

512
Т33

Министерство народного образования БССР
БЕЛОРУССКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМЕНИ С.М.КИРОВА

Кафедра высшей математики

ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Методические указания и задания для самостоятельной работы
студентов специальностей I7.04, I7.05 -

Минск 1991

79 19

УДК 512.8

Рассмотрены и рекомендованы к изданию редакционно-издательским советом института

Составители: В.А. Гончарова,
Л.Ф. Зверович.

Научный редактор доцент М.Н. Горбатович.
Рецензент зав. кафедрой физики БТИ,
доцент Наркевич И.И.

По тематическому плану внутривузовских изданий учебно-методической литературы на 1991 год. Поз.22.

Для студентов спец. 17.04 "Машины и оборудование лесного комплекса", 17.05 "Машины и аппараты химических производств предприятий строительных материалов".

Библиотека БГТУ



0000000261930b

С Белорус. ордена Трудового
Красного Знамени технол.
ин-т им. С.М. Кирова, 1991

Составление. В.А. Гончарова,
Зверович, 1991

ВВЕДЕНИЕ

Методические указания к теме "Теория поля" предназначены для самостоятельной работы студентов механических специальностей и состоят из двух частей. В первой части приведены задания (вопросы, задачи, упражнения) трех уровней сложности (А, Б, С). Во второй части даны основные теоретические сведения и решения типовых задач уровней А и Б. На все задачи даны ответы, приведен список литературы, которая может быть использована для более глубокого изучения темы.

На уровне А изложены основные понятия векторного анализа, не усложненные математическими выкладками. Они проиллюстрированы примерами, имеющими наглядную физическую и механическую интерпретацию. Уровень Б предполагает более глубокое изучение тех понятий, с которыми студент познакомился при изучении темы на уровне А, и освоение других, более сложных понятий. Уровень С предназначен, в основном, для УИРС.

В приложениях к указаниям приведены краткая характеристика некоторых физических полей (приложение 2) и диаграмма основных характеристик векторного поля (приложение I).

Поясним некоторые понятия, используемые в дальнейшем.

Все линии и поверхности, рассматриваемые в настоящих указаниях, будем предполагать кусочно-гладкими.

Линия называется гладкой, если она обладает непрерывно изменяющейся касательной. Поверхность называется гладкой, если она обладает непрерывно изменяющейся нормалью.

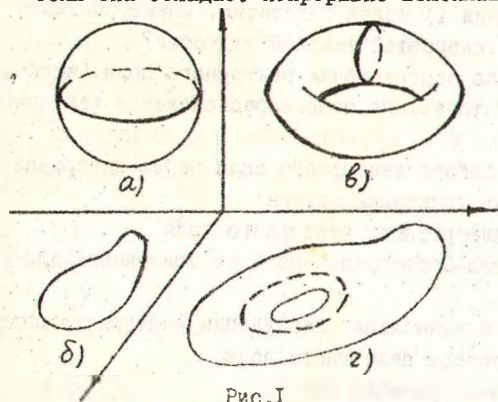


Рис. I

Линия и поверхность называются кусочно-гладкими, если они составлены из конечного числа гладких кусков.

Область G (плоская или трехмерная) называется односвязной, если любой замкнутый контур в G можно непрерывно деформиро-

вать ("стянуть") в точку, оставаясь все время в области G .

На рис. I изображены односвязные области (а и б) и многосвязные области (в и г). В области г) пунктиром указана контур, который нельзя деформировать ("стянуть") в точку, оставаясь в этой области.

I. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

I.I. Вопросы уровня А

1. Определение вектор-функции скалярного аргумента и ее годографа.

2. Первая и вторая производные вектор-функции $\vec{a}(t)$

3. Механическая интерпретация вектор-функции $\vec{r}(t)$ (радиуса-вектора точки), ее годографа и производных $\vec{r}'(t)$, $\vec{r}''(t)$.

4. Определение скалярного поля, примеры скалярных полей.

5. Определение поверхности (линии) равного уровня скалярного поля. Примеры скалярных полей и их поверхностей (линий) равного уровня.

6. Определение и формула для вычисления производной скалярного поля $u(M)$ в точке M_0 по направлению $\vec{e}$.

7. Определение и свойства градиента скалярного поля.

8. Определение векторного поля, примеры векторных полей.

9. Стационарные и нестационарные поля, примеры.

10. Определение плоского (плоскопараллельного) поля, примеры скалярных и векторных плоских полей.

11. Определение векторной линии векторного поля. Как называются векторные линии 1) полей тяготения, электрического и магнитного, 2) поля скоростей текущей жидкости?

12. Характеристика особых точек векторного поля (источников, стоков, вихревых точек) на основе расположения векторных линий, примеры.

13. Определение потока векторного поля через поверхность S , гидродинамическая трактовка потока.

14. Вычисление дивергенции векторного поля.

15. Теорема Гаусса-Остроградского и ее применение для вычисления потока.

16. Определение и вычисление циркуляции векторного поля.

17. Вычисление ротора векторного поля.

18. Теорема Стокса. Формула Грина.

19. Определение и свойства потенциального векторного

поля. Вычисление потенциала векторного поля:

20. Определение соленоидального векторного поля, уравнение неразрывности несжимаемой жидкости.

I.2. Задача уровня A

1. Найти траекторию точки, движущейся по закону $\vec{r} = \vec{r}(t)$; найти вектор скорости и вектор ускорения при $t = t_0$:

- 1) $\vec{r}(t) = 3t \cdot \vec{i} + (2t - t^2) \cdot \vec{j} + \vec{k}$, $t_0 = -1$;
- 2) $\vec{r}(t) = 2 \cos t \cdot \vec{i} + 3 \vec{j} + \sin t \cdot \vec{k}$, $t_0 = \frac{3\pi}{2}$;
- 3) $\vec{r}(t) = (3t - 2) \cdot \vec{i} + 4t \cdot \vec{j} + (5 + t) \cdot \vec{k}$, $t_0 = 2$;
- 4) $\vec{r}(t) = \cos t \cdot \vec{i} + \sin t \cdot \vec{j} + t \cdot \vec{k}$, $t_0 = \frac{\pi}{2}$;
- 5) $\vec{r}(t) = (2t^2 - 3) \vec{i} - 3t^2 \cdot \vec{j} + (4t^2 - 5) \vec{k}$, $t_0 = -\frac{1}{2}$;
- 6) $\vec{r}(t) = 2 \vec{i} + 5 \cos t \cdot \vec{j} + 4 \sin t \cdot \vec{k}$, $t_0 = \pi$;
- 7) $\vec{r}(t) = 3t \cdot \vec{i} + (4t - t^2) \cdot \vec{j} + 5 \cdot \vec{k}$, $t_0 = 2$.

2. Найти уравнения линий равного уровня скалярного поля $u = u(M)$. Записать уравнение линии уровня, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$; сделать рисунок:

- 1) $u = x \cdot y$, $M_0(3; 2)$;
- 2) $u = 2x - y$, $M_0(4; 5)$;
- 3) $u = y^2 + x$, $M_0(-3; 2)$;
- 4) $u = \frac{x^2}{y}$, $M_0(3; -9)$;
- 5) $u = \exp(x - y^2)$, $M_0(2; 0)$;
- 6) $u = x^2 + y^2 + 2x$, $M_0(2; 1)$;
- 7) $u = x^2 + \frac{1}{2} y^2$, $M_0(-1; 2)$.

3. Найти уравнения поверхностей равного уровня скалярного поля $u = u(x; y; z)$:

- 1) $u = x + 3y - 5z$;
- 2) $u = \cos(x^2 + y)$;
- 3) $u = (x^2 + y^2) / z$;
- 4) $u = 2y^2 + 9z^2$;
- 5) $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$;
- 6) $u = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16}$;
- 7) $u = \exp(x - 4y + z)$.

4. Найти производную скалярного поля $u = u(M)$ в данной точке M_0 по заданному направлению $\vec{e}$:

- 1) а) $u = x^2 + y^2/2$, $M_0(2; -1)$, $\vec{e} = \overrightarrow{M_0 M_1}$, где $M_1(6; 2)$;
 б) $u = xy^2 + z^2 - xyz$, $M_0(1; 1; 2)$, $\vec{e}$ составляет с осью Ox угол $\alpha = 60^\circ$, с осью Oy - угол $\beta = 45^\circ$, острый угол с осью Oz ;
 2) а) $u = xy^2 - xy^2 - 3y - 1$, $M_0(2; 1)$, $\vec{e}$ составляет с осью Oy угол $\beta = 135^\circ$;
 б) $u = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + z$, $M_0(2; 1; 1)$, $\vec{e} = \overrightarrow{M_0 M_1}$, где $M_1(3; 1; 3)$
 3) а) $u = x/y - y/x$, $M_0(2; -1)$, $\vec{e} = \overrightarrow{M_0 M_1}$, где $M_1(5; 3)$;
 б) $u = 5 - 3yz + x^2$, $M_0(1; 2; -1)$, $\vec{e}$ составляет одинаковые острые углы со всеми координатными осями;
 4) а) $u = x^2 - xy - 2y^2$, $M_0(1; 2)$, $\vec{e}$ составляет с осью Ox угол $\alpha = 60^\circ$;
 б) $u = 5x^2yz - 7xyz^2 + 5xyz^2$, $M_0(1; 1; 1)$, $\vec{e} = 8\vec{i} - 4\vec{j} + 8\vec{k}$;
 5) а) $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, $M_0(1; 1)$, $\vec{e}$ составляет равные углы с осями Ox и Oy ;
 б) $u = x^2y - xz^2 + 1$, $M_0(1; -2; 1)$, $\vec{e} = \overrightarrow{M_0 M_1}$, где $M_1(3; -6; 2)$;
 6) а) $u = \ln(e^x + e^y)$, $M_0(0; 0)$, $\vec{e}$ составляет с осью Oy угол $\beta = 60^\circ$;
 б) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $M_0(1; 1; 1)$, $M_1(3; 2; 1)$, $\vec{e} = \overrightarrow{M_0 M_1}$;
 7) а) $u = \arctg xy$, $M_0(1; 1)$, $\vec{e}$ составляет с осью Ox угол $\alpha = 120^\circ$;
 б) $u = x + 2y^2 + z^2$, $M_0(-1; 3; 1)$, $\vec{e} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$.

5. Найти направление и скорость наибольшего возрастания поля $u = u(M)$ в точке M_0 :

- 1) а) $u = \arctg(x/y)$, $M_0(-1; -1)$;
 б) $u = xyz$, $M_0(2; -3; -2)$;
 2) а) $u = \sqrt{4 + x^2 + y^2}$, $M_0(2; 1)$;
 б) $u = 2x^2y + xz^2 - 3yz$, $M_0(-2; 1; 3)$;
 3) а) $u = x + y + 2\sqrt{xy}$, $M_0(1; 4)$;
 б) $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$, $M_0(1; 1; -1)$;
 4) а) $u = (x + y) \cdot \exp(x + y)$, $M_0(0; 0)$;
 б) $u = xy^2 + z^2$, $M_0(4; 1; -3)$;
 5) а) $u = \sin(x + y)$, $M_0(\pi/2; \pi/2)$;
 б) $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, $M_0(-2; 1; 2)$;

- 6) а) $u = \ln(x^2 + 4y^2)$, $M_0(2; -1)$;
 б) $u = xy^2 + z^2 - xyz$, $M_0(-2; 1; -2)$;
 7) а) $u = x - 3y + \sqrt{3xy}$, $M_0(3; 4)$;
 б) $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $M_0(-1; 1; 2)$.

