Министерство народного образования БССР

БЕЛОРУССКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМЕНИ С.М.КИРОВА

Кафедра высшей математики

ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ В ВОПРОСАХ, УПРАЖНЕНИЯХ И ЗАДАЧАХ

Методическое пособие по дисциплине " Высшая математика " для практических занятий и самостоятельной работы студ. спец. 31.12

Минск 1990

УДК 519.2

Рассмотрено и рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом института.

Составители: Л.Н.Алещенко, Л.И.Гром, Р.М.Кончиц.

Научный редактор профессор В.М.Марченко.

Рецензент доцент кафедры высшей математики ф-та прикладной математики БГУ им.В.И.Ленина Н.Ф.Наумович.

Пособие содержит контрольные вопросы и упражнения, стандартные задачи (уровень А), нестандартные задачи (уровень В). Учтена профессиональная ориентация студентов.

Методическое пособие может быть использовано при проведении практических занятий и для самостоятельной работы студентов.

Пособие предназначено для студентов первого курса спец. 31.12 "Лесное и садово-парковое хозяйство".

По тематическому плану внутривузовских изданий учебно-методической литературы на 1990 год. Поз.26.

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее пособие составлено в соответствии с программой курса "Высшая математика" для студентов I курса специальности "Лесное и садово-парковое хозяйство".

Цель пособия - определить объём изучаемого материала, повысить эффективность практических занятий, стимулировать самостоятельную работу студентов.

В каждом разделе пособия приведены контрольные вопросы и упражнения, стандартные задачи (уровень А), нестандартные задачи (уровень Б). Почти все разделы содержат прикладные задачи, учтена профессиональная ориентация студентов.

Задачи уровня А и аналогичные им составляют обязательный минимум.

Предполагается, что решению приведенных задач предшествует работа студентов по изучению теоретического материала. Контрольные вопросы и упражнения помогут проверить степень усвоения этого материала.

В пособии ко многим типам задач предлагаются "подсказки", краткие указания или советы (иногда в виде схем или алгоритмов, выделенных в рамках). В конце пособия ко всем задачам даны ответы, а к некоторым задачам и решения.

I. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

Контрольные вопросы и упражнения

I. Дайте определения конечного предела функции, односторонних пределов.

2. Сформулируйте определение бесконечно малой функции.

3. Дайте определение бесконечно большой функции.

4. Сформулируйте основные теоремы о пределах.

5. Перечислите свойства бесконечно малых функций.

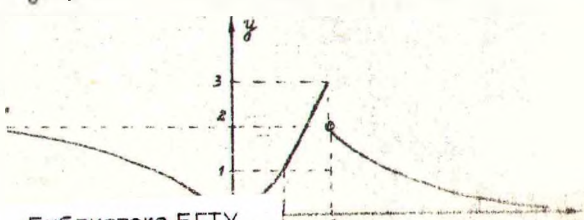
6. Для функции $y=f(x)$, заданной графически, найдите следующие пределы:

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$;

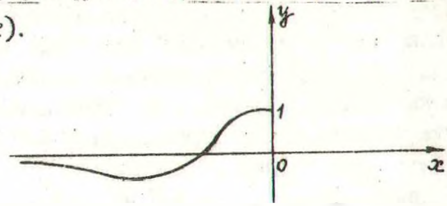
2) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$;

3) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$;

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.



7. Достройте график функции для $x>0$ так, чтобы существовал $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.



8. Дайте графическую иллюстрацию следующих равенств:

1) $\lim\limits_{x\to -1-0} f(x)=+\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x)=-\infty$;

3) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=+\infty$;

4) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-\infty$;

5) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=\infty$;

6) $\lim\limits_{x\to +0} f(x)=-2$.

9. Существует ли $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, если

$$f(x)=\begin{cases} x-1, & x\le 1,\\ (x-1)^2, & x>1. \end{cases}$$

10. Приведите пример функции, предел которой при $x\to 1$ равен: 1 ; 0; ∞.

11. Приведите пример функции, предел которой при $x\to\infty$ равен: 0;2;∞.

12. Запишите замечательные пределы и их следствия.

Стандартные задачи и упражнения (А)

Вычислите пределы:

1.1. $\lim\limits_{x\to 2}(2x^2-3x+1)$;

1.2. $\lim\limits_{x\to -2}\left((x+1)(x+2)^2\right)$;

1.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-3x-x^2}{x^2+2x-3}$;

1.4. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x+1}$;

1.5. $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x+3\cdot 2^x)$;

1.6. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$;

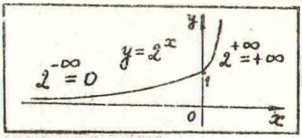
1.7. $\lim\limits_{x\to \lg 2}\left(\dfrac{10^x-2}{10^x+2}+10^x\right)$;

1.8. $\lim\limits_{x\to -\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$;

1.9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x+7}$;

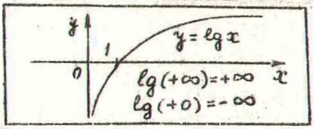
1.10. $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-x+1)$;

I.11. $\lim\limits_{x\to 2}\left(x-\frac{1}{x^2-4}\right)$;



I.12. $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x+1)\,2^{\frac{x}{2}}$;

I.13. $\lim\limits_{x\to+\infty}3^{-2x^2+x}$;



I.14. $\lim\limits_{x\to+0}\frac{x+3}{\lg x}$.

Вычислите пределы и дайте графическую иллюстрацию:

I.15. $\lim\limits_{x\to 1\pm 0}\frac{x}{x-1}$;

I.16. $\lim\limits_{x\to 2\pm 0}2^{\frac{1}{x-2}}$;

I.17. $\lim\limits_{x\to 3\pm 0}\frac{x+1}{(x-3)^2}$;

I.18. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^2-1}$;

I.19. $\lim\limits_{x\to\pm 0}\frac{x+3}{x^2+3}$;

I.20. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+x}{x\cos x}$.

Вычислите пределы:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x_0\in\mathbb{R}}}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)(\cdots)}{(x-x_0)(\cdots)}$$

I.21. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{4-x^2}$;

I.22. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2-18}{x^4-81}$;

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$
$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

I.23. $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}}\frac{27x^3+1}{3x^2+x}$;

I.24. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{4x^2+7x+3}{2x^2+x-1}$;

I.25. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{2x^3+2x^2+3x+3}{x^3+x^2+x+1}$;

I.26. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{5x+1}-4}{x-3}$;

I.27. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{9+x}-3}{x^2+x}$;

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{u}-\sqrt{v}}{(\cdots)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{u-v}{(\cdots)(\sqrt{u}+\sqrt{v})}$$
$$x_0\in\mathbb{R}$$

I.28. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{2x+1}-3}$;

I.29. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+1}{4x^2-6}$;

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^n(\cdots)}{x^m(\cdots)}$$

I.30. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-5x}{2x^4-1}$;

I.31. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-4x^2+2}{3x^2+5}$;

I.32. (Устно) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+1}{3x-2}$, I.33. (Устно) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+4}{x^4-3}$;

I.34. (Устно) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x^2+5}$;

I.35. $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{(t+1)(2t-1)}{5t^2-6}$;

I.36. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{3x}$;

$$\boxed{\begin{aligned} &\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = 1 \\ &\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = 1 \\ &\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = 1 \\ &\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = 1 \end{aligned}}$$

I.37. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin 5x}{3x}$;

I.38. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x \cdot \sin 2x}{3x}$;

I.39. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 7x}{2^x \cdot \sin 3x}$;

I.40. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\arcsin 7x}$;

$$\boxed{1-\cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}}$$

I.41. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 4x}{\cos\frac{x}{3} \cdot \operatorname{tg} 3x}$;

I.42. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \cdot 5^{-x}}{\operatorname{arctg}^2 3x}$;

I.43. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\operatorname{arctg}(x+2)}{x^2-4}$;

I.44. $\lim\limits_{x\to 0} (x \cdot \operatorname{ctg} 3x)$;

I.45. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{\sqrt{3+x} - 3}$;

I.46. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sin x}{x}$;

$$\boxed{\begin{aligned} &\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = (1^\infty) = e \\ &\qquad \boxed{e = 2{,}71828\ldots} \\ &\lim_{\alpha\to 0} (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = (1^\infty) = e \end{aligned}}$$

I.47. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{4x+1}$;

I.48. $\lim\limits_{x\to 0} (1-4x)^{\frac{5}{x}}$;

I.49. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{3}{x}}$;

$$\boxed{\begin{aligned} &\lim_{x\to x_0} (u(x))^{v(x)} = (1^\infty) = \\ &= \lim_{x\to x_0} (1+u-1)^{\frac{1}{u-1}\cdot(u-1)\cdot v} = \\ &= \lim_{x\to x_0} \left((1+u-1)^{\frac{1}{u-1}}\right)^{(u-1)\cdot v} = e^{\lim\limits_{x\to x_0}(u-1)\cdot v} \\ &\qquad\qquad x_0 \in \overline{\mathbb{R}} \end{aligned}}$$

I.50. $\lim\limits_{x\to 0} (1+\sin 3x)^{\frac{1}{x}}$;

I.51. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1-\dfrac{2}{x-1}\right)^{x+2}$;

I.52. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2x+1}{3x-2}\right)^x$;

I.53. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)^{3x^7}$.

<u>Нестандартные задачи и упражнения (Б)</u>

Вычислите пределы:

I.54. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}\pm 0} 3^{\operatorname{tg} 2x}$;

I.55. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}\pm 0} \dfrac{2}{1+2^{\operatorname{tg} x}}$;

I.56. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{a^x}{1+a^x}$;

I.57. $\lim\limits_{x\to -8} \dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$; I.58. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$; I.59. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2+1}}$.

I.60. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2+px+q}{x+2} = A$. При каких значениях p , q :

I) $A=\infty$; 2) $A = 0$; 3) $A = -3$?

I.6I. Найдите односторонние пределы при $x\to 2$ функции $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-2}$. Дайте графическую иллюстрацию.

Вычислите пределы:

$$\boxed{\begin{array}{c|c} \infty-\infty & \nearrow \dfrac{0}{0} \\ 0\cdot\infty & \searrow \dfrac{\infty}{\infty} \end{array}}$$

I.62. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x^2-5x+6}\right)$;

I.63. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2+1}-x\right)$; I.64. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\right)$.

I.65. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^3+bx^2-5x+6}{3x^2+4}=A$. При каких значениях a , b :

I) $A=\infty$; 2) $A = 0$; 3) $A = -2$?

I.66. $\lim\limits_{x\to\pi/2} ((\frac{\pi}{2}-x)\operatorname{tg} bx = A$.

При каком значении b : I) $A=1$;2) $A=0$; 3) $A=\dfrac{1}{7}$?

Вычислите пределы:

I.67. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{(x^2+x)\cdot\sin\frac{x}{2}}$;

I.68. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{3x+1}$; I.69. $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{x^2}{x-2}}$;

I.70. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x\left(\ln(2-4x)-\ln(1-4x)\right)\right)$;

I.71. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{ax+1}{bx+2}\right)^{cx}=A$, если $a, b>0$.

I.72. Существует ли $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, если

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x^2} & \text{при} \quad x<0, \\ \dfrac{\ln(1+2x)}{4x} & \text{при} \quad x>0\ ? \end{cases}$$

Задачи с прикладным содержанием

I.73. В топографии возникает необходимость найти отношение стрелы $f=DB$ (высоты сегмента) дуги ABC окружности радиуса r к стреле $f_1=D_1B_1$ половины AB_1B этой дуги, если центральный угол AOB мал. Найти это отношение.

I.74. Модели

$$N(t)=N_0 e^{rt}, \qquad (1)$$

$$N(t)=(N_0+k(e^{rt}-1))e^{-rt}, \qquad (2)$$

$$N(t)=\frac{N_0 k e^{rt}}{k-N_0(1-e^{rt})} \qquad (3)$$

описывают изменение численности биологических популяций [9]. Найдите $\lim\limits_{t\to+\infty} N(t)$. Дайте пояснения полученным результатам с точки зрения динамики численности популяций.

II. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

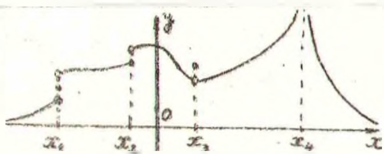
Контрольные вопросы и упражнения

1. Дайте определения непрерывности функции в точке, на интервале, на отрезке.

2. Сформулируйте утверждения, равносильные определению непрерывности функции в точке.

3. Дайте определения точек: разрыва функции, устранимого разрыва, разрыва I и II рода.

4. Сформулируйте основные теоремы о непрерывных функциях.



5. Укажите точки разрыва функции $y=f(x)$, заданной графически. Исследуйте их характер.

6. Функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ непрерывны на некотором промежутке. Обязательно ли непрерывна на этом промежутке функция $y=\frac{f(x)}{g(x)}$?

7. Функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и $f(a)\cdot f(b)<0$. Следует ли отсюда, что уравнение $f(x)=0$: 1) имеет корень на $[a;b]$; 2) имеет единственный корень

на $[a, b]$?

8. Пусть x_0 – точка разрыва функции $y=f(x)$. Следует ли отсюда, что точка x_0 не входит в область определения этой функции?

Стандартные задачи и упражнения (А)

2.1. Докажите, что функция $y=f(x)$ непрерывна в любой точке области ее определения:

1) $f(x)=x^2+2x$; 2) $f(x)=\frac{1}{x+1}$. $\boxed{\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x)}$

2.2. Исследуйте функцию на непрерывность. В случае существования точек разрыва установите их характер, если:

1) $f(x)=\frac{12}{x^2+x+1}$; 2) $f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$;

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \iff f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)}$$

3) $f(x)=\frac{x+1}{(x-3)^2}$; 4) $f(x)=x\,e^{-x^2}$;

5) $f(x)=e^{\frac{1}{x-2}}$; $\boxed{e^{+\infty}=+\infty \ ; \ e^{-\infty}=\frac{1}{e^{+\infty}}}$

6) $f(x)=(x^2+1)e^{-3x}$; 7) $f(x)=\frac{2}{x^2-5x+6}$;

8) $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$; $\boxed{\frac{2}{x^2-5x+6}=\frac{2}{(x-3)(x-2)} \underset{x\to 2}{\sim} \frac{2}{-(x-2)}}$

9) $f(x)=\begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{при } x<0, \\ 2\cos x & \text{при } x\geq 0; \end{cases}$ 10) $f(x)=\begin{cases} -x & \text{при } x\leq 0, \\ \frac{2}{x} & \text{при } x>0; \end{cases}$

11) $f(x)=\begin{cases} x-1 & \text{при } x\leq 1, \\ (x-1)^2 & \text{при } x>1; \end{cases}$ 12) $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x-2}$.

$\boxed{\operatorname{arctg}(\pm\infty)=\pm\frac{\pi}{2}}$

Нестандартные задачи и упражнения (Б)

2.3. Исследуйте функцию на непрерывность, сделайте схематический чертеж ее графика:

1) $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{при } x<1, \\ 0 & \text{при } x=1, \\ x & \text{при } 1<x<2, \\ 2 & \text{при } x\geqslant 2; \end{cases}$

2) $f(x)=\frac{1}{\ln x}$;

3) $f(x)=\frac{\operatorname{tg} x}{x}$;

$\boxed{x+\frac{1}{x}\underset{x\to\infty}{\sim} x}$

$\boxed{x+\frac{1}{x}\underset{x\to 0}{\sim}\frac{1}{x}}$

4) $f(x)=\exp\{x+\frac{1}{x}\}$;

5) $f(x)=\frac{x^3+1}{x+1}$;

6) $f(x)=\frac{5x^2-3x}{2x}$;

7) $f(x)=\frac{1}{2+2^{1/x}}$;

8) $f(x)=\frac{1}{3-3^{1/x}}$;

9) $f(x)=\frac{x}{\sin x}$;

10) $f(x)=x\cdot\sin\frac{\pi}{x}$.

