{-a}	$a \cdot e^{-a}$	$\frac{a^2}{2} \cdot e^{-a}$	$1 - e^{-a}(1 + a + a^2)$

.

<u>6.20.</u>

ξ	1	2	3
p	0,2	0,6	0,2

<u>6.21.</u>

ξ	0	1	2	3	4
p	0,6561	0,2916	0,0486	0,0036	0,0001

. <u>6.22.</u> $\mathcal{D}_\xi = 0.46$; $P(\xi \geq M_\xi) = 0.504$. <u>6.23.</u> 4; $P(\xi \leq 6) =$ $= 1$. <u>6.24.</u>

$$\mathcal{F}_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x \leq 0 \\ 0{,}729, & \text{при} \quad 0 < x \leq 1 \\ 0{,}972, & \text{при} \quad 1 < x \leq 2 \\ 0{,}999, & \text{при} \quad 2 < x \leq 3 \\ 1, & \text{при} \quad x > 3 \end{cases}$$

<u>6.25.</u> $\sigma_\xi^2 = 5/12$: $P(|\xi - M_\xi| > \sigma_\xi) \approx 0{,}9259$. <u>6.26.</u> $M_\xi = 3.5$.

<u>6.27.</u>

ξ	1	3	4
p	0,1	0,2	0,7

. <u>6.28.</u> а) да; б) M_ξ может быть меньше нуля, а D_ξ – нет. <u>6.29.</u> $D(\xi\cdot\eta)\neq D(\eta)+D(\xi)$.

<u>6.30.</u> $P(\xi=k)=0{,}8^{k-1}\cdot 0{,}2$, $k\in N$; $m_0=1$. <u>6.31.</u>

a	a
p	1

;

2) $F_a(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le a\\ 1, & \text{при } x>a\end{cases}$; $M_a=a$; $D_a=0$. <u>6.32.</u> 5. Совет: можно использовать формулу Пуассона. <u>6.33.</u>

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le -1\\ 1/4, & \text{при } -1< x\le 0\\ 3/4, & \text{при } 0< x\le 1\\ 1, & \text{при } x>1\end{cases}.$$

<u>6.34.</u> 0,8. <u>6.35.</u> 5/36; 1/6. <u>6.36.</u>

ξ	1	2	3	4	5
p	1/42	5/21	10/21	5/21	1/42

;

2) 11/42. <u>6.37.</u> $M_\xi=16/7$; $D_\xi=24/49$. <u>6.38.</u> 2. <u>6.39.</u> 4.
<u>6.40.</u> Нет. Указание: найдите математическое ожидание выигрыша.
<u>6.41.</u>

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le 0\\ 0{,}5, & \text{при } 0< x\le 1\\ 0{,}75, & \text{при } 1< x\le 2\\ 0{,}875, & \text{при } 2< x\le 3\\ 0{,}9375, & \text{при } 3< x\le 4\\ 1, & \text{при } x>4\end{cases};\quad P(-1<\xi\le 2)=0{,}875.$$

<u>6.42.</u>

ξ	0	1	2	$\cdots$	m	$\cdots$	$n-1$
p	q^{n-1}	$q^{n-2}\cdot p$	$q^{n-3}\cdot p$	$\cdots$	$q^{n-m-1}\cdot p$	$\cdots$	p

<u>6.43.</u>

η	-1	0	1
p	$q_1\cdot p_2$	$q_1 q_2+p_1\cdot p_2$	$p_1\cdot q_2$

, где $q_1=1-p_1$, $q_2=1-p_2$.

<u>6.44.</u> $P(T=kT)=0{,}4^{k-1}\cdot 0{,}6$, $k\in N$. <u>6.45.</u> 1) 0,2; 2) 0,9; 3) 0,3; 4) 3. <u>6.46.</u> 1) $M(\xi+a)=M_\xi+a$; 2) $D(\xi+a)=D(\xi)$; 3) $\sigma(\xi+a)=\sigma(\xi)$. <u>6.47.</u>

ξ	0	1	3
p	1/3	1/2	1/6

. <u>6.48.</u> $P(\xi=2)>P(\xi=i)$, где $i=0, 1, 3, 4, 5 \ldots$. <u>6.49.</u> 300. <u>6.50.</u> $\approx 0{,}1813$.
<u>6.51.</u> ≈ 41. Указание: предварительно найдите вероятность отказа

ровно одного элемента за время одного опыта.