6. Найти векторные линии плоскопараллельного векторного поля $\vec{F} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$:

- 1) $\vec{F} = y \cdot \vec{i} - x \cdot \vec{j}$; 2) $\vec{F} = y \cdot \vec{i} + \vec{j}$;
 3) $\vec{F} = x \vec{i} - y \cdot \vec{j}$; 4) $\vec{F} = x \cdot \vec{i} + 2y \cdot \vec{j}$;
 5) $\vec{F} = x^2 \cdot \vec{i} + y^2 \cdot \vec{j}$; 6) $\vec{F} = \frac{y \vec{i} + x \vec{j}}{x^2 + y^2}$;
 7) $\vec{F} = 2x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$.

7. Вычислить поток вектора $\vec{F}(M)$ через поверхность S в направлении нормали $\vec{n}$ к поверхности S :

1) $\vec{F} = \vec{i} + 3\vec{j}$; поверхность S имеет форму треугольника с вершинами в точках $A(1; 2; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 2; 2)$; нормаль $\vec{n}$ направлена в сторону, где расположено начало координат;

2) $\vec{F} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$; поверхность S - круг $x^2 + y^2 \leq R^2$; $\vec{n} \uparrow \uparrow Oz$;

3) $\vec{F} = -4\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$; поверхность S - часть плоскости $2x + y + 2z = 6$, лежащая в первом октанте; нормаль $\vec{n}$ направлена в сторону, противоположную той, где расположено начало координат;

4) $\vec{F} = \vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}$; поверхность S представляет собой треугольник с вершинами в точках $A(4; 0; 0)$, $B(4; 0; 6)$, $C(4; 5; 0)$; $\vec{n} \uparrow \uparrow Ox$;

5) $\vec{F} = 7\vec{i} + 6\vec{j}$; поверхность S - круг $x^2 + z^2 \leq a^2$; $\vec{n} \uparrow \uparrow Oy$;

6) $\vec{F} = \vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$; поверхность S - часть плоскости $2x + 2y + z = 4$, лежащая в первом октанте; нормаль $\vec{n}$ направлена в сторону, где расположено начало координат;

7) $\vec{F} = xt + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$; поверхность S - боковая поверхность цилиндра $y^2 + z^2 = R^2$, $x = 0$, $x = H$; $\vec{n}$ - внешняя нормаль к S .

8. Вычислить дивергенцию векторного поля $\vec{F}(M)$ в произвольной точке поля. Установить, являются ли заданные точки

M_1, M_2, M_3 источниками или стоками.

- 1) $\vec{F} = x^2 \vec{i} - (x^2 + y^3) \vec{j} + xy^2 \vec{k}$, $M_1(0; 2; 0)$,
 $M_2(3; 1; 1)$, $M_3(1; 1; 2)$;
- 2) $\vec{F} = (x+y) \vec{i} - y^2 z \vec{j} + xz \vec{k}$, $M_1(4; 1; 1)$,
 $M_2(-1; 2; 0)$, $M_3(2; 3; 1)$;
- 3) $\vec{F} = x^2 \vec{i} - xy^3 \vec{j} + (z+y) \vec{k}$, $M_1(1; -1; 3)$,
 $M_2(-4; 1; 2)$, $M_3(1; 5; 0)$;
- 4) $\vec{F} = 2xy \vec{i} - yz \vec{j} + z(x^2 + y^2) \vec{k}$, $M_1(-1; 2; 2)$,
 $M_2(3; 1; 2)$, $M_3(0; 0; 0)$;
- 5) $\vec{F} = (1+2xy) \vec{i} - y^2 z \vec{j} + x^3 z \vec{k}$, $M_1(2; 1; 5)$,
 $M_2(0; 3; 2)$, $M_3(1; 0; 4)$;
- 6) $\vec{F} = y^2 \vec{i} - (x^2 + y^2) \vec{j} + 3xz^2 \vec{k}$, $M_1(0; -2; 4)$,
 $M_2(1; 3; 1)$, $M_3(0; 1; 1)$;
- 7) $\vec{F} = (x^2 + y^2) \vec{i} - y^2 \vec{j} + 2xz^2 \vec{k}$, $M_1(5; 4; -1)$,
 $M_2(2; 1; 0)$, $M_3(1; 3; 1)$.

9. Вычислить поток векторного поля $\vec{F}(M)$ через замкнутую поверхность S в направлении внешней нормали к поверхности, используя теорему Гаусса-Остроградского:

- 1) $\vec{F} = 2x \vec{i} + 2y \vec{j} - z \vec{k}$, $S: z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 1$;
- 2) $\vec{F} = x^2 \vec{i} + y^2 \vec{j} - 2z \vec{k}$, $S: x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$;
- 3) $\vec{F} = xy \vec{i} - xy^2 \vec{j} + (x^2 + y^2) z \vec{k}$, $S: z=0$, $z=1$, $x^2 + y^2 = 4$;
- 4) $\vec{F} = x^2 \vec{i} + xy \vec{j} + z \vec{k}$, $S: z=1$, $z=y^2$, $-1 \leq x \leq 0$;
- 5) $\vec{F} = x \vec{i} - 2y \vec{j} - z \vec{k}$, $S: z=1-x^2-y^2$, $z=0$;
- 6) $\vec{F} = 3xz \vec{i} - y \vec{j} + z \vec{k}$, $S: 2x+y+z=4$, $x=0$, $y=0$, $z=0$;
- 7) $\vec{F} = (x+z) \vec{i} + (y+x) \vec{j} + (z+y) \vec{k}$, $S: x^2 + y^2 = 1$, $z=y$, $z \geq 0$.

10. Вычислить циркуляцию плоского векторного поля $\vec{F}(M)$ вдоль замкнутого контура L двумя способами: 1) непосредственно, 2) с помощью формулы Грина. Направление обхода контура L выбирается так, чтобы область D , ограниченная им, оставалась слева:

- 1) $\vec{F} = (x-y^2) \vec{i} + 2xy \vec{j}$, $D: x^2 \leq y \leq x$;
- 2) $\vec{F} = 2(x^2 + y^2) \vec{i} + (x+y)^2 \vec{j}$, $D: \triangle ABC$,

A(1;1), B(2;2), C(1;3);

3) $\vec{F} = (x^2 - y^2) \cdot \vec{i} + (x^2 + y^2) \cdot \vec{j}$, D: $0 \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}$;

4) $\vec{F} = (x+y)^2 \cdot \vec{i} - (x-y)^2 \cdot \vec{j}$, D: $0 \leq y \leq \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$;

5) $\vec{F} = (x+y) \cdot \vec{i} + (x-y) \cdot \vec{j}$, D: $x^2 \leq y \leq \sqrt{x}$;

6) $\vec{F} = -x^2 y \cdot \vec{i} + xy^2 \cdot \vec{j}$, D: $0 \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}$;

7) $\vec{F} = (x+y)^2 \cdot \vec{i} - (x^2 + y^2) \cdot \vec{j}$, D: ΔABC ,

A(0;0), B(1;0), C(0;1).

II. Проверить, является ли данное векторное поле $\vec{F}(M)$ потенциальным. Для непотенциального поля вычислить работу поля при перемещении материальной точки вдоль заданной линии BC. Для потенциального поля найти его потенциал $U = U(M)$, проверить, что $\vec{F} = \text{grad } U$, вычислить работу поля при перемещении материальной точки из B в C, используя потенциал поля:

1) а) $\vec{F} = (y+z) \cdot \vec{i} + (x+z) \cdot \vec{j} + (x+y) \cdot \vec{k}$,

б) $\vec{F} = (y^2 - z^2) \cdot \vec{i} + 2yz \cdot \vec{j} - x^2 \cdot \vec{k}$,

BC: $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$, B(0;0;0), C(1;1;1);

2) а) $\vec{F} = 2xyz \cdot \vec{i} + x^2 z \cdot \vec{j} + x^2 y \cdot \vec{k}$,

б) $\vec{F} = xy \cdot \vec{i} + z \cdot y \cdot \vec{j} + z \cdot x \cdot \vec{k}$,

BC: $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=1$, B(1;0;1), C(0;1;1);

3) а) $\vec{F} = y \cdot \vec{i} + x \cdot \vec{j} + e^z \cdot \vec{k}$,

б) $\vec{F} = xz \cdot \vec{i} + 2xy \cdot \vec{j} + xyz \cdot \vec{k}$,

BC: отрезок прямой, B(1;1;1), C(0;0;0);

4) а) $\vec{F} = y \cdot \vec{i} + z \cdot \vec{j} + x \cdot \vec{k}$,

б) $\vec{F} = e^x \sin y \cdot \vec{i} + e^x \cos y \cdot \vec{j} + \vec{k}$,

BC: $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=t$, B(1;0;0), C(1;0;2\pi);

5) а) $\vec{F} = (2x+y) \cdot \vec{i} + xy \cdot \vec{j} + (2y-z) \cdot \vec{k}$,

б) $\vec{F} = (yz+1) \cdot \vec{i} + xz \cdot \vec{j} + xy \cdot \vec{k}$,

BC: отрезок прямой, B(2;3;4), C(3;5;7);

6) а) $\vec{F} = (2x+y) \cdot \vec{i} + (2y+z) \cdot \vec{j} + (2z+x) \cdot \vec{k}$,

б) $\vec{F} = yz \cdot \vec{i} + xz \cdot \vec{j} + xy \cdot \vec{k}$,

BC: $x=2t$, $y=t^2$, $z=3t$, B(2;1;3), C(-2;1;-3);

$$7) \text{ а) } \vec{F} = (2xy+z) \cdot \vec{i} + (x^2-2y) \cdot \vec{j} + x \cdot \vec{k},$$

$$\text{б) } \vec{F} = y \vec{i} + x \cdot \vec{j} + (x+y+z) \cdot \vec{k},$$

BC: отрезок прямой, B(2;3;4), C(3;4;5).

1.3. Упражнения уровня А

1. Найти вид годографа векторной функции $\vec{a}(t)$, если:
1) $\vec{a}(t)$ изменяется только по модулю, 2) $\vec{a}(t)$ изменяется только по направлению.

2. Найти дифференциал $d\vec{a}(t)$ векторной функции $\vec{a}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ в произвольной точке t . Каков геометрический смысл производной $\vec{a}'(t)$, дифференциала $d\vec{a}(t)$?

3. Поверхность S задана уравнением $\Phi(x; y; z) = 0$. Показать, что единичный вектор нормали к поверхности S в точке M_0 равен:

$$\vec{n}_0 = \pm \frac{\text{grad } \Phi(x; y; z)}{|\text{grad } \Phi(x; y; z)|} \Big|_{M_0}.$$

Чему равен вектор $\vec{n}_0$, если поверхность S задана уравнением $z = f(x; y)$ (или $x = \varphi(z; y)$, или $y = \psi(x; z)$)?

4. Поток векторного поля $\vec{F}(M)$ через замкнутую поверхность S в направлении внешней нормали к S 1) равен нулю, 2) больше нуля, 3) меньше нуля. Что можно сказать о наличии источников (стоков) в области V , ограниченной S ?

5. Векторное поле $\vec{F}(M)$ соленоидально в G , S - любая замкнутая поверхность в области G . Чему равен поток $\Pi_S(\vec{F})$? Ответ нужно обосновать.

6. Показать, что $\iint_S (\vec{r} \cdot \vec{n}) ds = 3V$, где V - объем области G , ограниченной замкнутой поверхностью S , $\vec{r}$ - радиус-вектор точки $M \in S$.

7. Показать, что площадь S плоской области D , ограниченной кусочно-гладким контуром L , можно найти при помощи любого из следующих трех интегралов:

$$S = \oint_L x dy, \quad S = -\oint_L y dx, \quad S = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx.$$

8. Проверить, что ротор векторного поля $\vec{F}(M) = \text{grad } u$ ($u = u(x; y; z)$) тождественно равен нулю.