2.4. Каким должно быть $f(0)$, чтобы функция $f(x)$ была непрерывна на $\mathbb{R}$, если $f(x)=\frac{1-\cos x}{x^2}$?

2.5. $f(x)=\begin{cases} e^x, & \text{если } x<0 \\ a+x, & \text{если } x\geqslant 0 \end{cases}$. При каком выборе числа a функция $f(x)$ будет непрерывна на $\mathbb{R}$?

2.6. Докажите, что уравнение $x^5-3x=1$ имеет по крайней мере один корень, заключенный между 1 и 2.

2.7. Пусть x_0 – точка разрыва функции $f(x)$. Следует ли отсюда, что не существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$?

2.8. Приведите пример функции, которая разрывна в точке $x=-4$.

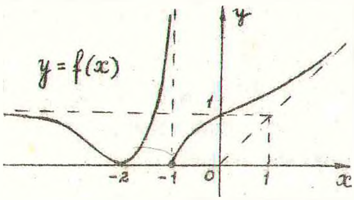
2.9. Приведите пример функции, которая не обращается в нуль ни при одном значении x, но может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

2.10. Что можно сказать о непрерывности суммы двух функций в точке x_0, если: а) одна из них непрерывна в точке x_0, а другая разрывна в этой точке; б) обе разрывны ?

III. АСИМПТОТЫ

Контрольные вопросы и упражнения

1. Дайте определение асимптоты графика функции.



2. Напишите уравнения всех асимптот графика функции $y=f(x)$.

(График функции $y=f(x)$ изображен на рисунке.)

3. Проверьте, исходя непосредственно из определения, что прямая $y=2x+1$ есть асимптота линии $y=\frac{2x^4+x^3+1}{x^3}$.

4. Напишите уравнения всех асимптот графика функции $f(x)=3x+5+\frac{1}{x^2}$.

5. Если $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$, то можно ли утверждать, что график функции $y=f(x)$ имеет асимптоты? Если да, то напишите их уравнения.

Стандартные задачи и упражнения (А)

3.1. Найдите асимптоты графика функции, если они существуют:

I) $y=\frac{x^2+1}{x-1}$; $\boxed{\frac{x^2+1}{x-1}=x+1+\frac{2}{x-1}}$

2) $y=\frac{x+1}{(x-3)^2}$; $\boxed{\frac{x+1}{(x-3)^2}\underset{x\to\infty}{\sim}\frac{x}{x^2}=\frac{1}{x}}$

3) $y=\frac{x^3+2x+3}{x^2+1}$; $\boxed{x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n\underset{x\to\infty}{\sim}x^n}$

4) $y=\frac{1}{x^2-1}$; 5) $y=\frac{12}{x^2+x+1}$; 6) $y=\frac{2}{x^2-5x+6}$;

7) $y=3e^{-x^2}$; 8) $y=e^{1/(x-2)}$.

Нестандартные задачи и упражнения (Б)

3.2. Найдите асимптоты графика функции, если они существуют:

I) $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x-2}$; 2) $y=\frac{x^3+1}{x+1}$; ; 3) $y=\frac{1}{\ln x}$;

4) $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{2-x} & \text{при } x\le 1,\\ \frac{2}{x-1} & \text{при } x>1;\end{cases}$ 5) $f(x)=(x+1)e^{-3x}$;

6) $f(x)=e^{x+\frac{1}{x}}$; 7) $f(x)=\frac{1}{2+2^{1/x}}$; 8) $f(x)=\frac{1}{3-3^{1/x}}$.

3.3. Найдите асимптоты графика функции, заданной параметрически, $x=\frac{1}{t}$, $y=\frac{1}{t+1}$.

3.4. Функции I) $f(x)=\frac{x}{ax+b}$; 2) $f(x)=\frac{x^2}{ax^2+bx+c}$ используются при вычислении таксационных показателей [IO]. Найдите асимптоты графиков этих функций.

IУ. ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ

Контрольные вопросы и упражнения

I. Дайте определение производной функции $y=f(x)$ в точке x_0.

2. Каков геометрический смысл производной функции $y=f(x)$ в точке x_0? Дайте определение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке ($x_0; f(x_0)$) и напишите её уравнение.

3. Каков физический смысл производной функции $y=f(x)$ в точке x_0 ?

4. Сформулируйте правила дифференцирования и теорему о производной обратной функции.

5. Восстановите в памяти таблицу производных.

6. Дайте определение производной второго порядка функции $y=f(x)$ в точке x_0.

7. Тело движется прямолинейно по закону $s=s(t)$. Что можно сказать о характере движения, если:
I) $s'(t)=1$; 2) $s'(t)=2t$; 3) $s''(t)=0$;
4) $s''(t)>0$; 5) $s''(t)=-5$?

8. Дайте определение производной n-го порядка функции $y=f(x)$ в точке x_0.

9. Всякая ли непрерывная функция дифференцируема?

IO. Дайте определение дифференциала функции $y=f(x)$ в точке x_0.

II. Постройте график какой-либо функции $y=f(x)$, у которой: I) $dy=\Delta y$; 2) $dy>\Delta y$; 3) $dy<\Delta y$; 4) $dy=0$.

I2. Перечислите основные свойства дифференциалов.

I3. Напишите формулы для вычисления производных первого и второго порядков функции, заданной параметрически.

Стандартные задачи и упражнения (А)

4.I. Найдите, исходя из определения, производную функции: I) $y=x^2+2x$; 2) $f(x)=\sqrt{x}$; 3) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$.

4.2. Напишите уравнение касательной, проведенной к кривой $y=x^2+2x$, в точке с абсциссой $x=1$.

4.3. В какой точке угловой коэффициент касательной к кривой $y=\sqrt{x}$ равен I ?

4.4. Какая из функций: $y=x^2+2x$, $y=\sqrt{x}$, $y=\dfrac{1}{x+1}$ имеет большую скорость изменения в точке $x=1$?

4.5. Точка движется по оси согласно закону $x=\frac{1}{4}(t^4-4t^3+2t^2-12t)$. В какой момент времени точка остановится?

4.6. Найдите производную функции:

I) $y=\dfrac{x^2-6x+5}{x-3}$;

$$\boxed{\begin{array}{c} x^0=1,\ x\neq 0 \\ \sqrt[n]{x^m}=x^{\frac{m}{n}} \\ \dfrac{1}{x^p}=x^{-p} \end{array}}$$

2) $y=3\sin 2x+\dfrac{x^3}{5x^2+2}$;

3) $y=(x^2-4x+1)e^{-x^2+4x}$;

4) $y=\sqrt{x^3}\cos(3-5x^4)$;

5) $y=\dfrac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\ln(x^2-4)}$;

6) $y=\sin^3(1-x)$;

$$\boxed{\begin{array}{c} \sin^k x \equiv (\sin x)^k \\ \ln^k x \equiv (\ln x)^k \\ \ldots \end{array}}$$

7) $S=\sqrt[3]{\arcsin 3t}$;

8) $z=\dfrac{\operatorname{ctg}^2\frac{1}{2\varphi}}{3}$;

9) $y=\dfrac{1}{\sqrt[4]{\operatorname{arctg}\frac{3}{v}}}$;

$$\boxed{\begin{array}{c} \left(\dfrac{u}{c}\right)'=\dfrac{1}{c}u' \\ c=const \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{c} \left(\dfrac{c}{v}\right)'=\dfrac{-c}{v^2}\cdot v' \\ c=const \end{array}}$$

I0) $y=\ln^2(\sin(3x-1))$;

II) $y=2^{\arccos\sqrt{x}}+x\sin\frac{\pi}{x}$;

I2) $z=(e+x)^2-3^{-\frac{1}{x}}+\dfrac{1}{5^{x^2}}$;

I3) $y=\lg\sqrt{\dfrac{x}{10^x}}$;

I4) $z=\dfrac{\operatorname{arcctg}\sqrt[5]{t}}{3t^2+7}$;

I5) $y=\log_3(\ln\operatorname{tg}x)$.

4.7. Устно продифференцируйте функцию:

I) $y=x^{\sqrt{2}}+(\sqrt{2})^x$;

2) $y=4\sqrt{x}-\sqrt[4]{3}$;

3) $y=\lg x+10^x-\sin 2$;

4) $y=\dfrac{1}{\ln x}$;

5) $y=(2x+1)^{10}$;

6) $y=\operatorname{arctg}3x+\operatorname{arcctg}\frac{1}{2}$;

7) $y=\pi\cos^2 x$;

8) $y=2e^{-x}+e^{2x+1}$;

9) $y=e^{\sqrt{x}}+\sqrt{e^x}$; I0) $y=e\ln(2x-1)$;

II) $y=\sin\frac{\pi}{x}$; I2) $y=\sin(\sin(\sin x))$;

I3) $y=\ln(\ln(\ln x))$; I4) $y=\sin(\ln x)+\ln(\sin x)$.

4.8. Найдите производную функции:

I) $y=\sqrt{2\pi+\operatorname{tg}\left(x+\frac{1}{x}\right)}$; 2) $y=\frac{1}{2}\sqrt{\arcsin\sqrt{x^2+2x}}$;

3) $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$; 4) $y=\ln\left(\operatorname{arctg}\sqrt{1+x^2}\right)$;

5) $y=\log_2(\ln(\log_3 x))$; 6) $f(x)=\arccos^2(\ln(a^3+x^3))$;

7) $y=\sin\left(e^{x^2+3x-2}\right)$; 8) $y=2^{3^x}$;

9) $y=\ln\left(\sin\left(\sqrt[3]{\operatorname{arctg} e^{3x}}\right)\right)$; I0) $f(x)=a^{\cos^3 x}$;

II) $y=\sqrt{x^2-1}\, e^{\arcsin\frac{1}{x}}$; I2) $y=\frac{1}{4}\ln\dfrac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}$;

I3) $y=5^{\ln\operatorname{ctg}2x-0{,}5\operatorname{ctg}4x}$; I4) $y=e^{\frac{1}{\cos 4x}}\cdot\sin 4x$;

I5) $y=\operatorname{arcctg}\left(\ln\frac{1}{x^2}\right)$; I6) $y=\exp\left\{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right\}$;

I7) $y=\sin^2\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)$; I8) $y=\ln\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{1+x}\right)$;

I9) $y=\ln\frac{1-e^x}{e^x}$; 20) $y=10^{x\operatorname{tg}x}$; 2I) $y=\sin^3 x\cdot\sin(x^3)$;

22) $y=e^x\sin x-\cos^5(e^x)$; 23) $y=\dfrac{1+x\operatorname{arctg}x}{\sqrt{1+x^2}}$;

24) $y=e^{\operatorname{ctg}\sqrt{1+\ln(2x+3)}}$; 25) $y=\ln(\cos(\operatorname{arcctg}3^x))$.

4.9. $y=(x-4)(x+1)^2$; $y''=?$

4.I0. $y=\dfrac{1-2x}{2+3x}$; $y''=?$; $y''(-1)=?$

4.II. $y=\sin^2 x$; $y'''=?$

4.I2. $y=e^{3x+2}$; $y^{(4)}=?$

4.I3. $y=\dfrac{1}{1-x}$; $y^{V}(0)=?$

4.I4. Докажите, что функция $y=e^x\sin x$ удовлетворяет уравнению $y''-2y'+2y=0$.

4.I5. Докажите, что функция $y=e^{4x}+2e^{-x}$ является решением уравнения $y'''-13y'-12y=0$.

4.I6. Дана функция $f(x)=-2e^{-8x^2-4x}$. Найдите корни уравнения $f''(x)=0$.

4.I7. Дана функция $f(x)=\dfrac{x^2-4x-4}{x+1}$. Найдите значения $f''(x)$ в точках, в которых $f'(x)=0$.

4.18. Решите неравенство $f'(x)>0$, если $f(x)=(3x^2-x+1)e^{-x}$.

4.19. Точка движется прямолинейно по закону $S(t)=\frac{t^4}{4}-\frac{t^3}{2}-3t^2+4$. В какой момент времени ускорение равно нулю?

4.20. Тело постоянной массы движется прямолинейно по закону $S=t^2+4$. Докажите, что сила, действующая на него, постоянна.

4.21. По прямой линии движутся две точки. Закон движения первой точки задан функцией $y=f(t)$, второй точки – функцией $y=g(t)$. Определите, в какие моменты времени точки имеют одинаковое ускорение, если:

1) $f(t)=\sin 2t$, $g(t)=2t^2+3t+1$;

2) $f(t)=e^t$, $g(t)=5t^2+\frac{4}{3}t+\frac{1}{2}$.

4.22. Найдите, исходя из определения, дифференциал функции:

1) $f(x)=x^2+3$; 2) $f(x)=2x+5$; 3) $f(x)=x^3$.

4.23. Найдите $d(f(x))$, если:

1) $f(x)=\sin 2x$; 2) $f(x)=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$; 3) $f(x)=3^{-\frac{x}{3}}+1$;

4) $f(x)=\arcsin 3x$; 5) $f(x)=\cos(x^2)$; 6) $f(x)=e^{\cos x}$.

4.24. 1) $d(\operatorname{arctg}\frac{1}{t})=?$; 2) $d(2^{t^3})=?$

3) $d(e^{\frac{1}{u}})=?$; 4) $d(\ln(\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+1))=?$

5) $d(\log_3(2t-1))=?$ 6) $d(\frac{1+x}{1-x})=?$

7) $d(x^2-u^3)=?$ 8) $d(u^2\cdot 2^v)=?$

9) $d(\arccos(u+v))=?$ 10) $d(\frac{3t}{\sqrt{t}})=?$

4.25. (Устно) 1) $e^x dx=d(?)$; 2) $\frac{1}{t}dt=d(?)$;

3) $x\,dx=d(?)$; 4) $\frac{1}{2t-1}dt=d(?)$; 5) $t^2dt=d(?)$

6) $\cos\frac{x}{2}dx=d(?)$; 7) $\frac{1}{\cos^2 t}dt=d(?)$;

8) $\frac{1}{\sin^2 3t}dt=d(?)$; 9) $(x-x^2+\frac{1}{x}-5)dx=d(?)$.

Нестандартные задачи и упражнения (Б)

4.26. $y = x^{\cos x}$; $y' = ?$

4.27. $y = (\cos x)^{\sin x}$; $y' = ?$

$$\boxed{u^v = e^{v \ln u}, \quad u>0}$$

4.28. $y = (\sin 3x)^{\sqrt{x^2+1}}$; $y' = ?$

4.29. Докажите, что если $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные в точке x и $u(x)>0$, то функция $(u(x))^{v(x)}$ также имеет производную в точке x, причем

$$\boxed{(u^v)' = v\cdot u^{v-1}\cdot u' + u^v \ln u \cdot v'}$$

4.30. Изобразите траекторию точки (x, y), движение которой на плоскости Oxy задается уравнениями:

1) $\begin{cases} x = t \\ y = t^2, \quad -\infty < t < +\infty; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = \cos^2 t \\ y = \sin^2 t, \quad 0 \le t \le 2\pi; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t), \quad -\infty<t<+\infty; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x = e^t \\ y = e^{2t}, \quad -\infty<t<+\infty; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x = \ln t \\ y = t^2, \quad 0 < t < +\infty. \end{cases}$

В каждом из этих случаев найдите скорость и ускорение точки в произвольный момент времени t.