7.I. I) $a = 0{,}5$;
$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0{,}5, & 0 \le x \le 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

$M_\xi = 1$; $D_\xi = 1/3$; 3) $P(0 \le \xi \le 1{,}5) = 0{,}75$; $P(\xi > M_\xi) = 0{,}5$; $P(\xi < 1) = 0{,}5$; $P(|\xi - M_\xi| < 1) = 1$. 7.2. $a = 0{,}5$;

а)
$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0 \\ 1/2\,(1-\cos x), & \text{при } 0 < x \le \pi \\ 1, & \text{при } x > \pi \end{cases};$$

б) $P(\pi/6 < \xi < \pi/3) = (\sqrt{3}-1)/4$; $P(\xi = \pi/2) = 0$

$P(-\pi < \xi < \pi/2) = 0{,}5$; $P(-\pi < \xi < 2\pi) = 1$. 7.3. I; 0; 0,25.

7.4. 2; 0,5; I. 7.5. $p_\xi(x) = \dfrac{1}{4\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\dfrac{(x-3)^2}{32}\right]$;

0,I9I5; 0; 0,9772; 0,2266. 7.6. 0,4972. 7.7. 0,9973. 7.8. 0,9544. 7.9. I; 0,75; 0,875; I. Совет: задача решается устно, если предварительно построить график функции $p_\xi(x)$.

7.I0.
$$F_\xi(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t}, & \text{при } t \ge 0; \end{cases}$$

$M_\xi = \frac{1}{\lambda}$; $D_\xi = \frac{1}{\lambda^2}$; $\sigma_\xi = \frac{1}{\lambda}$; $P(\xi < M_\xi) \approx 0{,}632I$. 7.II. $1/\gamma$. 7.I2. 0,5. 7.I3. 0,I586. 7.I4. 4,4 %. 7.I5. $a = 0{,}2$; $\sigma_\xi \approx 0{,}287$; $P(1 < \xi \le 2{,}5) = 0{,}45$. 7.I6. $a = 1/9$;
$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0 \\ x^3/27, & \text{при } 0 < x \le 3 \\ 1, & \text{при } x > 3; \end{cases}$$
$P(\xi > 2) = 19/27$.

7.I7. $M_\xi = 0$; $P(\xi \le 0) = 1/2$; $P(|\xi| < 1/2) = 3/4$. 7.I8. а) $\approx 0{,}8533$; б) $\approx 0{,}9736$; 7.I9. Т.к. $\sigma_\xi = 3\sqrt{2}$ и $M_\xi = -1$, то $P(\xi > 3) \approx 0{,}0294$, $P(-1 < \xi < 2) \approx 0{,}4207$. 7.20. а) $1/\pi$; $F_\xi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\,\mathrm{arctg}\,x$; $P(-1 < \xi < 1) = 0{,}5$; б) нет. 7.2I. I) $P(A) \approx 0{,}3834$; 2) $P(B) \approx 0{,}3679$.

7.22.
$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < a \\ \dfrac{1}{b-a}, & \text{при } a \le x \le b \\ 0, & \text{при } x > b; \end{cases} \qquad F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0 \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{при } a \le x \le b \\ 1, & \text{при } x > b; \end{cases}$$

$M_\xi = \frac{a+b}{2}$; $D_\xi = \frac{(b-a)^2}{12}$; $\sigma_\xi = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$. 7.23. $\approx 0{,}9889$.
7.24. $D_\xi = 1/3$; $P(2{,}5 \le \xi \le 3{,}5) = 0{,}25$. 7.25. $\lambda = 0{,}25$.

$$\mathcal{F}_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{, при } x < 0 \\ x^2/2 - x^4/16 & \text{, при } 0 \le x \le 2 \\ 1 & \text{, при } x > 2; \end{cases} \quad P(-2 < \xi < 1) = 7/16; \quad M_\xi = 16/15.$$