9. Пусть $u = u(x; y; z)$ и $v = v(x; y; z)$ - дифференцируемые функции. Показать, что

$$\text{grad}(\lambda u) = \lambda \cdot \text{grad } u \quad (\lambda = \text{const}),$$

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}(u+v) &= \operatorname{grad} u + \operatorname{grad} v, \\ \operatorname{grad}(u \cdot v) &= v \cdot \operatorname{grad} u + u \cdot \operatorname{grad} v, \\ \operatorname{grad}\left(\frac{u}{v}\right) &= \frac{v \operatorname{grad} u - u \operatorname{grad} v}{v^2} \quad (v \neq 0).\end{aligned}$$

1.4. Вопросы уровня Б

1. Вывод формулы для вычисления производной по направлению.
2. Доказательство свойств градиента скалярного поля.
3. Инвариантное определение дивергенции, ее свойства (с доказательством).
4. Инвариантное определение ротора, его свойства (с доказательством).
5. Вычисление потока векторного поля путем проектирования поверхности на одну координатную плоскость.
6. Вычисление потока векторного поля путем проектирования поверхности на все три координатные плоскости.
7. Доказательство свойств потенциального поля.
8. Вывод формулы Грина.
9. Оператор Гамильтона и правила его применения.
10. Гармоническое поле. Уравнение Лапласа. Оператор Лапласа,
11. Определение гармонической функции.
12. Формулировка теоремы о разложении произвольного векторного поля на сумму потенциального и соленоидального векторных полей.

1.5. Задачи уровня Б

1. Найти годограф векторной функции $\vec{a}(t)$:

$$1) \vec{a}(t) = 4 \cos t \cdot \vec{i} - \vec{j} + 3 \sin t \cdot \vec{k},$$

$$2) \vec{a}(t) = \frac{2t}{t^2+2} \cdot \vec{i} + \frac{2t}{t^2+2} \cdot \vec{j} + \frac{t^2-2}{t^2+2} \cdot \vec{k}.$$

2. Точка, находящаяся на нарезе винта, заворачиваемого в балку, описывает винтовую линию: $x = a \cos \varphi$, $y = a \sin \varphi$, $z = h \cdot \varphi$, где φ — угол поворота винта, a — радиус винта, h — высота подъема при повороте на один радиан. Вычислить величину скорости ($|\vec{v}|$) движения точки.

3. Найти линии уровня скалярного поля u , заданного

неявно уравнением $u + x \cdot \ln u + y = 0$.

4. Найти поверхности уровня скалярного поля u :

1) $u = \arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;

2) $u = \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{\vec{b} \cdot \vec{r}}$ ($\vec{a}$ и $\vec{b}$ - постоянные векторы, $\vec{r}$ - радиус-вектор точки $M(x; y; z)$, $\vec{a} = \{a_1; a_2; a_3\}$, $\vec{b} = \{b_1; b_2; b_3\}$).

5. Найти единичные векторы нормали к поверхности уровня скалярного поля $u(M)$ в точке M_0 , направленные в сторону возрастания (убывания) поля:

1) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $M_0(1; -2; 2)$;

2) $u = x^2 + 2xy - 4yz$, $M_0(1; 1; -1)$.

6. Убедиться в ортогональности линий (поверхностей) уровня полей:

1) $u = x^2 - y^2$, $v = x \cdot y$;

2) $u = 2x^2 + y^2$, $v = y^2/x$;

3) $u = x^2 + y^2 - z^2$, $v = xz + yz$.

7. Найти производную поля $u = \ln(1 + x^2y^2) + z^2$ в точке $M(-1; 0; 3)$ в направлении нормали к поверхности $x^2 + 2xy - z + 2 = 0$, образующей острый угол с положительным направлением оси Oz .

8. Найти векторные линии поля $\vec{F}(M)$:

1) $\vec{F}(M) = \frac{x}{z} \cdot \vec{i} + \frac{y}{z} \cdot \vec{j} + \frac{1}{z} \cdot \vec{k}$;

2) $\vec{F}(M) = (y - z) \cdot \vec{i} + (z - x) \cdot \vec{j} + (x - y) \cdot \vec{k}$. $\frac{q \cdot \vec{r}}{4\pi r^3}$

9. Вычислить дивергенцию вектора индукции $\vec{D} = \frac{q \cdot \vec{r}}{4\pi r^3}$ электрического поля, образованного электрическим зарядом q , помещенным в начало координат (см. прил. 2).

10. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{F}(M)$ вдоль контура L :

1) $\vec{F}(M) = (z - x^2) \cdot \vec{i} + (x^2 - y^2) \cdot \vec{j} + (y - z^2) \cdot \vec{k}$, $L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases}$;

2) $\vec{F}(M) = y \vec{i} + z \vec{j} + x \vec{k}$, L - линия пересечения части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, находящейся в I-ом октанте, с координатными плоскостями. Направление обхода L - против часовой стрелки.

II. Вычислить поток векторного поля $\vec{F}(M)$ через поверхность S :

1) $\vec{F}(M) = (4y - z) \cdot \vec{i} + (3x + 5y) \cdot \vec{j} + (4x - z) \cdot \vec{k}$,

S : часть плоскости $x+y+z=8$, лежащей в I-ом октанте; вектор нормали $\vec{n}$ к поверхности S составляет острый угол с осью Oz ;

$$2) \vec{F}(M) = -\sqrt{x} \cdot \vec{i} + yz \cdot \vec{j} + \vec{k},$$

S : часть поверхности цилиндра $z^2=4x$, вырезанная конусом $z^2=4(x^2+y^2)$; вектор нормали $\vec{n}$ направлен в сторону выпуклости цилиндра;

$$3) \vec{F}(M) = x^3 \cdot \vec{i} + y^3 \cdot \vec{j} + z^3 \cdot \vec{k},$$

S : боковая поверхность конуса $x^2+y^2=\frac{R^2}{H^2} \cdot z^2$, отсеченного плоскостью $z=H$ ($H>0$); вектор нормали $\vec{n}$ составляет с осью Oz тупой угол;

$$4) \vec{F}(M) = 4y \cdot \vec{i} + 5z \cdot \vec{j} - 2x \cdot \vec{k},$$

S : часть поверхности параболоида $z=x^2+y^2$, заключенная внутри цилиндра $x^2+y^2=4x$; вектор нормали $\vec{n}$ составляет с осью Oz острый угол;

$$5) \vec{F}(M) = |\vec{r}| \cdot \vec{r},$$

S : часть полусферы $x^2+y^2+z^2=1$ ($z>0$), вырезанная цилиндром $x^2+y^2=y$; вектор нормали $\vec{n}$ составляет с осью Oz острый угол.

12. Вычислить поток ротора векторного поля $\vec{F}=y\vec{i}+z\vec{j}+x\vec{k}$ через поверхность параболоида $z=2(1-x^2-y^2)$, отсеченную плоскостью $z=0$, в направлении внешней нормали двумя способами: 1) непосредственно, 2) используя теорему Стокса.

13. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{F}=y\vec{i}-x\vec{j}+z\vec{k}$ вдоль линии пересечения части параболоида $x^2+z^2=1-y$, находящейся в первом октанте, с координатными плоскостями в направлении от точки пересечения параболоида с осью Ox к точке пересечения его с осью Oy двумя способами: 1) непосредственно, 2) используя теорему Стокса.

1.6. Упражнения уровня Б

1. Пусть скалярное поле задано функцией $u=f(r)$, где r - длина радиуса-вектора точки M поля. Найти уравнения поверхностей уровня поля (или линий уровня для плоского поля). Такие поля называют центрально-симметричными. Почему? Привести пример центрально-симметричного поля.

2. Показать, что для поля $u=f(r)$ из упр.1 имеем $\text{grad } u = f'(r) \cdot (\vec{r}/r)$.

3. Показать, что циркуляция линейной скорости жидкости, вращающейся по окружности, пропорциональна угловой скорости вращения ω и площади круга, охватываемого при этом вращении.

4. Напряженность электростатического поля, образованного точечным зарядом величины q , помещенным в начало координат, является векторным полем, определяемым формулой

$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (r \neq 0)$. Показать, что это поле потенциально, и найти его потенциал.

5. Показать, что поле вектора $\vec{E}$ из упр.4 является гармоническим.

6. Показать, что потенциал поля сил тяготения, возникающего в пространстве, окружающем некоторую точечную массу, равен $u = \frac{k}{r}$ ($k = \text{const}$) и что поле сил тяготения гармоническое.

7. С помощью оператора Гамильтона доказать свойства градиента, дивергенции и ротора.

8. С помощью оператора Гамильтона доказать следующие тождества:

$$1) \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F}) = 0, \quad 2) \operatorname{rot}(\operatorname{grad} u) = 0,$$

$$3) \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \Delta u \quad (\Delta - \text{оператор Лапласа}).$$

9. Определить оператор Лапласа для векторной функции $\vec{F} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ и показать, что $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{F}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{F}) - \Delta \vec{F}$.

10. Доказать утверждение: для того, чтобы плоскопараллельное векторное поле $\vec{F} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$, определенное в некоторой односвязной области D , было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad (x, y) \in D$, т.е. выражение $Pdx + Qdy$ являлось полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$, $du = Pdx + Qdy$. Показать, что $u(x, y)$ - потенциал данного векторного поля.

11. Доказать утверждение: для того, чтобы плоскопараллельное векторное поле $\vec{F} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$, определенное в некоторой односвязной области D , было соленоидальным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение

$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\partial Q}{\partial y}, \quad (x, y) \in D$ т.е. выражение $-Qdx + Pdy$ являлось

полным дифференциалом некоторой функции $V(x, y)$: $dV = -Qdx + Pdy$.
Функция $V(x, y)$ называется силовой функцией данного векторного поля.

12. Показать, что если $V(x, y)$ — силовая функция векторного поля $\vec{F}(M) = P \cdot \vec{i} + Q \cdot \vec{j}$ (см. упр. II), то $V(x, y) = C$ — векторные линии этого поля.

1.7. Упражнения уровня C

1. Пусть скалярное поле задано функцией $u = f(\vec{r})$, где $\vec{r}$ — радиус-вектор точки M поля. Показать, что $d f(\vec{r}) = \text{grad} f(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$.

2. Найти вид векторных трубок поля $\vec{F}(M) = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$.
Примечание: векторной трубкой называется поверхность, образованная векторными линиями поля, проходящими через точки некоторой (лежащей в поле) замкнутой кривой, не совпадающей даже частично с какой-либо векторной линией.

3. Поток векторного поля $\vec{F}(M)$, $M \in G$ через какое-нибудь сечение векторной трубки (см. упр. 2) называется интенсивностью этой трубки. Показать, что если поле соленоидально, то интенсивность любой векторной трубки постоянна вдоль всей трубки.

4. Доказать следующее утверждение: для того, чтобы векторное поле $\vec{F}(M)$, $M \in G$ было соленоидальным, необходимо и достаточно, чтобы оно было полем ротора некоторого вектора $\vec{B}(M)$: $\vec{F}(M) = \text{rot} \vec{B}(M)$, $M \in G$.

5. Доказать, что во всюду непрерывном потенциальном векторном поле $\vec{F}(M)$, $M \in G$ векторные линии не могут быть замкнуты.

6. Если в плоском потенциальном векторном поле $\vec{F}(M)$, $M \in D$ есть точки, в которых поле теряет свойство непрерывности (особые точки), то циркуляция по замкнутому контуру L , окружающему такую точку, может быть отлична от нуля (значение $\mathcal{U}_L(\vec{F})$ называется циклической постоянной поля относительно данной точки).

Показать, что значение $\mathcal{U}_L(\vec{F})$ не будет зависеть от формы контура L ; найти особую точку и ее циклическую постоянную для поля магнитной напряженности $\vec{H} = \frac{I}{2\pi r^2} (-y \vec{i} + x \vec{j})$ (см. прил. 2).

7. Показать, что потенциал плоского векторного поля,

имеющего особые точки (см. упр.6), будет многозначной функцией.

8. Пусть плоское векторное поле $\vec{F} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$, определенное в некоторой односвязной области D , является гармоническим, а $u(x,y)$ - потенциал поля, $v(x,y)$ - силовая функция поля (см. упр. 10, II уровня Б). Показать, что функция $f(z) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$ (она называется комплексным потенциалом поля) будет аналитической в области D .