4.31. Найдите уравнение касательной к линии

$\begin{cases} x = t - t^4 \\ y = t^2 - t^3 \end{cases}$ в точке (0;0).

4.32. Найдите углы, под которыми пересекаются линии

$y = x^2$ и $\begin{cases} x = \frac{5}{3}\cos t \\ y = \frac{5}{4}\sin t. \end{cases}$

4.33. $x^2 + y^2 = r^2$; $y'_x = ?$

4.34. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$; $y'_x = ?$

4.35. $3x^2 - 4y^2 = 12$; $x'_y = ?$

4.36. Найдите y'_x, если:

1) $y^2 = 1 - 2x$; 2) $y^2 = \frac{4}{9}(2-x)^3$; 3) $y^2 = 3x^3$;

4) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$; 5) $x^2 + y^2 - 8y + 7 = 0$; 6) $y^2 + 2y - x + 1 = 0$.

4.37. Найдите x'_y, если:

1) $y^2 + 2y - x + 1 = 0$; 2) $5x = 29 - 2y - y^2$; 3) $2x = (y+3)^2$;
4) $x^2 = y^3$.

4.38. Вычислите $y'(0)$ для функции $y = \sqrt[5]{\dfrac{(1-x)^2\cos x}{(x^2+1)^3}}$.

4.39. Докажите, что для малых значений x справедливы следующие приближенные формулы: 1) $\sin x \approx x$;
2) $\sqrt{1+x} \approx \frac{1}{2}x + 1$; 3) $\sqrt[3]{1+x} \approx \frac{1}{3}x + 1$.

4.40. Является ли прямая $y = 3x - 4$ касательной к линии $y = x^2 + 2x$ в некоторой точке ?

4.41. Докажите, что функция

$$f(x) = \begin{cases} \sin x \text{ при } x \geq 0, \\ x^2 \text{ при } x < 0 \end{cases}$$

не имеет производной в точке $x = 0$.

150-157
166-161
184-193

V. ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ

Контрольные вопросы и упражнения

1. Сформулируйте правило Лопиталя раскрытия неопределенностей $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

2. Пусть не существует $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Следует ли отсюда, что не существует $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$?

Стандартные задачи и упражнения (А)

5.1. Найдите пределы:

1) $\lim\limits_{x \to -0,5} \dfrac{2x^2 - 7x - 4}{3 + 5x - 2x^2}$; 2) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{2x+1} - 3}$;

3) $\lim\limits_{x \to -8} \dfrac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}}$; 4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 3x}{1 - \cos 5x}$;

5) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1 - \sin x}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2}$; 6) $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$;

7) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^2}$;

8) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{e^x}$;

> Для достаточно больших x
>
> $\log_a x < x^\alpha < a^x$, если $a > 1, \alpha > 0$.

9) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2^x}{\ln x}$;   10) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x\cdot e^{-2x})$.

5.2. Найдите асимптоты линий:

1) $y = x\cdot e^{-x}$; 2) $y=(x^2+1)e^{-3x}$; 3) $y = x\cdot e^{-x^2}$;

4) $y = \dfrac{\ln x}{x}$; 5) $y = x + \dfrac{\ln x}{x}$; 6) $y = \dfrac{e^x}{x}$.

Нестандартные задачи и упражнения (Б)

5.3. Найдите пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}((1-\cos x)\cdot \operatorname{ctg} x)$;   2) $\lim\limits_{x\to+0}(x\cdot e^{\frac{1}{x}})$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{e^x-1} - \dfrac{1}{x}\right)$;   4) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$;

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{1/x}$;

6) $\lim\limits_{x\to+0} x^{\sin x}$;

$$\boxed{0^0, \infty^0, 1^\infty \to u^v = e^{v\ln u} \to 0\cdot\infty \to \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}}$$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x+x)^{1/x}$;   8) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+\sin x}{2x}$.

5.4. Найдите асимптоты линий:

1) $y = x^{\frac{1}{x}} + 2$;   2) $y = 2x + \operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}$.

УI. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ

Контрольные вопросы и упражнения

1. Дайте определение возрастающей (убывающей) функции на интервале (a, b).

2. Сформулируйте достаточное условие возрастания (убывания) функции $y=f(x)$.

3. Дайте определение точек локального экстремума функции $y=f(x)$.

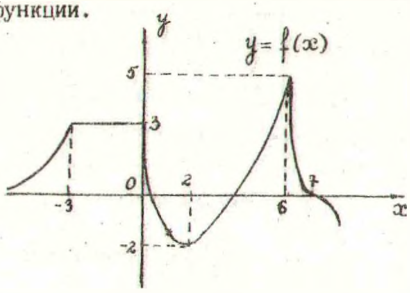
4. Сформулируйте необходимое условие существования экстремума функции. Покажите на примере, что это условие не является достаточным.

5. Сформулируйте достаточные условия (первое и второе) существования экстремума функции.

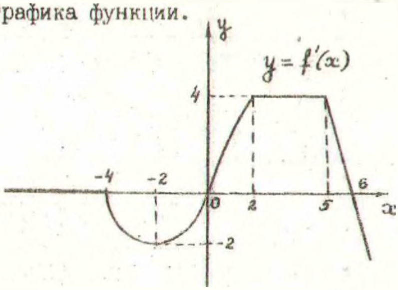
6. Дайте определения: выпуклости вверх (вниз) графика функции, точки перегиба.

7. Сформулируйте достаточное условие: выпуклости вверх (вниз) графика функции, перегиба графика функции.

8. Составьте план исследования и построения графика функции.



9. На рисунке изображен график функции $y=f(x)$. Укажите: 1) интервалы, на которых первая производная данной функции положительна (отрицательна); 2) точки, в которых первая производная равна нулю; 3) точки, в которых первая производная не существует, равна ∞; 4) точки экстремума функции; 5) интервалы, на которых вторая производная положительна (отрицательна); 6) точки перегиба графика функции.



10. На рисунке изображен график производной некоторой функции $y=f(x)$. Укажите: 1) промежутки, на которых функция $f(x)$ постоянна; 2) промежутки, на которых функция $f(x)$ – линейная; 3) интервалы возрастания (убывания) функции $f(x)$; 4) точки экстремума функции $f(x)$; 5) точки перегиба графика функции $f(x)$.

11. Может ли возрастающая функция иметь точки перегиба?

12. Приведите пример функции, имеющей бесконечно много экстремумов.

13. Какое наибольшее число точек экстремума и точек перегиба может иметь многочлен 10-й степени?

14. Что можно сказать о поведении функции в точке x_0, если: 1) $f'(x_0)=0$; 2) $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)>0$; 3) $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)<0$; 4) $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)=0$?

Стандартные задачи и упражнения (А)

6.1. Определите промежутки монотонности и точки экстремума функции:

f':	$+$;	$-$
f:	$\nearrow$;	$\searrow$

1) $f(x)=3x^4+16x^3+18x^2+1$;

2) $f(x)=x^3+x$;

3) $f(x)=\frac{x^4}{4}-x+2$; 4) $f(x)=x^5-5x-4$;

5) $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$;

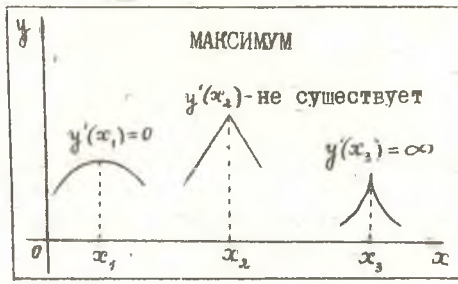
6) $f(x)=x^2e^{-x}$;

7) $f(x)=x\cdot\ln^2x+x+4$;

8) $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$;

9) $f(x)=\ln(x^2-1)$;

10) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{x}$.



6.2. Исследуйте направление выпуклости и найдите точки перегиба графика функции:

f'':	$+$;	$-$
f:	$\cup$;	$\cap$

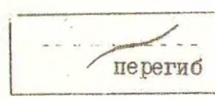
1) $f(x)=2x^3-6x^2-18x+7$;

2) $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$; 3) $f(x)=\frac{x^2+4}{x}$;

4) $f(x)=\ln(1+x^2)$;

5) $f(x)=exp(-(x-1)^2)$; 6) $f(x)=(x^2+1)\cdot e^{-x}$;

7) $f(x)=\ln(1-x^4)$; 8) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{x}$.



6.3. Исследуйте функцию и постройте её график:

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n \underset{n\to\infty}{\sim} a_0x^n, \quad a_0\neq 0$$

1) $f(x)=\frac{x^5}{5}-4x^2$;

$$\frac{1}{x^2+px+q}=\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)}\underset{x\to x_1}{\sim}\frac{1}{(x-x_1)(x_1-x_2)}, \quad p^2-4q>0$$

2) $f(x)=\frac{12}{x^2+x+1}$;

3) $f(x)=\frac{2}{x^2-5x+6}$;

4) $f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$; 5) $f(x)=\frac{x+1}{(x-3)^2}$;

$$\frac{1}{x^2+px+q}\underset{x\to\infty}{\sim}\frac{1}{x^2}$$

6) $f(x)=x+\frac{1}{x}$; 7) $f(x)=(x^2+1)\cdot e^{-3x}$;

8) $f(x)=x\cdot e^{-x^2}$; 9) $f(x)=\frac{x^2-7x+6}{x-10}$.

10) $f(x)=\ln(1+x^2)$; 11) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}+1$;

$$\boxed{\ln(x^2\pm 1)\underset{x\to\infty}{\sim}\ln x^2=2\ln|x|}$$

12) $f(x)=\ln(x^2-1)$; 13) $f(x)=e^{x(x-1)}$;

14) $f(x)=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$; 15) $f(x)=(x-3)\sqrt{x}$.

6.4. Выясните, существуют ли наибольшее и наименьшее значения функции $y=f(x)$ на указанном промежутке и, если существуют, найдите их:

1) $f(x)=2x^3-3x^2-12x+10$, $[0;3]$; 2) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-x}$, $[\frac{1}{2};2]$;

3) $f(x)=x^2\ln x$, $[1;e]$.

Нестандартные задачи и упражнения (Б)

6.5. При каких значениях a функция $f(x)=\dfrac{x^3}{3}+ax^2+x$ возрастает на $\mathbb{R}$?

6.6. При каком значении a функция $f(x)=a\ln x+x^2-3x$ имеет экстремум в точке $x=1$?

6.7. Сколько корней имеет уравнение $x^3-x^2+3x+5=0$?

6.8. При каких значениях a кривая $y=x^4+2ax^3+6x^2+1$ выпукла вниз на интервале $(-\infty;+\infty)$?

6.9. Найдите точки перегиба графика функции $f(x)=e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$.

6.10. Постройте график функции:

1) $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$; 2) $f(x)=\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x+1}$; 3) $f(x)=\sin x-\operatorname{tg} x$.

6.11. Постройте график какой-либо функции $y=f(x)$, заданной на интервале $(-\infty;+\infty)$, если известно, что:

1) точка М (1;1) является точкой перегиба и $f'(1)=0$;

2) точка М (1;1) является точкой перегиба и $f'(1)=1$.

6.12. Сколько корней имеет уравнение $\ln(1+x^2)=1-x^2$?

Задачи с прикладным содержанием

Решите задачи (6.13 – 6.16), предварительно построив математические модели.

6.13. Бревно длиной 20 м имеет форму усеченного конуса, диаметры оснований которого равны соответственно 2 м и 1 м. Требуется вырубить из бревна балку с квадратным поперечным сечением, ось которой совпадала бы с осью бревна и объем которой был бы наибольшим. Каковы должны быть размеры балки?

6.14. Требуется построить здание высотой h м и площадью S м^2 с наименьшей затратой материала на наружные стены. Определить длину и ширину стен.

6.15. Нужно огородить плитами цветник, прилегающий к стене. Имеется 400 плит длиной 0,5 м. Ограда делается в форме прямоугольника. Какими должны быть размеры цветника, чтобы его площадь была наибольшей?

6.16. Для ограждения клумбы, имеющей форму кругового сектора, имеется 20 м проволоки. Какой радиус круга следует взять, чтобы площадь была наибольшей?

6.17. Высота подъёма y тяжести x человеком выражается соотношением $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, где a, b - $const$. Найти, при какой тяжести x мускулы человека выполняют наибольшую работу.

6.18. Стоимость перевозки груза на расстояние 1 км по железнодорожному пути - K_1 руб., по шоссе - K_2 руб., $K_1 < K_2$. Завод построен в поселке С, не имеющем подъездных путей. Ближайшее расстояние от посёлка до железной дороги АМ равно a км. Груз прибывает на станцию А. Под каким углом к железной дороге и на каком расстоянии от проекции В точки С на АМ надо начать строительство шоссе, чтобы стоимость доставки груза на завод была наименьшей, если АВ = b?

VII. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Контрольные вопросы и упражнения

1. Сформулируйте определение функции двух (нескольких) переменных.

2. Дайте определения частных производных функции двух переменных и полного дифференциала.

3. Сформулируйте определение точки локального экстремума функции двух переменных.

4. Сформулируйте необходимое условие существования локального экстремума функции двух переменных.

5. Опишите достаточное условие существования локального экстремума функции двух переменных.

6. Дайте определения: скалярного поля, линии (поверхности) уровня, производной по направлению, градиента функции двух (трех) переменных.

Стандартные задачи и упражнения (А)

7.1. Найдите и изобразите графически область определения функции:

1) $z=x^2+y^2$; 2) $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$; 3) $z=\frac{1}{R^2-x^2-y^2}$;

4) $z=\ln(xy)$; 5) $f(x,y)=\frac{1}{y-3x}$; 6) $u=\sqrt{xy\sqrt{z}}$;

7) $u=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{z}}$; 8) $u=\frac{xy}{z}$.

7.2. Найдите частные производные первого порядка:

1) $z=x^3+3x^2y-y^3$; 2) $z=\frac{y}{x}$; 3) $z=\frac{xy}{x-y}$;

4) $z=\operatorname{arctg}\frac{x}{y^2}$; 5) $z=\ln(x_1^2+x_2^2)$; 6) $z=3x_1-2x_2+5$;

7) $u=\sqrt{x+y^2+z^3}$; 8) $u=z^{xy}$.

7.3. Докажите, что функция $z=x^y$ является решением уравнения

$$\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\ln x}\frac{\partial z}{\partial y}=2z.$$

7.4. Пусть $T=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Докажите, что

$$l\frac{\partial T}{\partial l}+g\frac{\partial T}{\partial g}=0.$$

7.5. Найдите полные дифференциалы функций:

1) $z=x^2y^3$; 2) $z=\sqrt{x^2+y^2}$; 3) $z=\arcsin\frac{y}{x}$; 4) $u=e^{xyz}$.

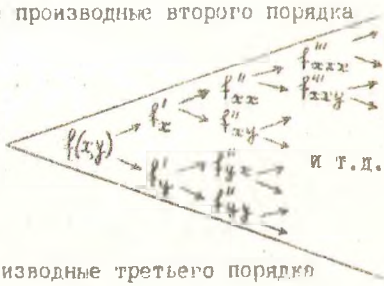
7.6. Найдите все частные производные второго порядка функций:

1) $z=x^3+x^2y+y^3$;

2) $z=x^2-xy+y^2+9x-6y+20$;

3) $z=y\sqrt{x}-y^2-x+6y$;

4) $z=\ln(x-2y)$.



и т.д.