7.26. 1,5. 7.27. а)
$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{, при } x < 0 \\ x/8 & \text{, при } 0 \le x < 2 \\ 1 & \text{, при } 2 \le x < 11/4 \\ 0 & \text{, при } x \ge 11/4; \end{cases}$$
в) $P(1 \le \xi \le 1{,}5) \approx 0{,}0781$. 7.28. $\sigma_\xi^2 = 1/6$; $P(\xi < 1{,}5) = 0{,}875$.
7.29. 0,25. 7.30. $\mathcal{F}_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{, при } x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{, при } x \ge 0; \end{cases}$ $P(1 \le \xi < 2) = e^{-1} - e^{-2}$.
7.31. 0,5. 7.32. 1) $\mathcal{F}_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0; \\ 1 - \exp(-0{,}001x), & \text{при } x > 0 \end{cases}$ 2) $P(\xi \le 1000) \approx 0{,}632$;
3) $M_\xi = \sigma_\xi = 1000$. 7.33. 1/3. 7.34. $M_\xi = 1$; $D_\xi = 1/3$. 7.35. а) $1/\sqrt{3}$; б) $1 - 1/\sqrt{3}$. 7.36. 0,4. 7.37. (2,47; 2,53) Указание: применить правило "трех сигм". 7.38. $\sigma_\xi \approx 0{,}0365$ кг. Указание: воспользоваться тем, что 95 % коробок имеют массу не меньше 1 кг.
7.39. $\approx 0{,}999$, т.к. $P(|\xi| < 6) \approx 0{,}8664$; $P(|\xi| > 6) \approx 0{,}1336$.
7.40. $a \approx 15{,}39$; $\sigma \approx 3{,}26$. 8.1. 1) $\lambda = 0{,}05$; 2) $M_\xi = 22$; $M_\eta = 41$; 3) $D_\xi = 56$; $D_\eta = 259$; $r_{\xi,\eta} = 0{,}5646$. 8.2. $K_{\xi,\eta} = -0{,}0195$. 8.3. 1) $a = 24$; 2) $M_\xi = M_\eta = 0{,}4$; 3) $D_\xi = D_\eta = 0{,}04$; 4) $r_{\xi,\eta} = -2/3$. 8.4. $r_{\xi,\eta} = 0$.
8.5. $P(0 \le \xi \le \pi/2;\ 0 \le \eta \le \pi/4) = 0{,}5$.
8.6.
$$p(x,y) = \begin{cases} 8e^{-2(2x+y)} & , x > 0 \text{ и } y > 0 \\ 0 & , x \le 0 \text{ или } y \le 0; \end{cases} \quad P(0 \le \xi \le 1;\ 0 \le \eta < 1) = (e^{-4} - 1)(e^{-2} - 1).$$

8.7. $r_{\xi,\eta} = -1/11$. 8.8. $r_{\xi,\eta} = 0{,}5$: 8.9. Зависимы, но не коррелированы. 8.10. Зависимы. 8.11. Независимы. 8.12. Нет; да. 8.13. $r_{\xi,\eta} = -1$. 8.14. $r_{\xi,\eta} = -1$. 8.15. $K_{\xi,\eta} = D_\xi$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Устинов М.Д., Воробьева А.П. Теория вероятностей. Ч.1. - Мн.: БТИ им.С.М.Кирова, 1982.

2. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. - М.: Наука, 1978.

3. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.1. - М.: Мир, 1964.

4. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Прикладные задачи теории вероятностей. - М.: Радио и связь, 1983.

5. Гурский Е.И. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике. - Мн.: Вышэйшая школа, 1984.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Составители: Алещенко Людмила Николаевна,
Кончиц Раиса Михайловна
Редактор О.Ю.Ромаева. Корректор Л.Ф.Папко.
Подписано в печать 2.04.99.Формат 60х84 1/16.
Печать офсетная.Усл.печ.л.3,9.Усл.кр.-отт.3,9.Уч.-изд.л.3,3.
Тираж 250 экз. Заказ 156.
Белорусский государственный технологический университет.
220050. Минск,Свердлова,13 а.
Отпечатано на ротапринте Белорусского государственного технологического университета. 220050. Минск,Свердлова,13.