9. Пусть $f(z) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$ - комплексный потенциал плоского векторного поля $\vec{F}(M)$, $M \in D$ (см. упр.8). Показать, что семейства линий $u(x,y) = c$, $v(x,y) = \bar{c}$ ортогональны в любой точке области D , которая не является особой для этих линий.

10. На проводе, длина которого l , содержится q единиц электрического заряда, распределенного равномерно. Показать, что поле электрической напряженности $\vec{E}$, создаваемое этими зарядами, является плоскопараллельным, найти векторные линии поля, линии и поверхности равного потенциала; показать, что комплексный потенциал поля равен

$$f(z) = -\frac{q}{2\pi l \epsilon} \cdot i \ln(z - z_0) + C,$$

где i - мнимая единица, z - комплексная переменная, $z_0 = x_0 + i y_0$ - точка, через которую проходит ось провода, $C = c_1 + i c_2$ - постоянная.

11. Пусть плоское течение жидкости обусловлено наличием единственного точечного источника интенсивности Q , расположенного в начале координат, а вихри отсутствуют. Найти комплексный потенциал поля скоростей текущей жидкости.

12. Пусть плоское течение жидкости вызвано одиночным вихрем интенсивности $\mathcal{L}$, расположенным в начале координат. Найти комплексный потенциал поля скоростей текущей жидкости.

13. В упр. 11 (12) рассмотреть случай, когда течение жидкости вызвано несколькими источниками (вихрями) интенсивности $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ ($\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \dots, \mathcal{L}_n$), расположенными в точках $z_1, z_2, \dots, z_n$.

14. Дан комплексный потенциал $f(z) = \frac{1}{z^2}$ плоского электростатического поля. Найти вектор напряженности поля, его силовые линии, линии равного потенциала.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ И РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

2.1. Векторная функция действительной переменной (A)

Если каждому значению действительной переменной t из области допустимых значений $T \subset R$ поставлен в соответствие вектор $\vec{a}(t)$, то говорят, что на множестве T задана векторная функция (вектор-функция) действительной переменной, и записывают: $\vec{a} = \vec{a}(t)$, $t \in T$.

Если в пространстве задана декартова система координат $Oxyz$, то вектор-функцию $\vec{a}(t)$ можно задать в виде

$$\vec{a} = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} + z(t) \cdot \vec{k}, \quad t \in T, \quad (I)$$

где x, y, z - координаты вектора $\vec{a}$.

Таким образом, задание вектор-функции $\vec{a}(t)$ равносильно заданию трех скалярных функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

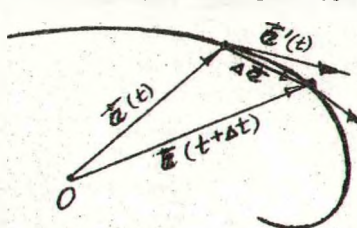


Рис.2

Годографом вектор-функции $\vec{a}(t)$ называется линия, описанная концом вектора $\vec{a}$ при изменении t , когда начало вектора $\vec{a}$ находится в фиксированной точке O пространства (рис.2). Точка O называется полем годографа. Обычно полюс выбирают в начале координат, и

тогда параметрические уравнения годографа вектор-функции (I) имеют вид:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t \in T. \quad (2)$$

Производной вектор-функции $\vec{a}(t)$ по аргументу t называется новая вектор-функция

$$\vec{a}'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{a}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t}.$$

Если $\vec{a}(t) = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} + z(t) \cdot \vec{k}$, то

$$\vec{a}'(t) = x'(t) \cdot \vec{i} + y'(t) \cdot \vec{j} + z'(t) \cdot \vec{k}. \quad (3)$$

Производная $\vec{a}'(t)$ (обозначается также $\frac{d\vec{a}}{dt}$) является вектором, касательным к годографу функции $\vec{a}(t)$, направленным в сторону, соответствующую возрастанию параметра t (рис.2).

Производная от $\vec{a}'(t)$ называется второй производной

вектор-функции $\vec{a}(t)$. Она обозначается $\vec{a}''(t)$ (или $\frac{d^2\vec{a}}{dt^2}$) и равна

$$\vec{a}''(t) = x''(t) \cdot \vec{i} + y''(t) \cdot \vec{j} + z''(t) \cdot \vec{k}. \quad (4)$$

Аналогично определяются и вычисляются производные более высоких порядков от вектор-функции $\vec{a}(t)$.

С векторной функцией скалярного аргумента особенно часто приходится иметь дело в кинематике при изучении движения точки. Радиус-вектор движущейся точки является функцией времени: $\vec{r} = \vec{r}(t)$ (уравнение движения); годограф этой функции есть траектория, $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ - вектор скорости, $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{w}$ - вектор ускорения движущейся точки.

З а д а ч и

1. Найти траекторию, скорость и ускорение точки, движущейся по закону $\vec{r} = t \cdot \vec{i} + (4t - t^2) \cdot \vec{j} + 3\vec{k}$. Построить 1) траекторию, 2) векторы скорости и ускорения при $t = 3$.

Решение. Запишем параметрические уравнения (2) траектории

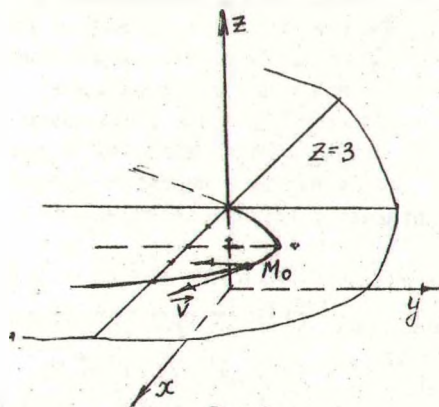


Рис.3

движущейся точки (годографа данной вектор-функции): $x = t, y = 4t - t^2, z = 3$.

Исключив параметр t из первых двух уравнений, получим уравнение параболы

$$y = 4x - x^2.$$

Следовательно, траекторией движения является парабола (L) - линия пересечения поверхностей $z = 3$ и $y = 4x - x^2$ (рис.3).

Найдем скорость и ускорение в произвольный момент времени t . Они равны: $\vec{v} = \vec{r}'(t) = \vec{i} + (4 - 2t) \cdot \vec{j}$, $\vec{w} = \vec{r}''(t) = -2\vec{j}$. В момент $t = 3$ векторы скорости и ускорения равны: $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j}$, $\vec{w} = -2\vec{j}$. Из параметрических уравнений траектории найдем координаты движущейся точки в момент $t = 3$: $x = 3, y = 3, z = 3$, т.е. получим точку $M_0(3;3;3)$. На рис.3 изображены траектория движущейся точки и векторы скорости и ускорения при $t = 3$.

2.2. Скалярное поле. Поверхности и линии уровня (А)

Если в каждой точке M пространства или его части определено значение некоторой величины, то говорят, что задано поле данной величины. Поле называется скалярным, если рассматриваемая величина скалярна, т.е. вполне характеризуется своим числовым значением.

Примеры скалярных полей: поле температур, поле давлений, поле плотности зарядов, поле плотности масс и т.д.

Скалярное поле может быть задано скалярной функцией точки M и времени t : $u = u(M, t)$, $M \in G$; такое поле называется нестационарным. Если функция u не зависит от времени, то поле называется стационарным: $u = u(M)$, $M \in G$. В дальнейшем мы будем рассматривать только стационарные поля.

Если в пространстве введена декартова система координат $Oxyz$, то скалярное поле может быть задано функцией $u = u(x, y, z)$.

Поверхность, на которой функция $u(x, y, z)$ принимает постоянное значение, называется поверхностью (равного) уровня скалярного поля.

Уравнение поверхности уровня имеет вид $u(x, y, z) = C$, $C = \text{const}$. Придавая C различные значения, получим семейство поверхностей уровня данного скалярного поля.

Например, в случае поля температур, создаваемого в однородной и изотропной среде точечным источником тепла, поверхностями уровня являются сферы с центром в источнике.

Скалярное поле называется плоским (плоскопараллельным), если существует некоторая плоскость такая, что во всех плоскостях, ей параллельных, скалярное поле будет одним и тем же.

Если указанную плоскость принять за плоскость Oxy , то скалярное поле определится функцией $u = u(x, y)$, $(x, y) \in D$.

Примером плоского скалярного поля может служить поле температур бесконечной равномерно нагретой нити.

Линия, в каждой точке которой функция $u(x, y)$ принимает одно и то же значение, называется линией (равного) уровня скалярного поля $u = u(x, y)$, $(x, y) \in D$. Уравнение линии уровня имеет вид: $u(x, y) = C$ ($C = \text{const}$).

З а д а ч а

1. Найти уравнения линий уровня скалярного поля $u = x + y$;

записать уравнение линии уровня, проходящей через точку $M_0(2;1)$. Сделать рисунок.

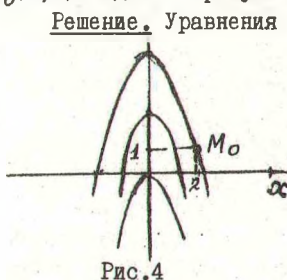


Рис. 4

Решение. Уравнения линий равного уровня скалярного поля $u=u(x,y)$ имеют вид $u(x,y)=C$. Если линия уровня проходит через точку $M_0(x_0;y_0)$, то $C=u(x_0;y_0)$. Следовательно, линиями уровня поля $u=x^2+y$ является семейство парабол $y=C-x^2$ (рис. 4). Так как $u(2;1)=5$, то через точку $M_0(2;1)$ проходит линия уровня $y=5-x^2$ (рис. 4).

2. Найти уравнения поверхностей равного уровня поля электростатического потенциала, созданного одним точечным зарядом q .

Решение. Потенциал электростатического поля в точке M определяется формулой $u=q/4\pi\epsilon \cdot r$ (см. прилож. 2), где r - расстояние от точки M до точки M_0 , в которой помещен заряд.

Если рассматривать это поле в системе прямоугольных координат $Oxyz$, то

$$u(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon \cdot \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}}, \quad (M_0(x_0; y_0; z_0))$$

и уравнения поверхностей равного уровня этого поля имеют вид:

$$\frac{q}{4\pi\epsilon \cdot \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} = C \quad (C > 0),$$

или

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = \frac{4\pi\epsilon \cdot q}{C}.$$

Поверхности уровня представляют собой концентрические сферы с центром в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и радиусом $r = \sqrt{4\pi\epsilon q/C}$, обратно пропорциональным значению потенциала $u=C$ на соответствующей сфере.

2.3. Производная по направлению и градиент скалярного поля (A)

При изучении любого физического явления, характеризуемого скалярной функцией $u=u(M)$, важно знать скорость изменения функции u при переходе от одной точки поля к другой.

Пусть заданы скалярное поле функцией $u=u(M)$, точка M_0 и некоторое направление $\vec{e}$. Возьмем в поле другую точку M так, чтобы вектор $\vec{M_0M} \parallel \vec{e}$. Обозначим через $\Delta_e u = u(M) - u(M_0)$,

и $\Delta \ell = |\overrightarrow{M_0 M}|$.

Отношение $\frac{\Delta \ell u}{\Delta \ell}$ определяет среднюю скорость изменения скалярного поля на единицу длины по данному направлению. Будем стремиться точку M к точке M_0 , так, чтобы $\overrightarrow{M_0 M} \uparrow \vec{e}$ и при этом $\Delta \ell \rightarrow 0$.

Определение. Если существует при $\Delta \ell \rightarrow 0$ предел отношения $\frac{\Delta \ell u}{\Delta \ell}$, то его называют производной поля (функции) $u(M)$ в точке M_0 по направлению $\vec{e}$ и обозначают $\frac{\partial u}{\partial \vec{e}}$:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{e}} = \lim_{\Delta \ell \rightarrow 0} \frac{\Delta \ell u}{\Delta \ell}.$$

Пусть в пространстве введена декартова система координат $Oxyz$ и функция $u(x, y, z)$ дифференцируема в точке M_0 . Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{e}} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma, \quad (5)$$

где $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ - направляющие косинусы вектора $\vec{e}$, а частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ вычислены в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$.