7.7. Найдите частные производные третьего порядка функции $z=x^4+3x^2y^2-2y^4$.

7.8. Найдите локальные экстремумы функции двух переменных:

1) $z = (x+3)^2 + (y-2)^2$;

2) $z = 3x^2 + 4y^2 + 6x - 8y + 15$;

3) $z = xy(1 - x - y)$;

4) $z = 2x^2 - 4xy + 6y^2 - 3x + 16y + 9$;

5) $z = x^3 + 3xy^2 - 51x - 24y$;

6) $z = e^{-x^2 - y^2}(x^2 + 2y^2)$.

7.9. Найдите экстремум функции $z = x^2 + y^2$ при условии, что x и y связаны соотношением $x - 2y - 5 = 0$.

7.10. Найдите экстремум функции $z = 9 - 8x - 6y$ при условии, что x и y связаны соотношением $x^2 + y^2 = 25$.

7.11. Найдите экстремум функции $z = 8 - 2x - 4y$ при условии, что x и y связаны соотношением $x^2 + 2y^2 = 12$.

7.12. Найдите линии уровня функции и определите их вид:

1) $z = 2x + y$; 2) $z = \frac{x}{y}$; 3) $z = x^2 + y^2$;

4) $z = \frac{x}{y^2}$; 5) $z = \frac{1}{2x^2 + 3y^2}$; 6) $z = x^2 - y^2$.

7.13. Вычислите производную функции $z = x^2 - xy + y^2$ в точке M(1;1) в направлении вектора $\vec{a} = 6\vec{i} + 8\vec{j}$.

7.14. Вычислите производную функции $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ в точке M (1;2;1) в направлении вектора $\vec{a} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$.

7.15. Вычислите производную функции $z = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 1$ в точке M (3; 1) в направлении вектора $\overline{MN}$, где $N(6;5)$.

7.16. Вычислите производную функции $z = \operatorname{arctg}(xy)$ в точке (1;1) в направлении биссектрисы первого координатного угла.

7.17. Найдите градиент функции $z = x^2 + y^2$ в точке A (3; 2).

7.18. Найдите и постройте градиенты функций:

1) $z = -3x_1 + 2x_2$; 2) $z = x_1 - x_2$ в точке (0;0).

7.19. Найдите точки, в которых градиент функции $z = \ln(x + \frac{1}{y})$ равен $\vec{i} - \frac{16}{9}\vec{j}$.

Нестандартные задачи и упражнения (Б)

7.20. $x^2 + y^2 + z^2 - 2zx = a^2$. Найдите $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, dz.

7.21. Пусть $2\sin(x + 2y - 3z) = x + 2y - 3z$. Покажите, что $z'_x + z'_y = 1$.

7.22. Покажите, что уравнению

$$m\frac{\partial z}{\partial x} + n\frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

удовлетворяет неявная функция z, определяемая уравнением (цилиндрических поверхностей): $x - mz = \varphi(y - nz)$.

7.23. Пусть $S = \sqrt[3]{ax + bt}$. Докажите, что

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x} + t\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 S = -\frac{2S}{9}.$$

7.24. Найдите: 1) $d^2 z$, если $z = \sin x \cos y$; 2) $d^3 z$, если $z = x^2 y$.

7.25. Исследуйте на экстремум функцию

$$f(x, y) = (y - x)^2 + (y + 2)^3.$$

7.26. Исследуйте функцию $z = z(x, y)$ на экстремум, если

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 8z + 9 = 0.$$

7.27. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $z = 1 + 2x_1 + 3x_2$ в области $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6; \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0; \end{cases}$

2) $z = x^2 + 3y^2 - x + 18y - 4$ в области $0 \le x \le y \le 4$.

7.28. Найдите поверхности уровня функции и определите их вид:

1) $z = x_1 + x_2 + x_3$; 2) $u = x^2 + y^2 + z^2$; 3) $u = \frac{x^2 + y^2}{z}$.

7.29. Докажите, что функция $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ удовлетворяет соотношению $u = 2\ln 2 - \ln(\operatorname{grad} u)^2$.

7.30. Найдите точки, в которых модуль градиента функции $z = (x^2 + y^2)^{3/2}$ равен 2.

7.31. Докажите, что производная функции $z = f(x, y)$ в направлении ее градиента равна модулю градиента.

Задачи с прикладным содержанием

7.32. При деформации конуса радиус его основания увеличился с 30 до 30,1 см, а его высота уменьшилась с 60 до 59,5 см. Найдите приближенно изменение объема по формуле $\Delta v \approx dv$.

7.33. Годовые расходы предприятия могут быть выражены функцией $f(x, y) = a + b_1 x + b_2 y + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{y}$, где a, b_1, b_2, c_1, c_2 — постоянные. При каких значениях x, y расходы предприятия будут наименьшими?

7.34. К двум пунктам P_1 и P_2, находящимся соответственно на расстояниях a_1, b_1 и a_2, b_2 от двух пересекающихся под прямым углом магистралей, необходимо провести газопровод. На магистралях надо построить два посёлка Q_1 и Q_2 так, чтобы стоимость газопровода, соединяющего пункты P_1 с Q_1, Q_1 с Q_2, Q_2 с P_2, была наименьшей.

7.35. Лесопитомник общей площадью 10 га обслуживают 15 рабочих. Разработаны две технологии производства: по первой технологии работает один человек и производит 200 тыс. сеянцев на 1 га ежегодно, по второй технологии работают два человека и производят 300 тыс. сеянцев на 1 га ежегодно. Требуется определить, сколько гектаров нужно обрабатывать по первой технологии и сколько - по второй, чтобы годичное производство сеянцев было максимальным.

7.36. Рельеф местности в пределах некоторого географического района может быть описан приближенно функцией $z = x^2 + y^2 + 6x + 6y - 18$. Постройте линию уровня, проходящую через точку А (1; 2). Найдите: а) $\operatorname{grad} z$ в точке А; б) скорость изменения рельефа данной местности в точке А в направлении, определяемом вектором $\vec{a} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$.

VIII. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Контрольные вопросы и упражнения

1. Дайте определение первообразной для функции $f(x)$ на промежутке (a, b).

2. Приведите примеры двух различных первообразных для функции $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

3. Найдите первообразную для функции $f(x) = \cos x$, которая в точке $x = \frac{\pi}{2}$ принимает значение, равное 10.

4. Сформулируйте определение неопределенного интеграла.

5. Для каких значений x справедливы формулы:

1) $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$; 2) $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$;

3) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$; 4) $\int 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3} + C$?

6. Перечислите основные свойства неопределенного интеграла.

7. Найдите: 1) $\int 0 \cdot dx$; 2) $\int dx$; 3) $\left(\int dx\right)'$; 4) $\int (u'(x) + v'(x))dx$; 5) $\int (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))dx$; 6) $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$; 7) $\int f(x) f'(x) dx$.

8. Восстановите в памяти таблицу основных неопределенных интегралов.

9. Напишите формулу интегрирования по частям в неопределенном интеграле. При каких условиях эта формула справедлива?

10. Опишите метод замены переменной в неопределенном интеграле.

11. Запишите простейшие рациональные дроби в общем виде.

12. Дайте комментарий следующему алгоритму:

Неправильная рациональная дробь
↓
Многочлен + правильная рациональная дробь
↓
Многочлен + сумма простейших рациональных дробей

13. На простейшие рациональные дроби какого типа раскладывается дробь: 1) $\dfrac{x+1}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$; 2) $\dfrac{x+2}{(x^2-1)(x^2+2)}$;
3) $\dfrac{2x+3}{(x^2-4)^2(x^2-2x)}$?

Стандартные задачи и упражнения (А)

8.1. Найдите неопределенный интеграл:

1) $\int\left(3\cos x - 2x^2 + 5 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2+1}\right)dx$;

2) $\int\frac{6x^4 - 8x^3 - 4x^2 + 3x - \frac{2}{x}}{x^2}dx$;

3) $\int\frac{\sqrt{x} + x^3e^x - x^2}{x^3}dx$; 4) $\int\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x\sqrt{x}}dx$;

5) $\int\frac{7 + 4\sin^3 x}{\sin^2 x}dx$; 6) $\int tg^2 x\,dx$; 7) $\int 2^x \cdot e^x dx$;

8) $\int\frac{3\cdot 2^x - 2\cdot 3^x}{2^x}dx$; 9) $\int\frac{2-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx$; 10) $\int\frac{x^2}{x^2+1}dx$;

11) $\int\frac{x^2}{x^2-1}dx$; $\boxed{\frac{x^2}{x^2+1} = \frac{(x^2+1)-1}{x^2+1}}$

12) $\int u^3 du$; 13) $\int tg^3 x\, d(tg\, x)$; 14) $\int \cos^3 x\, d(\cos x)$

8.2. Найдите неопределенный интеграл, применяя прием подведения функции под знак дифференциала (выделяя дифференциал новой переменной):

$$\boxed{f'(x)\,dx = d(f(x))}$$

$dx = d(x+c)$

$dx = \frac{1}{a}\,d(ax)$

a, c - const

$x\,dx = \frac{1}{2}\,dx^2 = \frac{1}{2}\,d(x^2+5) = \ldots$

$\cos x\,dx = d(\sin x) = \frac{1}{3}\,d(3\sin x) = \ldots$

$\frac{1}{\sin^2 x}\,dx = d(-\operatorname{ctg} x) = -\frac{1}{4}\,d(4\operatorname{ctg} x + 3) = \ldots$

1) $\int (x+1)^{15}\,dx$; 2) $\int \frac{dx}{(2x+3)^5}$;

3) $\int \sqrt{8-2x}\,dx$; 4) $\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx$;

5) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+5}}$; 6) $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt[4]{3x^3+4}}$;

7) $\int \sin^5 x \cdot \cos x\,dx$; 8) $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt[3]{\cos x}}$

9) $\int \frac{\sqrt[3]{\ln x}}{x}\,dx$;

10) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\,(\arcsin x)^3}$; 11) $\int \frac{\operatorname{arctg}^4 x}{1+x^2}\,dx$; 12) $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}$;

13) $\int \cos 3x\,dx$; 14) $\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{3}}$; 15) $\int \frac{dx}{\cos^2(1-x)}$;

16) $\int \sin(2x+5)\,dx$; 17) $\int \left(\cos\frac{\pi}{12} - \cos 2x\right)dx$;

18) $\int \cos\left(\frac{\pi}{12} - 2x\right)dx$; 19) $\int \frac{x\,dx}{\cos^2(7x^2)}$;

20) $\int e^x \sin(e^x)\,dx$; 21) $\int \sqrt{3-2\sin x}\,\cos x\,dx$;

22) $\int \frac{dx}{2x-3}$; 23) $\int \frac{e^x\,dx}{1-5e^x}$; 24) $\int \operatorname{tg} x\,dx$;

25) $\int \operatorname{ctg} 3x\,dx$; 26) $\int \frac{dx}{x\ln x}$; 27) $\int \frac{dx}{x(\ln x+2)}$;

28) $\int e^{\sin x}\cos x\,dx$; 29) $\int e^{-3x+6}\,dx$; 30) $\int \frac{\sin x\,dx}{e^{\cos x}}$;

31) $\int e^{-x^2} x\,dx$; 32) $\int e^{2x^3} x^2\,dx$; 33) $\int 6^{5x+1}\,dx$;

34) $\int 3^{x^4} x^3\,dx$; 35) $\int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$; 36) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}}$;

37) $\int \frac{dx}{4+9x^2}$; 38) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5}}$; 39) $\int \frac{dx}{3x^2-2}$;

40) $\int \frac{x^2\,dx}{x^6+9}$; 41) $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{4-x^8}}$; 42) $\int \frac{e^x\,dx}{e^{2x}+1}$;

43) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+1}}$; 44) $\int \frac{\cos x\,dx}{3+\sin^2 x}$; 45) $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x-9}}$;

46) $\int \frac{5x-2}{x^2+1}\,dx$; 47) $\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$; 48) $\int \frac{x}{x+1}\,dx$;

49) $\int \frac{x\,dx}{2x-1}$; 50) $\int \frac{e^{3x}\,dx}{e^{3x}+2}$; 51) $\int \sin^2 x\,dx$;

52) $\int \cos^2 3x\,dx$; $\boxed{\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)}$ $\boxed{\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)}$

53) $\int \cos 3x \cdot \cos 7x\,dx$;

54) $\int \sin 5x \cdot \cos 6x\,dx$

$$\boxed{\begin{aligned} &\cos\alpha\cdot\cos\beta = \tfrac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right)\\ &\sin\alpha\cdot\sin\beta = \tfrac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)\\ &\sin\alpha\cdot\cos\beta = \tfrac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right)\end{aligned}}$$

8.3. Методом интегрирования по частям найдите интегралы:

1) $\int (5x-3)\sin 2x\,dx$; 2) $\int (x+1)\ln x\,dx$; 3) $\int x\,e^{-3x}dx$;

4) $\int x\cdot 3^x dx$; 5) $\int x^2\cos 3x\,dx$; 6) $\int \operatorname{arctg} 2x\,dx$;

7) $\int x\cdot\operatorname{arcctg} x\,dx$; 8) $\int \arcsin\frac{x}{3}\,dx$; 9) $\int \ln^2 x\,dx$;

10) $\int x^2 e^{\frac{x}{2}}dx$; 11) $\int \frac{\ln x\,dx}{\sqrt{x}}$; 12) $\int (x^2-2x-3)\sin(x+1)\,dx$;

13) $\int x\ln 6x\,dx$; 14) $\int \ln(1+x^2)\,dx$.

8.4. Найдите интегралы, применяя метод замены переменной:

1) $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x+3}}$ (советуем: $\sqrt{x+3}=t$);

2) $\int \frac{dx}{(2+x)\sqrt{x}}$; 3) $\int \frac{(x-6)\,dx}{\sqrt{1-3x}}$;

4) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+1}$ $(x=z^3)$; $\boxed{\text{Вспомните, как разделить многочлен на многочлен.}}$

5) $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\,dx$; 6) $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[3]{x}+1}$ $(x=t^6,\ t\geqslant 0)$;

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$ $(x=t^6,\ t>0)$; 8) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$ $(\sqrt{e^x+1}=t)$;

9) $\int \frac{2x\,dx}{(5-2x)^3}$

$\int u(x)\,d(v(x)) = u(x)\,v$

$x^2 + px + q \qquad x + p/2 = t$

8.5. Найдите интегралы, содержащие квадратный трехчлен:

$$\boxed{x^2+px+q = x^2+2\cdot x\cdot\frac{p}{2}+\left(\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}}$$

1) $\int\frac{dx}{x^2+2x+3}$; 2) $\int\frac{5\,dx}{2x^2+6x+1}$; 3) $\int\frac{x-2}{x^2-7x+12}dx$;

4) $\int\frac{(3-4x)\,dx}{2x^2-3x+2}$; 5) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$; 6) $\int\frac{dx}{\sqrt{12x-9x^2-2}}$;

7) $\int\frac{3x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$; 8) $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$.

(8.6. Найдите интегралы от рациональных функций:

1) $\int\frac{x^2+3x+5}{x+2}dx$; 2) $\int\frac{x\,dx}{(x+2)(2x+1)}$; 3) $\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$;

4) $\int\frac{(3+x)^3}{x^2-x}dx$; 5) $\int\frac{x^2+1}{x^3-5x^2+6x}dx$; 6) $\int\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2\frac{dx}{x}$;

7) $\int\frac{x^3+2}{x^3-x^2}dx$; 8) $\int\frac{(3x+1)\,dx}{(x^2+6x+9)(x-5)}$; 9) $\int\frac{dx}{x(x^2+4)}$;

10) $\int\frac{(7x-15)\,dx}{x^3-2x^2+5x}$; 11) $\int\frac{x^2\,dx}{1-x^4}$.