Для плоского поля, заданного функцией $u = u(x, y)$, производная по направлению $\vec{e}$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ будет равна

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{e}} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta \quad (\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha), \quad (6)$$

где α - угол, образованный вектором $\vec{e}$ с осью Ox .

Следует отметить, что сами частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ являются производными поля u по направлению координатных осей Ox, Oy, Oz соответственно.

С производной по направлению тесно связана такая характеристика скалярного поля, как градиент.

Определение. Градиентом скалярного поля $u = u(x, y, z)$ в данной точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$ называется вектор, обозначаемый символом $\text{grad } u(M_0)$ и определяемый равенством

$$\text{grad } u(M_0) = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \vec{k} \quad (7)$$

(здесь частные производные вычислены в точке M_0).

В случае плоского поля, заданного функцией $u(x, y)$, формула (7) преобразуется к виду

$$\text{grad } u(M_0) = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \vec{j}. \quad (8)$$

Основные свойства $\text{grad } u$:

1) производная поля $u(M)$ в точке M_0 по направлению $\vec{e}$ равна скалярному произведению вектора $\text{grad } u(M_0)$ на единичный вектор $\vec{e}_0$ этого направления, т.е. $\frac{\partial u}{\partial \vec{e}} = \text{grad } u(M_0) \cdot \vec{e}_0$.

2) производная поля $u(M)$ в точке M_0 по направлению $\vec{e}$ равна проекции вектора $\text{grad } u(M_0)$ на направление $\vec{e}$, т.е. $\frac{\partial u}{\partial \vec{e}} = \text{pr}_{\vec{e}} \text{grad } u(M_0)$.

3) вектор $\text{grad } u(M_0)$ задает направление, а его длина - величину максимального роста поля $u(M)$ в точке M_0 ;

4) вектор $\text{grad } u(M_0)$ направлен по нормали к поверхности уровня $u(M)=c$, проходящей через точку M_0 .

З а д а ч а

1. Найти производную поля $u = xyz$ в точке $M_0(5;1;2)$ в направлении $\vec{e}$, если: 1) вектор $\vec{e} = \vec{M_0M_1}$, где $M_1(9;4;14)$, 2) вектор $\vec{e}$ составляет с осью Ox угол $\alpha = 60^\circ$, с осью Oz угол $\gamma = 45^\circ$ и тупой угол с осью Oy .

Решение. 1) Найдем направляющие косинусы вектора $\vec{e}$:

$$\vec{e} = \vec{M_0M_1} = \{4; 3; 12\}, \quad |\vec{e}| = \sqrt{4^2 + 3^2 + 12^2} = 13;$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{13}, \quad \cos \beta = \frac{3}{13}, \quad \cos \gamma = \frac{12}{13}.$$

Найдем частные производные функции $u = xyz$ и их значения в точке $M_0(5;1;2)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yz \Big|_{M_0} = 2; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = xz \Big|_{M_0} = 10; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = xy \Big|_{M_0} = 5.$$

Подставив полученные значения частных производных и направляющих косинусов в формулу (5), найдем искомое значение производной:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{e}} = 2 \cdot \frac{4}{13} + 10 \cdot \frac{3}{13} + 5 \cdot \frac{12}{13} = \frac{98}{13} = 7 \frac{7}{13}.$$

б) Найдем направляющие косинусы вектора $\vec{e}$. Имеем $\cos \alpha = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos \gamma = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Используя свойство направляющих косинусов $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ и условие, что β - тупой угол, найдем $\cos \beta$:

$$\cos \beta = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \gamma} = -\sqrt{1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}.$$

Подставляя в формулу (5) полученные значения направляющих косинусов и вычисленные в п. а) значения частных производных, найдем требуемое значение производной $\frac{\partial u}{\partial \vec{e}}$:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{e}} = 2 \cdot \frac{1}{2} + 10 \left(-\frac{1}{2}\right) + 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2} - 4.$$

2. Найти направление и скорость наибыстрейшего возрастания поля $u = \sqrt{x^2 + 4y^2 + z^2}$ в точке $M_0(2; 3; -1)$.

Решение. Направление наибыстрейшего возрастания поля $u(M)$ в точке M_0 дает вектор $\text{grad } u(M_0)$, а скорость роста - его длина. Используя формулу (7), найдем $\text{grad } u$. Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4y^2 + z^2}} \Big|_{M_0} = \frac{2}{3}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{4y}{\sqrt{x^2 + 4y^2 + z^2}} = \frac{4}{3};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + 4y^2 + z^2}} \Big|_{M_0} = -\frac{1}{3},$$

следовательно, $\text{grad } u = \frac{1}{3}(2\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k})$, $|\text{grad } u| = \frac{\sqrt{17}}{3}$.

Таким образом, поле $u = \sqrt{x^2 + 4y^2 + z^2}$ в точке $M_0(2; 3; -1)$ растет с наибольшей скоростью, равной $\sqrt{17}/3$, в направлении вектора $\frac{1}{3}(2\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k})$.

2. 4. Векторное поле, векторные линии (A)

Векторным полем называется все пространство (или его часть), в каждой точке M которого в момент времени t определена векторная функция $\vec{F} = \vec{F}(t, M)$.

Как и скалярное поле, векторное поле может быть стационарным (не зависеть от времени) и нестационарным.

Физические примеры векторных полей: поле скоростей потока жидкости, описываемое вектором $\vec{V}$; поле тяготения, характеризующееся вектором силы тяготения $\vec{F}$; электрическое поле системы электрических зарядов, характеризующееся вектором напряженности $\vec{E}$ и т.д.

Если в пространстве задана прямоугольная система координат $Oxyz$, то векторное поле $\vec{F}(M)$ описывается вектор-функцией трех переменных $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ или тремя скалярными функциями $\vec{F} = P(x, y, z) \cdot \vec{i} + Q(x, y, z) \cdot \vec{j} + R(x, y, z) \cdot \vec{k}$.

Удобной геометрической характеристикой векторного поля $\vec{F}(M)$ являются векторные линии - кривые, в каждой точке M которой вектор $\vec{F}(M)$ направлен по касательной к этой кривой.

Векторные линии поля тяготения, электрического и магнитного полей называются силовыми линиями, а поля скоростей - линиями тока.

На рис.5 а) показаны векторные линии электростатического поля, создаваемого двумя точечными зарядами противо-

положительных знаков.

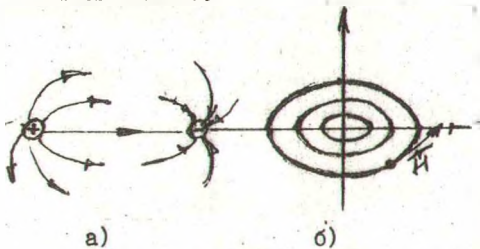


Рис.5

На рис.5 б) изображены векторные линии напряженности $\vec{H}$ магнитного поля, создаваемого прямолинейным проводником с током. Это концентрические окружности с центром на оси провод-

ника, лежащие в плоскостях, перпендикулярных проводнику.

Точки векторного поля, в которых начинаются (оканчиваются) векторные линии, называются источниками (стоками) поля (рис.5 а).

Точки векторного поля, которые окружены замкнутыми векторными линиями и через которые не проходит ни одна векторная линия, называются вихревыми точками поля (рис.5 б).

Линия, каждая точка которой является вихревой, называется вихревой линией поля.

Пусть векторная линия, проходящая через точку М, описывается уравнением $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Запишем условие коллинеарности вектора поля $\vec{F} = \{P, Q, R\}$ и вектора $d\vec{r} = \{dx; dy; dz\}$, касательного к векторной линии:

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)} \quad (9)$$

Проинтегрировав систему дифференциальных уравнений (9), получим уравнение векторной линии в координатной форме.

Если в области G поля $\vec{F} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка по координатам и не обращаются в ноль одновременно, то для системы (9) выполнены в G условия существования и единственности решения, т.е. через каждую точку поля проходит единственная векторная линия. Точки поля, в которых нарушаются указанные условия, являются особыми точками системы (и поля). Это, как указывалось раньше, источники, стоки и вихревые точки поля.

Задачи

1. Найти векторные линии и особые точки поля линейных

скоростей точек твердого тела, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω .

Решение. Выберем декартову систему координат в пространстве таким образом, чтобы ось Oz совпадала с направлением оси вращения (рис.6).

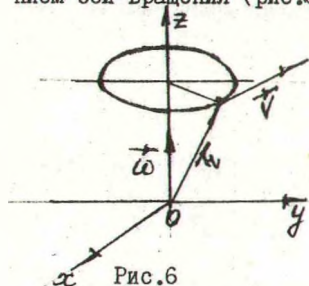


Рис.6

Обозначим через $\tilde{\omega}$ вектор угловой скорости, величина которого равна ω , а направление совпадает с направлением оси Oz : $\tilde{\omega} = \omega \cdot \vec{k} = \{0; 0; \omega\}$.

Тогда линейная скорость $\vec{v}$ в точке $M(x; y, z)$ будет равна: $\vec{v} = \tilde{\omega} \times \vec{r}$, где $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ — радиус-вектор точки M , т.е.

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\omega y \vec{i} + \omega x \vec{j}.$$

Поле вектора $\vec{v}$ является плоскопараллельным. Для данного поля $P(x; y, z) = -\omega y$, $Q(x; y, z) = \omega x$, $R(x; y, z) = 0$ и система (9) для нахождения уравнений векторных линий имеет вид:

$$\frac{dx}{-\omega y} = \frac{dy}{\omega x} = \frac{dz}{0}.$$

Решая эту систему, получим

$$\begin{cases} x dx = -y dy \\ dz = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = c_1, (c_1 > 0) \\ z = c \end{cases}$$

Таким образом, векторные линии поля линейных скоростей $\vec{v} = -\omega y \vec{i} + \omega x \vec{j}$ — это концентрические окружности, лежащие в плоскостях, перпендикулярных оси вращения (оси Oz), с центром на оси вращения (рис.6).

Найдем особые точки данного поля. Так как функции $P(x; y, z) = -\omega y$, $Q(x; y, z) = \omega x$, $R(x; y, z) = 0$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные при любых x, y, z , то особыми точками будут лишь те, где P , Q и R одновременно обращаются в ноль. Это возможно, когда $x=0, y=0$, а z — любое, т.е. особые точки поля — это точки, лежащие на оси Oz . Векторные линии не проходят через особые точки, а ок-

ружают их, т.е. это вихревые точки поля.

Часть оси Oz , принадлежащая полю, является вихревой линией этого поля.

2. Найти векторную линию поля $\vec{F} = -y\vec{i} + x\vec{j} + b\vec{k}$, проходящую через точку $M_0(1;0;0)$.

Решение. Система (9) дифференциальных уравнений для векторных линий данного поля имеет вид:

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{b}.$$

Решаем эту систему:

$$\begin{cases} \frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} \\ \frac{dy}{x} = \frac{dz}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xdx = -ydy \\ \frac{dy}{x} = \frac{dz}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = C_1 \quad (C_1 > 0) \\ \frac{dy}{x} = \frac{dz}{b} \end{cases}$$

Введем параметр t следующим образом: $x = \sqrt{C_1} \cos t$, $y = \sqrt{C_1} \sin t$. Тогда второе уравнение системы преобразуется к виду:

$$\frac{dy}{x} = \frac{dz}{b} \rightarrow \frac{\sqrt{C_1} \cos t dt}{\sqrt{C_1} \cos t} = \frac{dz}{b},$$

или $dz = b dt$, т.е. $z = bt + C_2$.

Окончательно получаем, что параметрические уравнения векторных линий будут иметь вид: $x = \sqrt{C_1} \cos t$, $y = \sqrt{C_1} \sin t$, $z = bt + C_2$.

Нетрудно убедиться в том, что точке $(1;0;0)$ соответствует значение параметра $t=0$. Полагая в параметрических уравнениях линии $t=0$, $x=1$, $z=0$, найдем C_1 и C_2 . Получим $C_1=1$, $C_2=0$.

Таким образом, параметрические уравнения векторной линии, проходящей через точку $(1;0;0)$, будут иметь вид: $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = bt$ (винтовая линия).

2.5. Поток и дивергенция векторного поля. Теорема Гаусса-Остроградского (A)

Пусть векторное поле задано вектор-функцией

$$\vec{F}(M) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}, \quad (x,y,z) \in G, \quad (10)$$

и функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ и их частные производные 1-го порядка по координатам непрерывны в области G .

Пусть S - некоторая гладкая или кусочно-гладкая двусторонняя поверхность, у которой выбрана определенная сто-

рона (ориентированная поверхность).

Обозначим через $\vec{n}$ единичный вектор нормали к выбранной стороне поверхности S в произвольной ее точке, пусть $\vec{n} = \{\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma\}$.

Определение. Потоком $\Pi_S(\vec{F})$ векторного поля $\vec{F}(M)$ через ориентированную поверхность S называется поверхностный интеграл первого рода от скалярного произведения вектора $\vec{F}$ на единичный вектор нормали к поверхности:

$$\Pi_S(\vec{F}) = \iint_S (\vec{F} \cdot \vec{n}) ds = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds. \quad (II)$$

В случае замкнутой поверхности S обычно выбирают внешнюю нормаль $\vec{n}$, которая направлена вовне области, ограниченной поверхностью S .

Поверхностный интеграл (II) можно вычислить путем проецирования S на координатные плоскости и сведения (II) к двойному интегралу (см. п.п. 2.9, 2.10).

В случае, когда $\vec{F} \cdot \vec{n} = \kappa$ (const), вычисление (II) сводится к вычислению площади поверхности S (см. задачу I этого пункта).

Если S замкнутая поверхность, ограничивающая некоторую область V , интеграл (II) можно вычислить, используя формулу Гаусса-Остроградского (I4).

Основные свойства потока:

1. С изменением ориентации поверхности S поток меняет знак на противоположный: $\Pi_{S^+}(\vec{F}) = -\Pi_{S^-}(\vec{F})$;

2. $\Pi_S(a \cdot \vec{F}) = a \cdot \Pi_S(\vec{F})$;

3. $\Pi_S(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = \Pi_S(\vec{F}_1) + \Pi_S(\vec{F}_2)$;

4. $\Pi_{S_1 \cup S_2}(\vec{F}) = \Pi_{S_1}(\vec{F}) + \Pi_{S_2}(\vec{F})$.

Если $\vec{F}(M)$ — поле скоростей текущей несжимаемой жидкости, то интеграл (II) равен количеству жидкости, протекающей за единицу времени через поверхность S .

Если S замкнутая поверхность, то величина $\Pi_S(\vec{F})$ дает разность между количеством жидкости, вытекающей из области V , ограниченной S , и количеством жидкости, втекающей в эту область. Если $\Pi_S(\vec{F}) = 0$, то в область V жидкости втекает столько же, сколько и вытекает. Если $\Pi_S(\vec{F}) > 0$, то из области V жидкости вытекает больше, чем втекает, т.е. в области V имеются источники. Если же $\Pi_S(\vec{F}) < 0$, то из V

жидкости вытекает меньше, чем втекает, т.е. в области V имеются стоки.

Таким образом, поток $P_s(\vec{F})$ характеризует источники и стоки в V суммарно. По величине потока мы не можем судить о количестве в V источников (стоков), а иногда даже о их наличии. Например, если $P_s(\vec{F})=0$, то это может означать, что в V нет источников и стоков, а возможно, их несколько, но мощность источников равна мощности стоков.

В произвольном векторном поле поток вектора через замкнутую поверхность S также характеризует суммарную мощность источников и стоков в области V , ограниченной S .

Вопрос о наличии источника (стока) в отдельной точке поля позволяет решить такая характеристика поля, как дивергенция.

Дивергенция векторного поля $\vec{F}(M)$ обозначается $\text{div } \vec{F}$ и характеризует мощность источника ($\text{div } \vec{F} > 0$) или стока ($\text{div } \vec{F} < 0$), находящегося в точке M .

Если $\text{div } \vec{F} = 0$, то в точке M нет ни источника, ни стока.

Инвариантное определение дивергенции дано в п.2.II.

Если векторное поле задано векторной функцией (10), то дивергенция поля равна:

$$\text{div } \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \quad (12)$$

Дивергенция векторного поля есть скалярная функция точек поля. Приведенная ниже теорема устанавливает связь между потоком векторного поля и его дивергенцией.

Теорема Гаусса-Остроградского. Поток векторного поля $\vec{F}(M)$ через замкнутую поверхность S , лежащую в этом поле, в направлении ее внешней нормали, равен тройному интегралу по области V , ограниченной S , от дивергенции этого векторного поля, т.е.

$$\oint_S (\vec{F} \cdot \vec{n}) ds = \iiint_V \text{div } \vec{F} dv, \quad (13)$$

$$\text{или } \oint_S (\vec{F} \cdot \vec{n}) ds = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz. \quad (14)$$

Задачи

I. Вычислить поток вектора напряженности $\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{4\pi\epsilon r^3}$ точечного заряда q через сферу радиуса $r=a$ с центром в точке заряда.

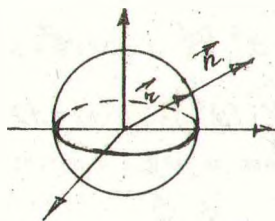


Рис.7

ле (II) получаем

$$\Pi_S(\vec{E}) = \oint_S (\vec{E} \cdot \vec{n}) ds = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \oint_S ds = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \cdot 4\pi a^2 = \frac{q}{\epsilon}.$$

Следовательно, поток вектора напряженности $\vec{E}$ через поверхность сферы равен q/ϵ и не зависит от величины радиуса сферы.

2. Проверить, являются ли источниками или стоками точки $M_1(1;1;1)$, $M_2(1;2;1)$, $M_3(0;3;1)$ векторного поля $\vec{F} = 2xy\vec{i} + (x-y)\vec{j} - xz^3\vec{k}$.

Решение. Имеем: $P=2xy$, $Q=x-y$, $R=-xz^3$. По формуле (12) найдем $\text{div}\vec{F}$:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 2y, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = -3xz^2, \quad \text{div}\vec{F} = 2y - 1 - 3xz^2.$$

Найдем значения дивергенции в заданных точках:

$$\text{div}\vec{F}(M_1) = -2, \quad \text{div}\vec{F}(M_2) = 0, \quad \text{div}\vec{F}(M_3) = +5.$$

Таким образом, в точке M_1 данное векторное поле имеет сток мощностью в 2 единицы, в точке M_2 - источник мощностью в 5 единиц, в точке M_3 поле не имеет ни стока, ни источника.

3. Вычислить поток векторного поля $\vec{F} = xy^2\vec{i} + xy\vec{j} + xz\vec{k}$ через поверхность $S: x=0, y=0, z=0, z=4-x^2y^2$, в направлении внешней нормали к S .

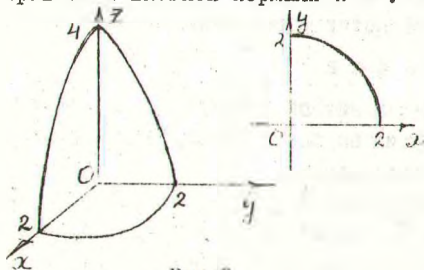


Рис.8

Решение. Данная поверхность S ограничивает замкнутую область V (рис.8), следовательно, для вычисления потока можно применить формулу Гаусса-Остроградского.

Найдем дивергенцию поля: $P=xy^2$, $Q=x^2y$,

$R = z$, следовательно, $\frac{\partial R}{\partial x} = y^2$, $\frac{\partial R}{\partial y} = x^2$, $\frac{\partial R}{\partial z} = 1$, $\operatorname{div} \vec{F} = x^2 + y^2 + 1$.

Применяя формулу (I4), получим:

$$\Pi_3(\vec{F}) = \oint_S (\vec{F} \cdot \vec{n}) ds = \iiint_V (x^2 + y^2 + 1) dx dy dz.$$

Для вычисления тройного интеграла перейдем к цилиндрическим координатам:

$$\Pi_3(\vec{F}) = \iiint_V (z^2 + 1) r dr d\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \int_0^{4-z^2} (z^2 + 1) r dr dz = \frac{14\pi}{3}.$$

2.6. Соленоидальное векторное поле (A)

Векторное поле $\vec{F}(M)$ называется соленоидальным в области G , если в любой точке этой области дивергенция векторного поля равна нулю: $\operatorname{div} \vec{F}(M) = 0$, $\forall M \in G$.

Таким образом, соленоидальное поле не имеет ни источников, ни стоков; векторные линии не могут ни начинаться, ни оканчиваться; они могут быть либо замкнутыми кривыми, либо иметь концы на границе поля.

Примерами соленоидальных полей являются: напряженность магнитного поля, создаваемого электрическим током, текущем по бесконечно длинному прямолинейному проводу; поле линейных скоростей тела, вращающегося вокруг оси.

Из теоремы Гаусса-Остроградского следует, что в соленоидальном поле поток вектора $\vec{F}(M)$ через любую замкнутую поверхность S , лежащую в этом поле, равен нулю.

В гидродинамике уравнение

$$\operatorname{div} \vec{F}(M) = 0 \quad (I5)$$

называется уравнением неразрывности несжимаемой жидкости.

В этом случае количество жидкости, выходящей через какую-нибудь замкнутую поверхность S , всегда равняется количеству входящей жидкости, и полный поток равен нулю.

Задачи

I. Показать, что поле магнитной напряженности, создаваемое постоянным током, текущим по бесконечному прямолинейному проводнику, является соленоидальным.

Решение. Выберем направление оси Oz вдоль направления тока, тогда напряженность $\vec{H}$ магнитного поля будет зависеть лишь от x и y и определяется формулой (см. прилож.2)

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi r^2} (-y\vec{i} + x\vec{j}),$$

где I - сила тока, а $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Имеем
$$P = -\frac{Iy}{2\pi(x^2+y^2)}, \quad Q = \frac{Ix}{2\pi(x^2+y^2)}, \quad R = 0.$$

Найдем дивергенцию поля:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{Ixy}{\pi(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = -\frac{Ixy}{\pi(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = 0,$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = \frac{Ixy}{\pi(x^2+y^2)^2} - \frac{Ixy}{\pi(x^2+y^2)^2} = 0 \quad (x^2+y^2 \neq 0).$$

Таким образом, поле магнитной напряженности $\vec{H}$ является соленоидальным в любой области пространства, не содержащей оси Oz .

2.7. Циркуляция и ротор векторного поля. Теорема Стокса. Формула Грина (A)

Пусть векторное поле задано функцией

$$\vec{F}(M) = P(x; y; z)\vec{i} + Q(x; y; z)\vec{j} + R(x; y; z)\vec{k}, \quad (x; y; z) \in G,$$

и функции $P(x; y; z)$, $Q(x; y; z)$, $R(x; y; z)$ и их частные производные 1-го порядка по координатам непрерывны в области G .

Пусть L - кусочно-гладкая кривая, на которой выбрано положительное направление (ориентированная кривая). Если L - замкнутая кривая, то положительным направлением ее обхода считается то, при котором область, ограниченная этой кривой, остается слева.