8.7. Найдите интегралы от тригонометрических выражений:

1) $\int\sin^5 x\,dx$; 2) $\int\cos^3 4x\,dx$;

3) $\int\sin^3 x\cdot\cos^2 x\,dx$; 4) $\int\frac{\cos^3 x}{\sin^6 x}dx$;

5) $\int\cos^2\frac{3}{2}x\,dx$; 6) $\int\sin^4 x\,dx$;

7) $\int\sin^2 2x\cdot\cos^2 2x\,dx$; 8) $\int\operatorname{ctg}^3 x\,dx$;

9) $\int\sin 3x\,\sin\frac{x}{2}\,dx$; 10) $\int\sin 6x\cdot\cos\frac{1}{2}x\,dx$.

8.8. Найдите интегралы (устно):

1) $\int\frac{x\,dx}{\ln 2}$; 2) $\int\frac{dx}{1-3x}$; 3) $\int(x-1)^2dx$;

4) $\int\sin\frac{x}{2}dx$; 5) $\int\frac{dx}{6}$; 6) $\int\frac{1-\ln 3}{x}dx$;

7) $\int\frac{\ln x\,dx}{x}$; 8) $\int e^{-2x}dx$; 9) $\int\left(\sin\frac{\pi}{3}-\cos 3x\right)dx$;

10) $\int\sin(3-5x)dx$; 11) $\int\frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$; 12) $\int x\cdot\cos x^2dx$;

13) $\int\left(2x-\frac{3}{x}+x^{\sqrt{2}}+(\sqrt{2})^x\right)dx$; 14) $\int\frac{\cos x\,dx}{\sqrt{\sin x}}$.

15) $\int(\sqrt[4]{3}+e^{-x})dx$; 16) $\int x\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2}\,dx$; 17) $\int x\cdot\sin 2\,dx$.

8.9. Найдите интегралы, используя справочник "Таблицы интегралов и другие математические формулы" Г.Д.Двайта:

1) $\int\frac{3}{\sin x+\cos x}dx$; 2) $\int\frac{dx}{\cos x+\sqrt{3}\sin x}$;

3) $\int\frac{dx}{8+x^5}$, 4) $\int\frac{dx}{(x^2+4)^3}$;

5) $\int e^{3x}\sin 2x\,dx$; 6) $\int(1+2x)\sqrt{x^2+5}\,dx$;

7) $\int(x-1)\arcsin 2x\,dx$; 8) $\int x^4\cos 2x\,dx$;

9) $\int\cos^6\frac{x}{2}\,dx$, 10) $\int\frac{\sqrt{9x^2+1}\,dx}{2x}$;

11) $\int\ln^4 x\,dx$; 12) $\int\frac{dx}{\sqrt{12x-9x^2-2}}$.

Нестандартные задачи и упражнения (Б)

8.10. Найдите интегралы, выделяя дифференциал новой функции, результат проверьте дифференцированием:

1) $\int\frac{dx}{x\ln 2x\ln\ln 2x}$; 2) $\int\frac{\cos x}{\cos^2\frac{x}{2}}dx$;

3) $\int(\sqrt{\cos x}+\sin x)^2dx$; 4) $\int(1-\mathrm{tg}\,3x)^2dx$;

5) $\int\frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2+2x}}$; 6) $\int\frac{\cos^3\frac{1}{x}}{x^2}dx$;

7) $\int\frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}dx$; 8) $\int\frac{dx}{\sin^2 x+2\cos^2 x}$;

9) $\int\frac{x+(\arccos 3x)^2}{\sqrt{1-9x^2}}dx$, 10) $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$;

11) $\int\frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$, 12) $\int\frac{1+x-x^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}}dx$;

13) $\int\frac{dx}{e^x(3+e^{-x})}$, 14) $\int\frac{dx}{4e^x+1}$;

15) $\int\frac{\sqrt{x}\,dx}{1+x^{3/2}}$, 16) $\int\frac{(\sin\sqrt{x})^2dx}{\sqrt{x}}$,

17) $\int\frac{\ln x\,dx}{x(\ln^2x-1)}$, 18) $\int\frac{dx}{(2+x)\sqrt{x}}$;

19) $\int\frac{\mathrm{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx$, 20) $\int e^{e^x+x}dx$

$\frac{3}{2}\cdot 2$ $-\frac{9}{4}+\frac{2}{4}=-\frac{7}{4}$ $\frac{3}{1}:2=\frac{3}{1}\cdot\frac{1}{2}$

$\frac{3}{2}$ $\frac{1}{2}$ $-\frac{9}{16}+\frac{16}{16}$

8.11. Найдите интегралы:

1) $\int \frac{x \arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; 2) $\int \frac{\arcsin \frac{x}{2}}{\sqrt{2-x}}dx$;

3) $\int \frac{x}{\cos^2 x}dx$; 4) $\int x^3 \sin(x^2)dx$;

5) $\int \frac{x \sin x}{\cos^3 x}dx$; 6) $\int \cos(\ln x)dx$;

7) $\int e^{x} \sin x\,dx$; 8) $\int x^2 \operatorname{arctg} x\,dx$;

9) $\int \frac{\ln \ln x}{x}dx$; 10) $\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx$ (можно интегрировать по частям, полагая $dv = dx$);

11) $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}dx$ (можно так: $x = a\sin t$);

12) $\int \frac{dx}{(\sqrt{a^2+x^2})^3}$ (хороша подстановка: $x = a\,\operatorname{tg} t$);

13) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}$ $\left(x = \frac{a}{\cos t}\right)$;

14) $\int \cos\sqrt{x}\,dx$; 15) $\int e^{\sqrt[3]{x}}dx$;

16) $\int \frac{\arccos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$; 17) $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\frac{dx}{1-x}$;

18) $\int \frac{dx}{e^x-1}$ $(e^x = t)$; 19) $\int \frac{dx}{\sin x}$ $\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t\right)$;

20) $\int \operatorname{tg}^4 x\,dx$; 21) $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$; 22) $\int \frac{dx}{1+3\sin^2 x}$;

23) $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}$; 24) $\int \frac{dx}{9+4\cos x}$; 25) $\int \frac{\sin^3 x\,dx}{4+\cos x}$.

8.12. Найдите следующие интегралы, не применяя стандартных приемов интегрирования (придумайте что-нибудь оригинальнее):

1) $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$; 2) $\int \frac{dx}{x^2(x^2+1)}$; 3) $\int \frac{x\,dx}{1-x^4}$;

4) $\int \frac{x^4+1}{x^6+1}dx$ (можно, например, так: $x^4+1 = x^4-x^2+1+x^2$);

5) $\int \frac{x\,dx}{(x-1)^{12}}$; 6) $\int \frac{x^2dx}{(x-1)^{10}}$; 7) $\int \frac{x\,dx}{x^4+6x^2+5}$;

8) $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)}$; 9) $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$; 10) $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx$.

8.13. Предложите не менее двух способов вычисления интегралов:

1) $\int x(5x-7)^{50}\,dx$; 2) $\int x\sqrt[3]{a+x}\,dx$;

3) $\int \frac{dx}{\cos x}$; 4) $\int \frac{x\,dx}{(x-2)^3}$; 5) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x}\,dx$;

6) $\int \frac{dx}{1+e^x}$; 7) $\int \frac{1-\mathrm{tg}\,x}{1+\mathrm{tg}\,x}\,dx$; 8) $\int \frac{\sin x}{1+\sin x}\,dx$.

IX. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ МАТЕРИАЛ

Основные вопросы, упражнения и задачи

1. Определители

1) Дайте определения определителей второго и третьего порядков.

2) Дайте определения минора и алгебраического дополнения элемента определителя.

3) Сформулируйте свойства определителей.

9.1. Вычислите определители:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$;

5) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$; 7) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 20 \\ 3 & 5 & 0 \\ -2 & -3 & 10 \end{vmatrix}$; 8) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$;

9) $\begin{vmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix}$; 10) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \\ 7 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$; 11) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$; 12) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

2. Метод Крамера решения систем линейных уравнений

9.2. Решите по формулам Крамера систему линейных уравнений:

1) $\left.\begin{aligned} 7x-2y&=8 \\ 5x+3y&=19 \end{aligned}\right\}$; 2) $\left.\begin{aligned} 2x_1+3x_2+1&=0 \\ 3x_1+4x_2+1&=0 \end{aligned}\right\}$; 3) $\left.\begin{aligned} 2x+3y-z&=4 \\ x+y+3z&=5 \\ 3x-4y+z&=0 \end{aligned}\right\}$;

4) $\left.\begin{aligned} x_1+3x_2-x_3&=-1 \\ 2x_1+4x_2+3x_3&=3 \\ 3x_1-2x_2+5x_3&=13 \end{aligned}\right\}$; 5) $\left.\begin{aligned} 3z+2x-3y+10&=0 \\ 3y+x-3z&=13 \\ x+z&=0 \end{aligned}\right\}$.

3. Матрицы

I) Дайте определение матрицы.

2) Сформулируйте определения: транспонированной матрицы, единичной матрицы, невырожденной матрицы.

3) Дайте определение обратной матрицы.

9.3. Определите размерность матрицы:

I) $\begin{pmatrix} I & 5 & 0 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} I \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 7 & 8 & 5 \end{pmatrix}$.

9.4. Даны матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} I & 2 \\ 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ I & 3 \\ I & I \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -I \\ I & I \end{pmatrix}.$$

Найдите $2A - 3B + C$.

9.5. Существует ли сумма $A + B$, если

$$A = \begin{pmatrix} I \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} I & 2 & 3 \end{pmatrix}?$$

9.6. Даны матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & I \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -I & 4 \\ 0 & I \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Выясните, существуют ли произведения AB и BA и, если существуют, найдите их.

v 9.7. Найдите произведения матриц:

I) $\begin{pmatrix} 2 & -I \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} I \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 2 & 3 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} I & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} I & -I & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I & -I \\ 0 & 3 \\ I & 2 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 2 & -I \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

9.8. Найдите матрицу, транспонированную матрице A, если

$$A = \begin{pmatrix} I & 2 & 5 \\ -I & 3 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

9.9. Найдите матрицу, обратную данной, если она существует:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -3 & 5 & 6 \\ -2 & 2 & 10 \end{pmatrix}$.

9.10. Определите ранг матрицы:

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -3 & 5 & 6 \\ -2 & 2 & 10 \end{pmatrix}$; 7) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

9.11. Решите систему методом Гаусса:

1) $\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 4 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$; 2) $\left.\begin{aligned} 2x - 3y + 5z &= 11 \\ 3x + y - 5z &= -10 \\ x + 2y - 4z &= -7 \end{aligned}\right\}$;

3) $\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 5 \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 &= 7 \\ 5x_1 - 3x_2 + 3x_3 &= 7 \end{aligned}\right|$; 4) $\left.\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 0 \end{aligned}\right|$

5. Комплексные числа

9.12. Даны комплексные числа в алгебраической форме: $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = -1 + i$. Вычислите $z_1 + 2z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\bar z_1 + \bar z_2$, $\overline{z_1 + z_2}$ и постройте их на комплексной плоскости. (Напоминаем, что число $\bar z = x - iy$ называется сопряженным числу $z = x + iy$).

9.13. Даны: $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$ и $z_2 = 2 + 2\sqrt{3}i$. Вычислите: 1) $\frac{z_1}{z_2}$; 2) z_1^3; 3) $\bar z_1 + \frac{1}{z_2}$; 4) $\frac{1}{\overline{z_1 + z_2}}$; 5) $z_2 \cdot \bar z_2$; 6) $\frac{1}{i}(z_1 - \bar z_1)$.

9.14. Вычислите: 1) $\frac{1-i}{1+i}$; 2) $\frac{1}{i} \cdot \frac{1+i}{1-i}$; 3) $\frac{2+3i}{(1+i)^2}$; 4) $i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5$.

9.15. При каких действительных x и y верно равенство

$$(2 - i)x + (1 + i)y = 5 - i \text{ ?}$$

9.16. Решите уравнение $(2 - 5i)z = 2 + 5i$.

9.17. Решите уравнения:

1) $x^2 + 16 = 0$; 2) $x^2 - 2x + 5 = 0$; 3) $x^2 - 4x + 8 = 0$;
4) $3x^2 + 4x + 3 = 0$

9.18. Решите систему уравнений: $\left.\begin{matrix} x+y=6 \\ xy=45 \end{matrix}\right\}$.

9.19. Представьте комплексное число в тригонометрической и показательной формах:
1) -5 ; 2) $3i$; 3) $\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $1-i\sqrt{3}$; 5) $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$; 6) $-2+2i$.

9.20. Представьте в тригонометрической и алгебраической формах числа:
1) e^{i} ; 2) $2e^{\frac{\pi}{2}i}$; 3) e^{2-i} ; 4) $3e^{2\pi i}$; 5) $2e^{1+\pi i}$.

9.21. Вычислите:
1) $3i(1-i\sqrt{3})$; 2) $\frac{2+2\sqrt{3}i}{1-i\sqrt{3}}$; 3) $(\sqrt{3}-i)^{6}$; 4) $\sqrt[3]{i}$;
5) $\sqrt[3]{1}$; 6) $\sqrt[4]{-1}$; 7) $\sqrt[4]{2\sqrt{3}-2i}$.

9.22. Решите уравнения:
1) $z^{3}-1$; 2) $z^{4}+1=0$; 3) $z^{4}+z^{2}+1=0$.

9.23. Постройте на комплексной плоскости область, определяемую следующими неравенствами:
1) $\left.\begin{matrix} \operatorname{Im} z \geq -\frac{1}{2} \\ |z| \leq 2 \end{matrix}\right\}$; 2) $|z-3| \leq 1$; 3) $\left.\begin{matrix} |z-2| \geq 2 \\ |z-2| \leq 3 \end{matrix}\right\}$; 4) $\left.\begin{matrix} \operatorname{Re} z \leq 2 \\ 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4} \end{matrix}\right\}$

ОТВЕТЫ

1.1. 3. 1.2. 0. 1.3. $-\frac{1}{3}$. 1.4. 0. 1.5. 3. 1.6. ∞.
1.7. 2. 1.8. $+\infty$. 1.9. 0. 1.10. $+\infty$. (Совет: вынести за скобку x^2). 1.11. ∞. 1.12. $+\infty$. 1.13. 0. 1.14. 0.
1.15. $+\infty$. 1.16. $\begin{cases} +\infty, & \text{если } x \to 2+0; \\ 0, & \text{если } x \to 2-0. \end{cases}$ 1.17. $+\infty$.
1.18. 0. 1.19. 1. 1.20. 1. 1.21. -3. 1.22. $\frac{1}{9}$. 1.23. -9.
1.24. $\frac{1}{3}$. 1.25. 2,5. 1.26. $\frac{5}{8}$. 1.27. $\frac{1}{6}$. 1.28. 0,75.
1.29. $\frac{1}{2}$. 1.30. 0. 1.31. ∞. 1.35. $\frac{2}{5}$. 1.36. $\frac{5}{3}$. 1.37. 0.
1.38. $\frac{2}{3}$. 1.39. $\frac{7}{3}$. 1.40. $\frac{2}{7}$. 1.41. 0. 1.42. ∞.
1.43. $-0,25$. 1.44. $\frac{1}{3}$. 1.45. 12. 1.46. 0. 1.47. e^{12}.
1.48. e^{-20}. 1.49. 1. 1.50. e^{3}. 1.51. e^{-2}. 1.52. 0.
1.53. 0. 1.54. $\begin{cases} 0, & \text{если } x \to \frac{\pi}{4}+0; \\ +\infty, & \text{если } x \to \frac{\pi}{4}-0. \end{cases}$ 1.55. $\begin{cases} 2, & \text{если } x \to \frac{\pi}{2}+0; \\ 0, & \text{если } x \to \frac{\pi}{2}-0 \end{cases}$

I.56. $\begin{cases} \text{I при } a > \text{I}; \\ \frac{\text{I}}{2} \text{ при } a = \text{I}; \\ 0 \text{ при } 0 < a < \text{I}. \end{cases}$ I.57. - 2. I.58. I.