Циркуляцией $\mathcal{U}_L(\vec{F})$ векторного поля $\vec{F}(M)$ вдоль замкнутой ориентированной кривой L называется следующий криволинейный интеграл 2-го рода:

$$\mathcal{U}_L(\vec{F}) = \oint_L (\vec{F} d\vec{r}) = \oint_L P dx + Q dy + R dz. \quad (I6)$$

В силовом поле интеграл (I6) выражает работу поля при перемещении материальной точки вдоль линии L .

В произвольном векторном поле циркуляция есть некоторое число, зависящее от формы и ориентации контура L . Пусть в поле имеются замкнутые векторные линии (см. п.2.4). Найдем циркуляцию вдоль замкнутой векторной линии. Если L - векторная линия, то векторы $\vec{F}(M)$ и $d\vec{r}$ сонаправлены, т.е. $\vec{F} \cdot d\vec{r} = |\vec{F}| \cdot d\ell$ и

$$\mathcal{U}_L(\vec{F}) = \oint_L (\vec{F} d\vec{r}) = \oint_L |\vec{F}| d\ell > 0.$$

Отсюда следует, что, если в векторном поле $\vec{F}(M)$ циркуляция по любому замкнутому контуру равна нулю, то в этом поле нет замкнутых векторных линий, т.е. нет вихревых точек. Таким образом, циркуляция характеризует вращательную способность поля.

Ротором (или вихрем) векторного поля $\vec{F}(M) = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ называется вектор, обозначаемый символом $\text{rot } \vec{F}$ и определяемый равенством

$$\text{rot } \vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}, \quad (17)$$

или

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \quad (18)$$

Этот определитель раскрывается по элементам первой строки, при этом операции умножения элементов второй строки на элементы третьей строки понимаются как операции дифференцирования, например, $\frac{\partial}{\partial x} \cdot Q = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Если для точек $M \in G$ имеем $\text{rot } \vec{F}(M) = 0$, то поле вектора $\vec{F}(M)$ в области G называется безвихревым (см. п.2.8).

Следующая теорема устанавливает связь между циркуляцией и ротором векторного поля.

Теорема Стокса. Циркуляция векторного поля $\vec{F}(M)$ по замкнутому контуру L равна потоку ротора этого поля через любую поверхность S , натянутую на контур L :

$$\oint_L (\vec{F} d\vec{r}) = \iint_S (\text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n}) dS. \quad (19)$$

Предполагается, что вектор нормали к поверхности S направлен в ту сторону, откуда обход L виден совершающимся против часовой стрелки.

В случае плоского векторного поля $\vec{F}(M) = P\vec{i} + Q\vec{j}$ формула (19) имеет вид

$$\oint_L P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \quad (20)$$

и называется формулой Грина. Здесь D - область в плоскости Oxy , ограниченная контуром L .

Задачи

1. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{F}(M) = (x+y)\vec{i} -$

$-(x-y)^2$ вдоль замкнутого контура L двумя способами: 1) непосредственно, 2) с помощью формулы Грина. Контур L изображен на рис.9.

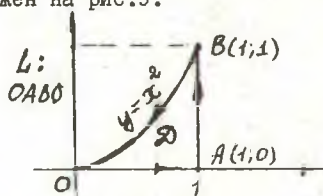


Рис.9

ним уравнением: $\overline{OA}$ ($y=0$), $\overline{AB}$ ($x=1$), $\overline{BO}$ ($y=x^2$), и вычислим, интеграл вдоль каждой из этих линий. Получим:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \int_{\overline{OA}} (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy = \left| \begin{array}{l} OA: y=0, dy=0 \\ x_0=0, x_A=1 \end{array} \right| = \\ &= \int_0^1 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 = \frac{1}{3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= \int_{\overline{AB}} (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy = \left| \begin{array}{l} AB: x=1, dx=0 \\ y_A=0, y_B=1 \end{array} \right| = \\ &= - \int_0^1 (1-y)^2 dy = \left. \frac{(1-y)^3}{3} \right|_0^1 = -\frac{1}{3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_3 &= \int_{\overline{BO}} (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy = \left| \begin{array}{l} BO: y=x^2, dy=2x dx \\ x_B=1, x_O=0 \end{array} \right| = \\ &= \int_1^0 (x+x^2)^2 dx - \int_1^0 (x-x^2)^2 \cdot 2x dx = \int_1^0 (x^2 + 2x^3 + x^4) dx - \\ &- 2 \int_1^0 (x^3 - 2x^4 + x^5) dx = -1. \end{aligned}$$

Следовательно, $\mathcal{U}_L(\overline{F}) = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = -1$.

2) Вычислим циркуляцию, используя формулу Грина (20).

Имеем:

$$P(x, y) = (x+y)^2, \quad Q(x, y) = -(x-y)^2,$$

Решение. 1) Вычислим циркуляцию непосредственно, используя формулу (16). Имеем

$$\mathcal{U}_L(\overline{F}) = \oint_L (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy.$$

Разобьем контур интегрирования на три части так, чтобы каждая составляющая описывалась одним уравнением:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -2(x-y); \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 2(x+y); \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -4x.$$

По формуле (20) получим:

$$U_1(\vec{r}) = \iint_{\Sigma} (-4x) dx dy = -4 \int_0^1 x dx \int_0^{x^2} dy = -1.$$

2.8. Потенциальное векторное поле (A)

Векторное поле $\vec{F}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$, заданное в пространственной области G , называется потенциальным, если существует такая скалярная функция $u(M)$, что во всех точках области G выполнено равенство

$$\vec{F}(M) = \text{grad } u(M). \quad (21)$$

Функция $u = u(M)$ (или $u = u(x, y, z)$), удовлетворяющая в области G условию (21) называется потенциалом (или потенциальной функцией) векторного поля $\vec{F}(M)$.

Соотношение (21) равносильно следующим скалярным равенствам:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y, z), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y, z), \quad \frac{\partial u}{\partial z} = R(x, y, z), \quad (22)$$

т.е. $du = Pdx + Qdy + Rdz.$

Основные свойства потенциальных полей.

1. Безвихревое векторное поле $\vec{F}(M)$, заданное в односвязной области G , является потенциальным в G .

2. Если векторное поле $\vec{F}(M)$, заданное в односвязной (см. введение) области G , потенциально, то оно безвихревое, т.е. $\text{rot } \vec{F} = 0$ всюду в G .

3. Если векторное поле $\vec{F}(M)$, заданное в односвязной области G , потенциально, то циркуляция поля по любому замкнутому контуру L , лежащему в G , равна нулю: $U_L(\vec{F}) = 0, \forall L \in G$.

4. Если векторное поле $\vec{F}(M)$, заданное в односвязной области G , потенциально, и $u(x, y, z)$ — потенциал поля, то работа поля по перемещению материальной частицы из точки $B(x_0; y_0; z_0)$ в точку $C(x; y; z)$ не зависит от формы пути и равна:

$$A = \int_{BC} Pdx + Qdy + Rdz = u(C) - u(B), \quad (23)$$

т.е. $A = u(x_1; y_1; z_1) - u(x_0; y_0; z_0)$.

5. Потенциал $u(M)$ векторного поля вычисляется неоднозначно, а с точностью до постоянного слагаемого.

Из формул (22) следует, что потенциал $u(x; y; z)$ векторного поля $\vec{F}(M) = P(x; y; z)\vec{i} + Q(x; y; z)\vec{j} + R(x; y; z)\vec{k}$ можно вычислять по формуле

$$u(x; y; z) = \int_{(x_0; y_0; z_0)}^{(x; y; z)} P dx + Q dy + R dz, \quad (24)$$

где $M_0(x_0; y_0; z_0)$ - некоторая фиксированная точка поля, а $M(x; y; z)$ - произвольная точка поля.

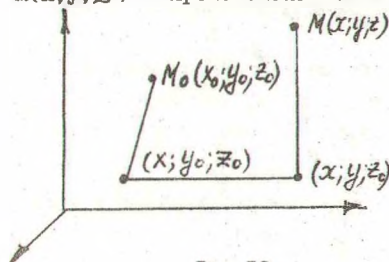


Рис. 10

В потенциальном поле значение интеграла (24) не зависит от того, по какому пути мы будем двигаться из M_0 в M (свойство 4).

Выберем в качестве линии интегрирования ломаную, звенья которой параллельны координатным осям (рис. 10). Тогда фор-

мула (24) примет вид:

$$u(x; y; z) = \int_{x_0}^x P(x; y_0; z_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x; y; z_0) dy + \int_{z_0}^z R(x; y; z) dz, \quad (25)$$

где x, y, z - координаты текущей точки на звеньях ломаной, вдоль которой ведется интегрирование.

Задачи

1. Установить, являются ли заданные векторные поля потенциальными:

$$\vec{F}_1 = 2xy\vec{i} + (x^2 - 2yz)\vec{j} - y^3\vec{k}, \quad (x; y; z) \in G_1;$$

$$\vec{F}_2 = xy^3\vec{i} + (y - z)\vec{j} - x^2\vec{k}, \quad (x; y; z) \in G_2;$$

(области G_1 и G_2 односвязны).

Решение. Найдем ротор поля $\vec{F}_1(M)$. Имеем: $P = 2xy$; $Q = x^2 - 2yz$; $R = -y^3$. По формуле (18) получим:

$$\text{rot } \vec{F}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy & x^2 - 2yz & -y^3 \end{vmatrix} = \vec{i}(2y - 2y) - \vec{j}(0 + k(2x - 2x)) = \vec{0}.$$

Векторное поле $\vec{F}_1(M)$ является безвихревым в односвязной области G_1 , следовательно, $\vec{F}_1(M)$ - потенциальное поле.

Найдем ротор поля $\vec{F}_2(M)$. Получим:

$$\operatorname{rot} \vec{F}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy^3 & y-z & -x^2 \end{vmatrix} = \vec{i} + 2x\vec{j} - 3xy^2\vec{k} \neq 0.$$

Следовательно, поле $\vec{F}_2(M)$, $M \in G_2$ не является потенциальным.

2. Найти потенциал векторного поля $\vec{F}_1(M)$ из задачи 1.

Решение. В задаче 1 было установлено, что поле $\vec{F}_1(M) = 2xy\vec{i} + (x^2 - 2yz)\vec{j} - y^2\vec{k}$ является потенциальным. Найдем его потенциал по формуле (25), взяв $M_0(0;0;0)$. Получим:

$$\begin{aligned} P(x,y,z) &= 2xy, \quad Q(x,y,z) = x^2 - 2yz, \quad R(x,y,z) = -y^2, \\ Q(x,y,0) &= x^2, \quad P(x,0,0) = 0, \\ u(x,y,z) &= \int_0^x 0 dx + \int_0^y x^2 dy + \int_0^z (-y^2) dz = x^2 y - y^3 z. \end{aligned}$$

Так как потенциал векторного поля вычисляется неоднозначно, а с точностью до постоянного слагаемого, то потенциалом поля $\vec{F}_1(M)$ будет любая функция вида: $u = x^2 y - y^3 z + C$, где C - произвольная постоянная.

3. Вычислить работу векторных полей $\vec{F}_1(M)$ и $\vec{F}_2(M)$ из задачи 1 при перемещении материальной частицы из точки $B(1;2;4)$ в точку $C(1;1;1)$ вдоль линий: а) L_1 , параметрические уравнения которой имеют вид: $x=1, y=t, z=t^2$, б) вдоль прямой, проходящей через точки B и C .

Решение. 1) Векторное поле $\vec{F} = \vec{F}_1(M)$, $M \in G_1$ является потенциальным и его потенциал равен $u = x^2 y - y^3 z + C$ (см. задачи 1, 2). Работа потенциального поля не зависит от того, по какой линии будет перемещаться материальная частица, и может быть вычислена по формуле (23). Получим: $u(1;1;1) = C$, $u(1;2;4) = C - 14$, т.е. $A = C - (C - 14) = 14$.