I.59. $\begin{cases} 2, \text{ если } x \to +\infty; \\ -2, \text{ если } x \to -\infty. \end{cases}$ I.60. I) $4-2p+q \neq 0$; 2) $p=q=4$; 3) $p=1$; $q=-2$.

I.61. $\begin{cases} -\frac{\pi}{2}, \text{ если } x \to 2-0; \\ \frac{\pi}{2}, \text{ если } x \to 2+0. \end{cases}$ I.62. - I. I.63. 0.

I.64. $\begin{cases} 0{,}5, \text{ если } x \to +\infty; \\ -\infty, \text{ если } x \to -\infty. \end{cases}$ I.65. I) $a \neq 0$; $b \in \mathbb{R}$;
2) $a = b = 0$;
3) $a = 0$; $b = -6$.

I.66. I) b = I; 2) $b \neq 2n+1, n \in \mathbb{Z}$; 3) b = 7. I.67. 9.

I.68. e^3. I.69. e^{12}. I.70. $e^{-0{,}25}$. I.71. $\begin{cases} e^{-\frac{c}{a}}, \text{ если } a = b,\ c \neq 0; \\ +\infty, \text{ если } (a-b)\cdot c > 0; \\ 0, \text{ если } (a-b)\cdot c < 0; \\ 1, \text{ если } c = 0. \end{cases}$

I.72. Да. I.73. $\approx$ 4. I.74. I) $\begin{cases} N \to +\infty, \text{ если } r > 0; \\ N = N_0, \text{ если } r = 0; \\ N \to 0, \text{ если } r < 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} N \to K, \text{ если } r > 0; \\ N = N_0, \text{ если } r = 0; \\ N \to -\infty, \text{ если } r < 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} N \to K, \text{ если } r > 0; \\ N = N_0, \text{ если } r = 0; \\ N \to 0, \text{ если } r < 0. \end{cases}$

2.2. I) Непрерывна на $\mathbb{R}$;
2) x = I - точка разрыва II рода;
3) x = 3 - точка разрыва II рода;
4) непрерывна на $\mathbb{R}$;
5) x = 2 - точка разрыва II рода;
6) непрерывна на $\mathbb{R}$;
7) x = 2, x = 3 - точки разрыва II рода;
8) x = - I, x = I - точки разрыва II рода;
9) x = 0 - точка разрыва I рода;
I0) x = 0 - точка разрыва II рода;
II) непрерывна на $\mathbb{R}$;
I2) x = 2 - точка разрыва I рода.

2.3. I) x = I - точка разрыва II рода;
2) x = I - точка разрыва II рода;
3) x = 0 - точка устранимого разрыва; $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ - точки разрыва II рода;
4) x = 0 - точка разрыва II рода;

5) $x = -I$ - точка устранимого разрыва;
6) $x = 0$ - точка устранимого разрыва;
7) $x = 0$ - точка разрыва I рода;
8) $x = 0$ - точка разрыва I рода;
$x = I$ - точка разрыва II рода;
9) $x = 0$ - точка устранимого разрыва;
$x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$ - точки разрыва II рода;

10) $x = 0$ - точка устранимого разрыва.

2.4. $\frac{I}{2}$. 2.5. I. 2.7. Нет.

3.I. I) $x = I$; $y = x + 1$;
2) $x = 3$; $y = 0$;
3) $y = x$;
4) $x = -I$; $x = I$, $y = 0$;
5) $y = 0$;
6) $x = 2$; $x = 3$, $y = 0$;
7) $y = 0$;
8) $x = 2$; $y = I$.

3.2. I) $y = 0$;
3) $x = I$; $y = 0$;
4) $x = I$; $y = 0$; $y = -x - 2$;
5) $y = 0$;
6) $x = 0$; $y = 0$;
7) $y = \frac{I}{3}$;
8) $x = I$; $y = \frac{I}{2}$.

3.3. $x = -I$; $y = I$.

3.4. 1) $x = -\frac{b}{a}$, $y = \frac{1}{a}$, если $a \neq 0$, $b \neq 0$;
2) $y = \frac{1}{a}$, если $a \neq 0$, $D < 0$;
$x = x_1$, $x = x_2$, $y = \frac{1}{a}$, если $a \neq 0$, $c \neq 0$, $D \geq 0$;
$x = -\frac{b}{a}$, $y = \frac{1}{a}$, если $a \neq 0$, $c = 0$, $D > 0$;
$x = -\frac{c}{b}$, $y = \frac{1}{b}x - \frac{c}{b^2}$, если $a = 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$;
где $D = b^2 - 4ac$, x_1, x_2 - корни многочлена $ax^2 + bx + c$.

4.I. I) $2x + 2$; 2) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$; 3) $-(x+1)^{-2}$.

4.2. $y = 4x - 1$. 4.3. $\left(\frac{I}{4}; \frac{I}{2}\right)$. 4.4. $y = x^2 + 2x$. 4.5. $t = 3$.

4.6. I) $(x^2 - 6x + 13) \cdot (x - 3)^{-2}$;
2) $6 \cos 2x + x^2(5x^2 + 6)(5x^2 + 2)^{-2}$;

3) $(2x-4)(4x-x^2)\cdot e^{-x^2+4x}$;

4) $\sqrt{x}\left(\frac{3}{2}\cos(3-5x^4)+20x^4\sin(3-5x^4)\right)$;

5) $\dfrac{(x^2-4)\ln(x^2-4)-2x\sin x}{2(x^2-4)\cos^2\frac{x}{2}\cdot\ln^2(x^2-4)}$;

6) $-3\sin^2(1-x)\cdot\cos(1-x)$;

7) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{\arcsin^2 3t}\cdot\sqrt{1-9t^2}}$;

8) $\dfrac{\cos(1/(2\varphi))}{3\varphi^2\cdot\sin^3(1/(2\varphi))}$;

9) $\dfrac{3}{4(v^2+9)\sqrt[4]{\operatorname{arctg}^3(3/v)}}$;

10) $6\operatorname{ctg}(3x-1)\cdot\ln\sin(3x-1)$;

11) $\sin\frac{\pi}{7}-\dfrac{\ln 2}{2\sqrt{x-x^2}}\cdot 2^{\arccos\sqrt{x}}$;

12) $-\frac{\ln 3}{x^2}\cdot 3^{\frac{1}{x}}-2x\cdot 5^{-x^2}\ln 5$;

13) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x\ln 10}-1\right)$. (Совет: используйте свойства логарифмов);

14) $\dfrac{-1}{5\sqrt[5]{t^4}(1+\sqrt[5]{t^2})(3t^2+7)}-\dfrac{6t\operatorname{arctg}\sqrt[5]{t}}{(3t^2+7)^2}$;

15) $\dfrac{2}{\sin 2x\cdot\ln\operatorname{tg}x\cdot\ln 3}$.

4.8.

1) $\dfrac{x^2-1}{2x^2\sqrt{2x+\operatorname{tg}(x+\frac{1}{x})}\cdot\cos^2(x+\frac{1}{x})}$;

2) $\dfrac{x+1}{4\sqrt{(1-x^2-2x)(x^2+2x)}\cdot\arcsin\sqrt{x^2+2x}}$;

3) $\dfrac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x(x+\sqrt{x})}}{8\sqrt{x(x+\sqrt{x})(x+\sqrt{x+\sqrt{x}})}}$;

4) $\dfrac{x}{(2+x^2)\sqrt{1+x^2}\,\operatorname{arctg}\sqrt{1+x^2}}$;

5) $\dfrac{1}{x\log_3 x\cdot\ln(\log_3 x)\cdot\ln 2\cdot\ln 3}$;

6) $\dfrac{-6x^2\arccos(\ln(a^3+x^3))}{(a^3+x^3)\sqrt{1-\ln^2(a^3+x^3)}}$;

7) $(2x+3)e^{x^2+3x-2}\cos(e^{x^2+3x-2})$;

8) $3^x\cdot 2^{3^x}\ln 2\cdot\ln 3$;

9) $\dfrac{e^{3x}\operatorname{ctg}\sqrt[3]{\operatorname{arctg}e^{3x}}}{(1+e^{6x})\sqrt[3]{\operatorname{arctg}^2 e^{3x}}}$

10) $-3a^{\cos^3 x}\cdot\cos^2 x\cdot\sin x\cdot\ln a$;

11) $e^{\arcsin\frac{1}{x}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}-\frac{1}{|x|}\right)$;

12) $\frac{-1}{4\cos x}$;

13) $\frac{2(1-2\sin 4x)\cdot\ln 5}{\sin^2 4x}\cdot 5^{\ln \operatorname{ctg} 2x-0{,}5\operatorname{ctg}4x}$;

14) $4(\operatorname{tg}^2 4x+\cos 4x)\cdot e^{\frac{1}{\cos 4x}}$;

15) $\frac{2}{x(1+4\ln^2|x|)}$;

16) $\frac{-1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}\cdot e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$;

17) $\frac{\ln x-2}{x^2}\cdot\sin\frac{2(1-\ln x)}{x}$;

18) $\frac{-1}{(x^2+2x+2)\cdot\operatorname{arcctg}\frac{1}{1+x}}$;

19) $\frac{1}{e^x-1}$;

20) $\left(\operatorname{tg}x+\frac{x}{\cos^2 x}\right)\cdot 10^{x\operatorname{tg}x}\cdot\ln 10$;

21) $3\sin^2 x\,(\cos x\cdot\sin(x^3)+x^2\sin x\cdot\cos(x^3))$;

22) $e^x(\sin x+\cos x+5\cos^4(e^x)\cdot\sin(e^x))$;

23) $\frac{\operatorname{arctg}x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$;

24) $\frac{-1}{(2x+3)\sqrt{1+\ln(2x+3)}\cdot\sin^2\sqrt{1+\ln(2x+3)}}\cdot e^{\operatorname{ctg}\sqrt{1+\ln(2x+3)}}$;

25) $\frac{\ln 3}{1+3^{2x}}$.

4.9. $6x-4$. 4.10. $\frac{42}{(2+3x)^3}$; -42. 4.11. $-4\sin 2x$.

4.12. $81e^{3x+2}$. 4.13. 120. 4.16. $x=0$; $x=-0{,}5$.

4.17. $f''(0)=2$; $f''(-2)=-2$. 4.18. $x\in(\frac{1}{3};2)$.

4.19. $t=2$. 4.21. 1) $t=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n=1,2,3,\ldots$;
2) $t=\ln 10$.

4.22. 1) $2x\Delta x$; 2) $2\Delta x$; 3) $3x^2\Delta x$.

4.23. 1) $2\cos 2x\,dx$;
2) $\frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}}$;

3) $-\frac{\ln 3}{3}\cdot 3^{-\frac{x}{3}}dx$;

4) $\frac{3\,dx}{\sqrt{1-9x^2}}$;

5) $-2x\sin(x^2)\,dx$;

6) $-e^{\cos x}\sin x\,dx$.

4.24. I) $\frac{-dt}{t^2+1}$;

2) $3z^2\cdot 2^{z^3}\ln 2\,dz$.

3) $-e^{\frac{1}{u}}\frac{du}{u^2}$;

4) $\frac{dx}{\cos x-\sin x-1}$;

5) $\frac{2\,dt}{(2t-1)\ln 3}$,

6) $\frac{2\,dx}{(1-x)^2}$;

7) $2x\,dx-3u^2du$;

8) $2^{v+1}u\,du+u^2 2^v\ln 2\cdot dv$;

9) $-\frac{du+dv}{\sqrt{1-(u+v)^2}}$;

I0) $\frac{3\,dz}{\sqrt{t}}-\frac{3z}{2\sqrt{t^3}}\,dt$.

4.26. $x^{\cos x}\left(\frac{\cos x}{x}-\sin x\ln x\right)$.

4.27. $(\cos x)^{\sin x+1}\left(\ln\cos x-\operatorname{tg}^2x\right)$.

4.28. $(\sin 3x)^{\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{x\ln\sin 3x+3(x^2+1)\operatorname{ctg}3x}{\sqrt{x^2+1}}$.

4.30. I) $v=2t, a=2$; 2) $v=-\mathrm{I}, a=0$;
3) $v=-\frac{b}{a}\operatorname{ctg}t$, $a=\frac{-b}{a^2\sin^3t}$;

4) $v=\operatorname{ctg}\frac{t}{2}$, $a=\frac{-1}{4a\sin^4\frac{t}{2}}$; 5) $v=2e^t$, $a=2$;

6) $v=2t^2$, $a=4t^2$. 4.3I. $y=0$, $y=\frac{\mathrm{I}}{3}x$.

4.32. Кривые пересекаются в двух точках под углами $\varphi_{1,2}=\operatorname{arctg}\frac{4}{2}$.
4.33. $-\frac{x}{y}$. 4.34. $-\frac{b^2x}{a^2y}$. 4.35. $\frac{4y}{3x}$.
4.36. I) $-\frac{1}{y}$; 2) $-\frac{2(2-x)^2}{3y}$; 3) $\frac{9x^2}{2y}$; 4) $-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$; 5) $\frac{x}{4-y}$;

6) $\frac{1}{2y+2}$. <u>4.37.</u> I) $2y + 2$; 2) $-0{,}4\,(y + I)$; 3) $y + 3$; 4) $\frac{3y^2}{2x}$. <u>4.38.</u> $-\frac{2}{5}$ (Совет: удобно предварительно прологарифмировать). <u>4.40.</u> Нет. <u>5.I.</u> I) $-\frac{9}{7}$; 2) $\frac{3}{4}$; 3) -2; 4) $\frac{9}{25}$; 5) 0,5; 6) $-\frac{3}{2}$; 7) 0; 8) 0; 9) $+\infty$; I0) 0.

<u>5.2.</u> I) $y = 0$; 2) $y = 0$; 3) $y = 0$; 4) $x = 0$, $y = 0$; 5) $x = 0$, $y = x$; 6) $x = 0$, $y = 0$. <u>5.3.</u> I) 0; 2) $+\infty$; 3) $-\frac{I}{2}$; 4) $\frac{I}{2}$; 5) I; 6) I; 7) e^2; 8) $\frac{I}{2}$. <u>5.4.</u> I) $y = 3$; 2) $y = 2x + \frac{\pi}{2}$, $y = 2x - \frac{\pi}{2}$.

<u>6.I.</u> I) Убывает для $x \in (-\infty; -3)$ и $(-I; 0)$, возрастает для $x \in (-3; -I)$ и $(0; +\infty)$, $y_{max}(-I) = 6$ $y_{min}(-3) = -26$, $y_{min}(0) = I$; 2) монотонно возрастает на R ; 3) убывает для $x \in (-\infty; I)$, возрастает для $x \in (I; +\infty)$, $y_{min}(I) = I{,}25$; 4) убывает для $x \in (-I; I)$, возрастает для $x \in (-\infty; -I)$ и $(I; +\infty)$, $y_{min}(I) = -3$, $y_{max}(-I) = 0$; 5) убывает для $x \in (-I; 0)$ и $(0; I)$, возрастает для $x \in (-\infty; -I)$ и $(I; +\infty)$, $y_{max}(-I) = -2$, $y_{min}(I) = 2$; 6) убывает для $x \in (-\infty; 0)$ и $(2; +\infty)$, возрастает для $x \in (0; 2)$, $y_{min}(0) = 0$, $y_{max}(2) = 4e^{-2}$; 7) монотонно возрастает на $D(f)$; 8) убывает для $x \in (-\infty; -I)$ и $(I; +\infty)$, возрастает для $x \in (-I; I)$, $y_{min}(-I) = -I$; $y_{max}(I) = I$; 9) убывает для $x \in (-\infty; -I)$, возрастает для $x \in (I; +\infty)$; I0) монотонно возрастает на $D(f)$. <u>6.2.</u> I) Выпукла вверх для $x \in (-\infty; I)$, выпукла вниз для $x \in (I; +\infty)$, точка перегиба $(I; -I5)$; 2) выпукла вверх для $x \in (-\infty; -\sqrt{3})$ и $(0; \sqrt{3})$ выпукла вниз для $x \in (-\sqrt{3}; 0)$ и $(\sqrt{3}; +\infty)$, точки перегиба $(-\sqrt{3}; -\frac{\sqrt{3}}{4})$, $(0; 0)$, $(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4})$; 3) выпукла вверх для

$x \in (-\infty; 0)$, выпукла вниз для $x \in (0; +\infty)$; 4) выпукла вверх для $x \in (-\infty; -I)$ и $(I; +\infty)$, выпукла вниз для $x \in (-I; I)$, точки перегиба $(-I, \ln 2)$, $(I, \ln 2)$; 5) выпукла вверх для $x \in (I - \frac{\sqrt{2}}{2}, I + \frac{\sqrt{2}}{2})$, выпукла вниз для $x \in (-\infty; I - \frac{\sqrt{2}}{2})$ и $(I + \frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty)$, точки перегиба $(I - \frac{\sqrt{2}}{2}; e^{-\frac{1}{2}})$, $(I + \frac{\sqrt{2}}{2}; e^{-\frac{1}{2}})$; 6) выпукла вверх для $x \in (I; 3)$, выпукла вниз для $x \in (-\infty, I)$ и $(3, +\infty)$, точки перегиба $(I; 2e^{-1})$, $(3, I0e^{-3})$; 7) выпукла вверх на $D(f)$; 8) выпукла вверх для $x \in (-\infty; -I)$ и $(0; I)$, выпукла вниз

для $x \in (-1;\ 0) \cup (1;\ +\infty)$, точки перегиба $(-1;\ \frac{2}{3})$, $(1;\ -\frac{2}{3})$. 6.4. 1) $f_{\text{наим.}}(2) = -10$, $f_{\text{наиб.}}(0) = 10$,
3) $f_{\text{наим.}}(1) = 0$, $f_{\text{наиб.}}(e) = e^2$.

6.5. $|a| \leq 1$. 6.6. $a = 1$. 6.7. Один действительный корень.
6.8. $|a| \leq 2$. 6.9. $(a-\sigma;\ e^{-1/2})$, $(a+\sigma,\ e^{-1/2})$.
6.12. Два (Задачу можно решить графически). 6.13. Сторона поперечного сечения равна $\frac{2}{3}\sqrt{2}$ м, длина балки - $\frac{40}{3}$ м.

6.14. В основании- квадрат, сторона которого $\sqrt{5}$. 6.15. Длина - 100 м, ширина - 50 м. 6.16. 5 м. 6.17. $x = \frac{a}{2}$.

6.18. $\alpha = \arccos\frac{k_1}{k_2}$, $S = a\,\mathrm{ctg}\,\alpha$. 7.1. 1) Плоскость xoy;
2) $x^2+y^2 \leq R^2$; 3) Вся плоскость, за исключением точек окружности $x^2+y^2=R^2$; 4) часть плоскости, лежащая внутри первого и третьего координатных углов (без границ);
5) вся плоскость, за исключением прямой $y = 3x$; 6) часть пространства, лежащая внутри первого и третьего октантов (включая границы); 7) $x>0,\ y>0,\ z>0$; 8) все пространства, за исключением плоскости $z = 0$. 7.2. 1) $z'_x = 3x^2+6xy$, $z'_y = 3x^2-3y^2$; 2) $z'_x = \frac{-y}{x^2}$, $z'_y = \frac{1}{x}$; 3) $z'_x = \frac{-y^2}{(x-y)^2}$, $z'_y = \frac{x^2}{(x-y)^2}$; 4) $z'_x = \frac{y^2}{y^4+x^2}$, $z'_y = \frac{-2xy}{y^4+x^2}$; 5) $z'_{x_1} = \frac{2x_1}{x_1^2+x_2^2}$, $z'_{x_2} = \frac{2x_2}{x_1^2+x_2^2}$; 6) $z'_{x_1} = 3$, $z'_{x_2} = -2$; 7) $u'_x = \frac{1}{2\sqrt{x+y^2+z^3}}$,
$u'_y = \frac{y}{\sqrt{x+y^2+z^3}}$, $u'_z = \frac{3z^2}{2\sqrt{x+y^2+z^3}}$; 8) $u'_x = y\,z^{xy}\ln z$,
$u'_y = x\,z^{xy}\ln z$, $u'_z = xyz^{xy-1}$. 7.5. 1) $2xy^3dx + 3x^2y^2dy$;
2) $\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$; 3) $\frac{x\,dy-y\,dx}{|x|\sqrt{x^2-y^2}}$;

4) $e^{xyz}(yz\,dx+xz\,dy+xy\,dz)$; 7.6. 1) $z''_{xx} = 6x+2y$, $z''_{xy} = z''_{yx} = 2x$, $z''_{yy} = 6y$; 2) $z''_{xx} = 2$, $z''_{xy} = z''_{yx} = -1$, $z''_{yy} = 2$;
3) $z''_{xx} = \frac{-y}{4\sqrt{x^3}}$, $z''_{xy} = z''_{yx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $z''_{yy} = -2$;
4) $z''_{xx} = -(x-2y)^{-2}$, $z''_{xy} = z''_{yx} = 2(x-2y)^{-2}$, $z''_{yy} = -4(x-2y)^{-2}$. 7.7. $z'''_{xxx} = 24x$, $z'''_{xxy} = z'''_{xyx} = z'''_{yxx} = 12y$, $z'''_{xyy} = z'''_{yxy} = z'''_{yyx} = 12x$, $z'''_{yyy} = -48y$.

7.8. 1) $z_{min}(-3;\ 2) = 0$; 2) $z_{min}(-1;\ 1) = 8$;
3) $z_{max}\left(\frac{1}{3};\ \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27}$; 4) $z_{min}(1;\ -1) = -3$;
5) $z_{min}(4;1) = -152$, $z_{max}(-4;\ -1) = 152$; 6) $z_{min}(0;0) = 0$;
$z_{max}(0;\ -1) = z_{max}(0;\ 1) = 2e^{-1}$. 7.9. $z_{min}(1;\ -2) = 5$
(Совет : из уравнения связи $x = 2y + 5$, тогда $z = (2y+5)^2 + y^2$)
7.10. $z_{min}(4;\ 3) = -41$, $z_{max}(-4;\ -3) = 59$. Решение: Составим функцию Лагранжа $F(x,\ y,\ \lambda) = 9 - 8x - 6y + \lambda(x^2 + y^2 - 25)$. Найдем критические точки функции $F(x, y, \lambda)$.
Для этого решим систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} -8 + 2\lambda x &= 0 \\ -6 + 2\lambda y &= 0 \\ x^2 + y^2 - 25 &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Получены две критические точки $M_1(-4;\ -3;\ -1)$, $M_2(4;3;1)$.
Найдем d^2F.

$$d^2F = F''_{xx}\,dx^2 + 2F''_{xy}\,dx\,dy + F''_{yy}\,dy^2 =$$
$$= 2\lambda dx^2 + 0\cdot dx\,dy + 2\lambda dy^2 =$$
$$= 2\lambda(dx^2 + dy^2).$$

Вычислим d^2F в точках M_1 и M_2 соответственно.

$$d^2F(M_1) = -2(dx^2 + dy^2) < 0,$$

т.е. т. $(-4;\ -3)$ - является точкой локального максимума функции $z = 9 - 8x - 6y$.

Аналогично,

$$d^2F(M_2) = 2(dx^2 + dy^2) > 0,$$ т.е.

т. $(4;\ 3)$ - точка локального максимума функции $z = 9 - 8x - 6y$.
7.11. $z_{min}(2;2) = -4$, $z_{max}(-2;-2) = 20$ (См. решение задачи 7.10).

7.12. 1) прямые $2x + y = c$; 2) прямые $y = cx$;
3) Окружности $x^2 + y^2 = c,\ c \geq 0$; 4) параболы $x = cy^2$;
5) эллипсы $2x^2 + 3y^2 = c,\ c > 0$; 6) гиперболы $x^2 - y^2 = c$.
7.13. 1,4. 7.14. 7/9. 7.15. 0. 7.16. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. 7.17. $6\vec{i} + 4\vec{j}$.
7.18. 1) $-3\vec{i} + 2\vec{j}$; 2) $\vec{i} - \vec{j}$. 7.19. $\left(-\frac{1}{3};\ \frac{3}{4}\right), \left(\frac{7}{3}; -\frac{3}{4}\right)$.
7.20. $\frac{\partial z}{\partial x} = 1$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{x - z}$; $dz = dx + \frac{y}{x - z}\,dy$.

7.24. 1) $-\sin x\cos y\,dx^2 - 2\cos x\cdot\sin y\,dx\,dy - \sin x\cos y\,dy^2$;
2) $6\,dx^2dy$; 7.25. Экстремума нет (Совет: воспользуйтесь определением локального экстремума). 7.26. $z_{max}(1;-1) = 7$;

$z_{min}(1;-1)=1$ (Задачу проще решить графически).
7.27. 1) $z_{наим.}(0;0)=1$; $z_{наиб.}(0;6)=19$; 2) $z_{наиб.}(4;4)=128$; $z_{наим.}(0;0)=-4$. 7.28. 1) Плоскости $x_1+x_2+x_3=C$; 2) сферы $x^2+y^2+z^2=C$, $C>0$; 3) параболоиды вращения $x^2+y^2=Cz$, за исключением точки $(0;0;0)$. 7.30. Точки, лежащие на окружности $x^2+y^2=\frac{2}{3}$. 7.32. $-94{,}2$ см^3. 7.33. $x=\sqrt{\frac{c_1}{b_1}}$, $y=\sqrt{\frac{c_2}{b_2}}$. 7.34. Расстояния от точки пересечения магистралей до посёлков соответственно равны $\frac{|a_1b_2-a_2b_1|}{b_1+b_2}$, $\frac{|a_1b_2-a_2b_1|}{a_1+a_2}$. 7.35. По 5 га. 7.36. а) $8\vec{i}+10\vec{j}$; б) 0,4.

8.1. 1) $3\sin x-\frac{2}{3}x^3+5x+\ln|x|-4\,\mathrm{arctg}\,x+C$;

2) $2x^3-4x^2-4x+3\ln|x|+\frac{5}{2x^2}+C$;

3) $\frac{-2}{3\sqrt{x^3}}+e^x-\ln|x|+C$; 4) $2\sqrt{x}-2\ln|x|-\frac{2}{\sqrt{x}}+C$;

5) $-7\,\mathrm{ctg}\,x-4\cos x+C$; 6) $\mathrm{tg}\,x-x+C$;

7) $C+\frac{(2e)^x}{1+\ln 2}$; 8) $3x-\frac{3^x\,2^{1-x}}{\ln 1{,}5}+C$;

9) $2\arcsin x-x+C$; 10) $x-\mathrm{arctg}\,x+C$;

11) $x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$; 12) $\frac{u^4}{4}+C$;

13) $\frac{1}{4}\mathrm{tg}^4x+C$; 14) $\frac{1}{4}\cos^4x+C$.

8.2. 1) $\frac{1}{16}(x+1)^{16}+C$; 2) $-\frac{1}{8}(2x+3)^{-4}+C$;

3) $-\frac{1}{3}\sqrt{(8-2x)^3}+C$; 4) $\frac{2}{3}\sqrt{(1+x^2)^3}+C$;

5) $\sqrt{x^2+5}+C$; 6) $\frac{4}{27}\sqrt[4]{(3x^3+4)^3}+C$;

7) $\frac{1}{6}\sin^6x+C$; 8) $-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\cos^2x}+C$;

9) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{\ln^4x}+C$; 10) $-\frac{1}{2}\arcsin^{-2}x+C$;

11) $\frac{1}{5}\mathrm{arctg}^5x+C$; 12) $2\sqrt{1+\mathrm{tg}\,x}+C$;

13) $\frac{1}{3}\sin 3x+C$; 14) $-3\,\mathrm{ctg}\,\frac{x}{3}+C$;

15) $\mathrm{tg}(x-1)+C$; 16) $-\frac{1}{2}\cos(2x+5)+C$;

17) $x\cos\frac{\pi}{12}-\frac{1}{2}\sin 2x+C$; 18) $-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{12}-2x\right)+C$;

19) $\frac{1}{14}\mathrm{tg}(7x^2)+C$; 20) $-\cos(e^x)+C$;

21) $-\frac{1}{3}\sqrt{(3-2\sin x)^3}+C$; 22) $\frac{1}{2}\ln|2x-3|+C$;

23) $-\frac{1}{5}\ln|1-5e^x|+C$; 24) $-\ln|\cos x|+C$;

25) $\frac{1}{3}\ln|\sin 3x|+C$; 26) $\ln|\ln x|+C$;

27) $\ln|\ln x+2|+C$; 28) $e^{\sin x}+C$;

29) $-\frac{1}{3}e^{-3x+6}+C$;

30) $e^{-\cos x}+C$;

31) $-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$;

32) $\frac{1}{6}e^{2x^3}+C$;

33) $\frac{6^{5x+1}}{5\ln 6}+C$;

34) $C+\frac{3^{x^4}}{4\ln 3}$;

35) $(2^{\sqrt{x}+1})/\ln 2+C$;

36) $\frac{1}{5}\arcsin 5x+C$;

37) $\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{3x}{2}+C$;

38) $\ln|x+\sqrt{x^2-5}|+C$;

39) $\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}x-\sqrt{2}}{\sqrt{3}x+\sqrt{2}}\right|+C$;

40) $\frac{1}{9}\operatorname{arctg}\frac{x^3}{3}+C$;

41) $\frac{1}{4}\arcsin\frac{x^4}{2}+C$;

42) $\operatorname{arctg}e^x+C$;

43) $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln|\sqrt{2}x+\sqrt{2x^2+1}|+C$;

44) $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\sin x}{\sqrt{3}}+C$;

45) $\ln|\ln x+\sqrt{\ln^2 x-9}|+C$;

46) $\frac{5}{2}\ln(x^2+1)-2\operatorname{arctg}x+C$;

47) $\sqrt{x^2-1}-\ln|x+\sqrt{x^2-1}|+C$;

48) $x-\ln|x+1|+C$;

49) $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\ln|2x-1|+C$;

50) $\frac{1}{3}\ln(e^{3x}+2)+C$;

51) $\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+C$;

52) $\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}\sin 6x+C$;

53) $\frac{1}{20}\sin 10x+\frac{1}{8}\sin 4x+C$;

54) $\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{22}\cos 11x+C$.

8.3. 1) $\frac{5}{4}\sin 2x-\frac{1}{2}(5x-3)\cos 2x+C$;

2) $\frac{x^2+2x}{2}\ln x-\frac{1}{4}x^2-x+C$;

3) $-\frac{1}{9}e^{-3x}(3x+1)+C$;

4) $\frac{3^x}{\ln 3}\left(x-\frac{1}{\ln 3}\right)+C$;

5) $\frac{1}{27}(9x^2\sin 3x+6x\cos 3x-2\sin 3x)+C$;

6) $x\operatorname{arctg}2x-\frac{1}{4}\ln(1+4x^2)+C$;

7) $\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}(x^2+1)\operatorname{arcctg}x+C$;

8) $x\arcsin\frac{x}{3}+\sqrt{9-x^2}+C$; 9) $x(\ln^2 x-2\ln x+2)+C$;

10) $2e^{\frac{x}{2}}(x^2-4x+8)+C$; 11) $2\sqrt{x}(\ln x-2)+C$;

12) $(5+2x-x^2)\cos(x+1)+(2x-2)\sin(x+1)+C$;

13) $\frac{x^2}{4}(2\ln 6x-1)+C$;

14) $x\ln(1+x^2)-2x+2\operatorname{arctg}x+C$.

8.4. 1) $2\sqrt{x+3}-4\ln(2+\sqrt{x+3})+C$;

2) $\sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{2}}+C$;

3) $\frac{2(52-3x)\sqrt{1-3x}}{27}+C$;

4) $\frac{3}{2}(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+2\ln|\sqrt[3]{x}+1|)+C$;

5) $x+4\sqrt{x+1}+4\ln|\sqrt{x+1}-1|+C$;

6) $6\left(\frac{1}{7}\sqrt[6]{x^7}-\frac{1}{5}\sqrt[6]{x^5}+\frac{1}{3}\sqrt{x}-\sqrt[6]{x}+\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}\right)+C$;

7) $2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4\ln(\sqrt[4]{x}+1)+C$;

8) $\ln\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}+C$;

9) $(4x-5)(5-2x)^{-2}+C$.

8.5. 1) $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C$;

2) $\frac{5}{2\sqrt{7}}\ln\left|\frac{2x+3-\sqrt{7}}{2x+3+\sqrt{7}}\right|+C$;

3) $\ln\frac{(x-4)^2}{|x-3|}+C$;

4) $C-\ln(2x^2-3x+2)$;

5) $\ln|x-1+\sqrt{x^2-2x+5}|+C$;

6) $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x-2}{\sqrt{2}}+C$;

7) $3\sqrt{x^2+2x+2}-4\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}|+C$;

8) $C-\sqrt{3-2x-x^2}-\arcsin\frac{x+1}{2}$.

8.6. 1) $\frac{x^2}{2}+x+3\ln|x+2|+C$;

2) $\frac{2}{3}\ln|x+2|-\frac{1}{6}\ln|2x+1|+C$;

3) $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+\ln\left|\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|+C$;

4) $\frac{x^2}{2}+10x+\ln\left|\frac{(x-1)^{64}}{x^{27}}\right|+C$;

5) $\frac{1}{6}\ln|x|-\frac{5}{2}\ln|x-2|+\frac{10}{3}\ln|x-3|+C$;

6) $4\ln|x|-3\ln|x-1|-\frac{9}{x-1}+C$;

7) $x+\frac{2}{x}+\ln\left|\frac{(x-1)^3}{x^2}\right|+C$;

8) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-5}{x+3}\right|-\frac{1}{x+3}+C$;

9) $\frac{1}{4}\ln|x|-\frac{1}{8}\ln(x^2+4)+C$;

10) $-3\ln|x|+\frac{3}{2}\ln(x^2-2x+5)+2\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}+C$;

11) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$.

8.7. I) $C-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{1}{5}\cos^5 x$ (Совет: $\sin^5 x\,dx=$ $=-\sin^4 x\,d(\cos x)=\dots$);

2) $\frac{1}{4}\sin 4x-\frac{1}{12}\sin^3 4x+C$;

3) $C-\frac{1}{3}\cos^3 x+\frac{1}{5}\cos^5 x$;

4) $\frac{1}{3\sin^3 x}-\frac{1}{5\sin^5 x}+C$;

5) $\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}\sin 3x+C$;

6) $\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$;

7) $\frac{1}{8}x-\frac{1}{64}\sin 8x+C$;

8) $C-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x-\ln|\sin x|$;

9) $\frac{1}{5}\sin\frac{5}{2}x-\frac{1}{7}\sin\frac{7}{2}x+C$;

I0) $C-\frac{1}{15}\cos\frac{15}{2}x-\frac{1}{9}\cos\frac{9}{2}x$.

8.9. Номера формул взяты из справочника Г.Д.Двайта.
I) См. формулу 455.0I; 2) См. формулу 456.I; 3) См. формулу I65.0I; 4) См.формулу I20.3; 5) См.формулу 577.I; 6) $\int(1+2x)\sqrt{x^2+5}\,dx=\int\sqrt{x^2+5}\,dx+2\int x\sqrt{x^2+5}\,dx$, далее см.формулы 230.0I, 23I.0I; 7) $\int(x-1)\arcsin 2x\,dx=\int x\arcsin 2x\,dx-\int\arcsin 2x\,dx$, далее см.формулы 5I7.I, 5I5, где $a=\frac{1}{2}$; 8) Заметим, что

$$\int x^4\cos 2x\,dx=\frac{1}{32}\int(2x)^4\cos 2x\,d(2x).$$

Далее удобно применить формулу 440.I4, используя свойство инвариантности неопределенного интеграла; 9) Решается аналогично 8.98, применяя формулу 440.60; I0) $\int\frac{\sqrt{9x^2+1}}{2x}dx=\frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{(3x)^2+1^2}}{3x}d(3x)$, далее см.формулу 24I,0I, используя свойство инвариантности неопределенного интеграла; II) См. формулу 6I5; I2) См.формулу 380.00I.

8.II. I) $C-x-\sqrt{1-x^2}\arccos x$;

2) $4\sqrt{2+x}-2\sqrt{2-x}\arcsin\frac{x}{2}+C$;

3) $x\operatorname{tg}x+\ln|\cos x|+C$;

4) $\frac{1}{2}(\sin x^2-x^2\cos x^2)+C$;

5) $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\cos^2 x} - \operatorname{tg} x\right) + C$;

6) $\frac{1}{2} x(\sin \ln x + \cos \ln x) + C$;

7) $\frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C$;

8) $\frac{x^3}{3} \operatorname{arctg} x - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6} \ln(1 + x^2) + C$;

9) $\ln x\,(\ln(\ln x) - 1) + C$;

I0) $\frac{x\sqrt{a^2 + x^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \ln|x + \sqrt{a^2 + x^2}| + C$;

II) $C - \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} - \arcsin \frac{x}{a}$;

I2) $\frac{x}{a^2\sqrt{a^2 + x^2}} + C$;

I3) $C - \frac{x}{a^2\sqrt{x^2 - a^2}}$;

I4) $2(\cos\sqrt{x} + \sqrt{x} \cdot \sin\sqrt{x}) + C$;

I5) $3e^{\sqrt[3]{x}}(\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 2) + C$;

I6) $2(\sqrt{x} \cdot \arccos\sqrt{x} - \sqrt{1 - x}) + C$;

I7) $2\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) + C$;

I8) $\ln|e^x - 1| - x + C$;

I9) $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$;

20) $\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x + C$;

2I) $\operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C$;

22) $\frac{1}{2} \operatorname{arctg}(2 \operatorname{tg} x) + C$;

23) $\frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{3 \operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}} + C$;

24) $\frac{2}{\sqrt{65}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{13}} + C$;

25) $\frac{1}{2}\cos^2 x - 4\cos x + 15\ln(\cos x + 4) + C$.

<u>9.I.</u> I) – 2; 2) 0; 3) – I5; 4) I8; 5) – 22; 6) I0; 7) I00; 8) – 4; 9) 96; I0) 0; II) 48; I2) 0. <u>9.2.</u> I) $x = 2$; $y = 3$; 2) $x = 1$; $y = -1$; 3) $x = y = z = 1$; 4) $x_1 = -\frac{104}{39}$; $x_2 = \frac{-40}{39}$; $x_3 = -\frac{72}{39}$;

5) $x = 1; y = 3; z = -1$. 9.3. 1) 2x3; 2) 2x2; 3) 3x1; 4) 1x3.
9.4. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$. 9.5. Нет. 9.6. $B \cdot A = \begin{pmatrix} 14 & -1 \\ 3 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

9.7. 1) $\begin{pmatrix} -5 & 8 \\ 30 & -12 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$; 3) 13; 4) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 13 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 22 \\ 63 \end{pmatrix}$. 9.8. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 2 & 3 & 8 \\ 5 & 6 & 9 \end{pmatrix}$. 9.9. 1) Нет; 2) $\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}$;

3) $\frac{1}{48} \cdot \begin{pmatrix} -10 & 12 & -10 \\ -17 & 6 & 7 \\ 8 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ 4) Нет. 9.10. 1) 2; 2) 1;

3) 2; 4) 1; 5) 3; 6) 2; 7) 2. 9.11. 1) $x_1 = x_2 = x_3 = 1$;
2) $x = 1$; $y = 2$; $z = 3$; 3) несовместна;
4) $x_1 = 14k$, $x_2 = 21k$, $x_3 = x_4 = k$, $k \in R$.

9.12. $z_1 + 2z_2 = 1 + 4i$;
$z_1 - z_2 = 4 + i$;
$z_1 \cdot z_2 = -5 + i$;
$\overline{z_1} + \overline{z_2} = 2 - 3i$;
$\overline{z_1 + z_2} = 2 - 3i$.

9.13. 1) $\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} i$; 2) 8; 3) $-\frac{7}{8} - \frac{9\sqrt{3}}{8} i$,

4) $\frac{1}{28} + \frac{3\sqrt{3}}{28} i$; 5) 16; 6) $2\sqrt{3}$.

9.14. 1) $-i$; 2) 1; 3) $\frac{3}{2} - i$; 4) i. 9.15. $x = 2$; $y = 1$.

9.16. $z = -\frac{21}{29} + \frac{20}{29} i$; 9.17. 1) $x_1 = 4i$; $x_2 = -4i$;

2) $x_1 = 1 + 2i$; $x_2 = 1 - 2i$; 3) $x_1 = 0{,}4 + 1{,}2i$;
$x_2 = 0{,}4 - 1{,}2i$; 4) $x_1 = -\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{5}}{3} i$; $x_2 = -\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{5}}{3} i$.

9.18. $x_1 = 3 + 6i$; $y_1 = 3 - 6i$; $x_2 = 3 - 6i$; $y_2 = 3 + 6i$.
9.19. 1) $5(\cos\pi + i\sin\pi) = 5e^{\pi i}$;

2) $3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 3e^{\frac{\pi}{2} i}$;

3) $\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = e^{\frac{\pi}{4} i}$;

4) $2\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2e^{-\frac{\pi}{3} i}$;

5) $\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = e^{\frac{\pi}{3}i}$;

6) $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right) = 2\sqrt{2}\,e^{\frac{3}{4}\pi i}$.

9.20. I) $\cos 1 + i\sin 1$;

2) $2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2i$;

3) $e^{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}\right) = -e^{2}i$;

4) $3\left(\cos 2\pi + i\sin 2\pi\right) = 3$;

5) $2e\left(\cos\pi + i\sin\pi\right) = -2e$.

9.2I. I) $3\sqrt{3} + 3i$; 2) $-1+\sqrt{3}i$; 3) -64; 4) $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$;

$-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, $-i$; 5) I; $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$; 6) $\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$; $-\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$;

7) $\left(\sqrt[4]{2\sqrt{3}-2i}\right)_1 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{24} - i\sin\frac{\pi}{24}\right)$;

$\left(\sqrt[4]{2\sqrt{3}-2i}\right)_2 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{24} + i\sin\frac{11\pi}{24}\right)$;

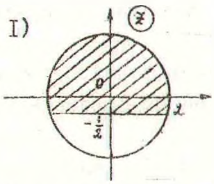
$\left(\sqrt[4]{2\sqrt{3}-2i}\right)_3 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{23\pi}{24} + i\sin\frac{23\pi}{24}\right)$;

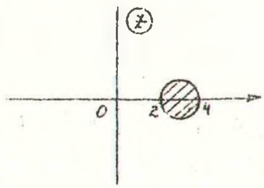
$\left(\sqrt[4]{2\sqrt{3}-2i}\right)_4 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{35\pi}{24} + i\sin\frac{35\pi}{24}\right)$.

9.22. I) $z_1 = 1$; $z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; $z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$;

2) $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$; $z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$; $z_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$;
$z_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$;

3) $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; $z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; $z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_4 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

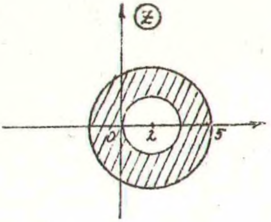
9.23. I) 

; 

;

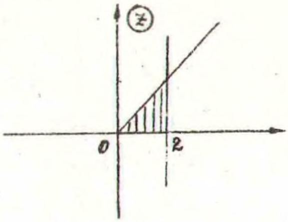
(Если $z = x + iy$, то
$\operatorname{Im} z = y$, $\operatorname{Re} z = x$.)

3)



;

4)



.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. – М.: Наука, 1986. – 576 с.

2. Шипачёв В.С. Основы высшей математики. – М.: Высшая школа, 1989. – 479 с.

3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: Высшая школа, 1980. – Ч.1.

4. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов/ Под ред. Б.П.Демидовича. – М.: Наука, 1970. – 472 с.

5. Островский Е.А., Жилевич Л.И., Дубкова М.З. Методическое пособие по курсу "Высшая математика". – Мн.: БТИ им.С.М.Кирова, 1986. – Ч.1.

6. Островский Е.А., Жилевич Л.И. Методические указания по курсу "Высшая математика". – Мн.: БТИ им.С.М.Кирова, 1987. – Ч.2.

7. Воднев В.Т., Наумович А.Ф., Наумович Н.Ф. Основные математические формулы. – Мн.: Вышэйшая школа, 1980.– 336 с.

8. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. – М.: Наука, 1973. – 228 с.

9. Соловьёв В.А., Зайцева В.К., Алексеев А.С. Экономические основы охраны природы. – Л.: Ленингр.лесотехническая академия им.С.М.Кирова, 1982. – 84 с.

10. Анучин Н.П. Лесная таксация. – М.:Лесная промышленность, 1971. – 512 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ В ВОПРОСАХ, УПРАЖНЕНИЯХ И ЗАДАЧАХ

Составители: Алешенко Людмила Николаевна,

Гром Людмила Иосифовна, Кончиц Раиса Михайловна

Редактор И.В.Старовойтова. Корректор Н.М.Малаховский.

Подписано в печать 28.II.90. Формат 60х84-/I6.

Печать офсетная. Усл.печ.л.3,5. Усл.кр.-отт.3,5. Уч.-изд.л.3,0.

Тираж 500 экз. Заказ 578 . Цена 10 к.

Белорусский ордена Трудового Красного Знамени технологический институт им.С.М.Кирова. 220630. Минск, Свердлова, I3а.

Отпечатано на ротапринте Белорусского ордена Трудового Красного Знамени технологического института им.С.М.Кирова. 220630. Минск, Свердлова, 13.