2) Векторное поле $\vec{F} = \vec{F}_2(M)$, $M \in G_2$ не является потенциальным (см. задачу 1). Чтобы найти работу поля, нужно вычислить криволинейный интеграл 2-го рода:

$$A = \int_{BC} (\vec{F}_2 d\vec{r}) = \int_{BC} xy^3 dx + (y-z) dy - x^2 dz.$$

Найдем сначала работу A_1 поля при перемещении материальной частицы вдоль линии L_1 . Воспользуемся параметрическими уравнениями кривой L_1 : $x=1$, $y=t$, $z=t^2$ и от криволинейного интеграла перейдем к определенному интегралу с переменной интегрирования t . Так как для точек кривой L_1 имеем $y=t$, то точке $B(1;2;4)$ соответствует значение параметра $t_2=2$, а точке $C(1;1;1)$ - значение параметра $t_1=1$. Материальная точка перемещается из B в C , следовательно, нижний предел интегрирования равен 2, а верхний - 1. Получим:

$$A_1 = \int_{L_1} xy^3 dx + (y-z) dy - x^2 dz = \left| \begin{array}{ccc} x=1 & y=t & z=t^2 \\ dx=0 & dy=dt & dz=2t dt \end{array} \right| = \\ = \int_2^1 (t^3 \cdot 0 + (t-t^2) dt - 2t dt) = \frac{23}{6}$$

Вычислим теперь работу A_2 поля при перемещении материальной частицы вдоль прямой BC . Нам известны координаты двух точек (B и C), лежащих на прямой BC , поэтому ее уравнение имеет вид:

$$\frac{x-1}{1-1} = \frac{y-1}{2-1} = \frac{z-1}{4-1} = t,$$

или в параметрической форме: $x=1$, $y=t+1$, $z=3t+1$.

Так как для точек прямой BC имеем $y=t+1$, то точке $B(1;2;4)$ соответствует значение параметра $t_1=1$, а точке $C(1;1;1)$ - значение параметра $t_2=0$.

Вычислим работу A_2 аналогично предыдущему. Получим:

$$A_2 = \int_{BC} xy^3 dx + (y-z) dy - x^2 dz = \left| \begin{array}{ccc} x=1 & y=t+1 & z=3t+1 \\ dx=0 & dy=dt & dz=3dt \end{array} \right| = \\ = \int_1^0 ((t+1)^3 \cdot 0 + (-2t) dt - 3 dt) = 4.$$

Таким образом, работа векторного поля $\vec{F}_2(M)$, $M \in G$ при перемещении материальной частицы из точки $B(1;2;4)$ в точку $C(1;1;1)$ вдоль линии L_1 равна $23/6$, а вдоль прямой BC равна 4.

2.9. Вычисление потока векторного поля путем проектирования поверхности на одну из координатных плоскостей (Б)

Пусть требуется вычислить поток векторного поля

$$\Pi_S(\vec{F}) = \iint_S (\vec{F} \cdot \vec{n}) dS$$

через незамкнутую поверхность S , которая проектируется взаимно однозначно на плоскость Oxy в область D_{xy} .

В этом случае поверхность S можно задать уравнением $z = f(x, y)$, а единичный вектор нормали $\vec{n} = \{\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma\}$ к поверхности S может быть найден по формуле (см. упр. 3(A))

$$\vec{n} = \pm \frac{\text{grad}(z - f(x, y))}{|\text{grad}(z - f(x, y))|} = \pm \frac{-\frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2 + 1}} \quad (26)$$

Знак (+) перед выражением (26) соответствует выбору верхней стороны поверхности, когда нормаль $\vec{n}$ образует с осью Oz острый угол (коэффициент при $\vec{k}$ больше нуля); знак (-) соответствует выбору нижней стороны поверхности S .

Так как элемент площади dS поверхности $z = f(x, y)$ равен

$$dS = \frac{dx \cdot dy}{|\cos \gamma|} = \sqrt{1 + (\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2} \cdot dxdy,$$

то вычисление потока сводится к вычислению двойного интеграла по формуле

$$\Pi_S(\vec{F}) = \iint_S (\vec{F} \cdot \vec{n}) dS = \iint_{D_{xy}} \frac{(\vec{F} \cdot \vec{n})}{|\cos \gamma|} \Big|_{z=f(x,y)} \cdot dxdy, \quad (27)$$

где символ $\frac{(\vec{F} \cdot \vec{n})}{|\cos \gamma|} \Big|_{z=f(x,y)}$ означает, что в выражении $\frac{(\vec{F} \cdot \vec{n})}{|\cos \gamma|}$

вместо z нужно подставить $f(x, y)$.

Если оказывается удобным проектировать поверхность S на координатные плоскости Oxz или Oyz , то для вычисления потока пользуются соответственно формулами:

$$\Pi_S(\vec{F}) = \iint_{D_{xz}} \frac{(\vec{F} \cdot \vec{n})}{|\cos \beta|} \Big|_{y=\varphi(x,z)} \cdot dxdz \quad (28)$$

или

$$\Pi_S(\vec{F}) = \iint_{D_{yz}} \frac{(\vec{F} \cdot \vec{n})}{|\cos \alpha|} \Big|_{x=\varphi(y,z)} \cdot dydz, \quad (29)$$

где $y = \varphi(x, z)$ ($x = \varphi(y, z)$) - уравнение поверхности S , D_{xz} (D_{yz}) - область, в которую проектируется S , а вектор нор-

малы $\vec{n}$ равен:

$$\vec{n} = \pm \frac{-\frac{\partial \psi}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \vec{j} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \vec{k}}{\sqrt{(\frac{\partial \psi}{\partial x})^2 + 1 + (\frac{\partial \psi}{\partial z})^2}} \quad (\vec{n} = \pm \frac{\vec{i} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k}}{\sqrt{1 + (\frac{\partial \varphi}{\partial y})^2 + (\frac{\partial \varphi}{\partial z})^2}})$$

З а м е ч а н и е. В случае, когда поверхность S задана уравнением $\Phi(x; y; z) = 0$, единичный вектор нормали $\vec{n} = \{\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma\}$ можно найти по формуле:

$$\vec{n} = \pm \frac{\text{grad } \Phi(x; y; z)}{|\text{grad } \Phi(x; y; z)|} = \pm \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \vec{k}}{\sqrt{(\frac{\partial \Phi}{\partial x})^2 + (\frac{\partial \Phi}{\partial y})^2 + (\frac{\partial \Phi}{\partial z})^2}}, \quad (30)$$

где знак в правой части определяется выбором нормали к поверхности S .

З а д а ч и

I. Вычислить поток векторного поля $\vec{F} = (2x+z)\vec{i} + (3y-2z)\vec{j} + (5x+2y)\vec{k}$ через часть плоскости $x+y+z=1$, лежащую в первом октанте (рис. II) при условии, что вектор нормали $\vec{n}$ к плоскости составляет с осью OZ острый угол.

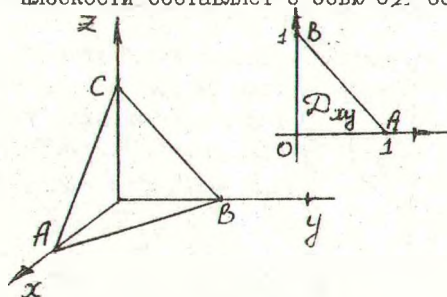


Рис. II

Решение. Поверхность S (треугольник ABC) проектируется взаимно однозначно на плоскость Oxy в область D_{xy} , которой является треугольник OAB (рис. II).

Уравнение поверхности S можно записать в виде $z = 1 - x - y$.

По формуле (26) найдем координаты вектора $\vec{n}$. Так как $\vec{n}$ образует с осью OZ острый угол, то в формуле (26) нужно взять знак (+). Получим:

$$\vec{n} = (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}} > 0.$$

Следовательно,

$$\vec{F} \cdot \vec{n} = (2x+z) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + (3y-2z) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + (5x+2y) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}(7x+5y-z); \quad dS = \frac{dx dy}{|\cos \alpha|} = \sqrt{3} dx dy.$$

По формуле (27) найдем поток данного векторного поля:

$$\begin{aligned} \Pi_S(\vec{F}) &= \iint_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{3}}(7x+5y-z) \Big|_{z=1-x-y} \cdot \sqrt{3} dx dy = \\ &= \iint_{D_{xy}} (8x+6y-1) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (8x+6y-1) dy = \frac{11}{6}. \end{aligned}$$

2. Найти поток векторного поля $\vec{F} = x\vec{i} + z^2\vec{k}$ через часть поверхности $x = y^2 + z^2$, отсеченной плоскостью $x=2$ (рис. I2) в направлении нормали $\vec{n}$ - внешней к области, ограниченной параболоидом.

Решение. Данная поверхность (параболоид вращения) проектируется взаимно однозначно только на плоскость Oyz в круг D_{yz} (рис. I2).

Найдем единичный вектор нормали к поверхности S :

$$\vec{n} = \pm \frac{\text{grad}(x - y^2 - z^2)}{|\text{grad}(x - y^2 - z^2)|} = \pm \frac{\vec{i} - 2y\vec{j} - 2z\vec{k}}{\sqrt{1+4y^2+4z^2}}.$$

По условию задачи нормаль $\vec{n}$ образует тупой угол α с осью Ox (рис. I2), поэтому перед дробью нужно взять знак минус. Получим:

$$\vec{n} = \frac{-\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}}{\sqrt{1+4y^2+4z^2}},$$

$$\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{1+4y^2+4z^2}}.$$

Следовательно,

$$\vec{F} \cdot \vec{n} = \frac{2z^3 - x}{\sqrt{1+4y^2+4z^2}},$$

$$dS = \sqrt{1+4y^2+4z^2} dy dz.$$

Рис. I2

Подставив в формулу (29) выражения для $(\vec{F} \cdot \vec{n})$ и dS , получим

$$\Pi_S(\vec{F}) = \iint_S (\vec{F} \cdot \vec{n}) dS = \iint_{D_{yz}} (2z^3 - x) \Big|_{x=y^2+z^2} \cdot dy dz =$$

$$= \iint_{\mathcal{D}_{yz}} (2x^3 - y^2 - z^2) dy dz.$$

Областью интегрирования $\mathcal{D}_{yz}$ является круг с центром в начале координат и радиусом $R = \sqrt{2}$ (рис.12). Вводя полярные координаты $y = r \cos \varphi$, $z = r \sin \varphi$, будем иметь

$$\begin{aligned} \Pi_S(\vec{F}) &= \iint_{\mathcal{D}_{yz}} (2r^3 \sin^3 \varphi - r^2) r dr d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} (2r^4 \sin^3 \varphi - r^3) dr = -2\pi. \end{aligned}$$

2.10. Вычисление потока векторного поля путем проектирования поверхности на все три координатные плоскости (Б)

Пусть требуется вычислить поток векторного поля

$$\Pi_S(\vec{F}) = \iint_S (\vec{F}, \vec{n}) ds,$$

и поверхность S взаимно однозначно проектируется на все три координатные плоскости в области $\mathcal{D}_{xy}$, $\mathcal{D}_{yz}$, $\mathcal{D}_{xz}$.

В этом случае уравнение $\Phi(x, y, z) = 0$ поверхности S однозначно разрешимо относительно каждого из аргументов x, y, z :

$$x = \varphi(y, z), \quad y = \psi(x, z), \quad z = \chi(x, y). \quad (31)$$

Тогда поток векторного поля

$$\vec{F} = P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k}, \quad (x, y, z) \in G$$

через поверхность $S \subset G$, единичный вектор нормали к которой равен $\vec{n} = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}$, можно записать так:

$$\Pi_S(\vec{F}) = \iint_S (P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma) ds \quad (32)$$

(координаты вектора $\vec{n}$ можно найти по формуле (30)).

Известно (см. п.2.9.), что

$$ds \cdot \cos \alpha = \pm dy dz, \quad ds \cdot \cos \beta = \pm dx dz, \quad ds \cdot \cos \gamma = \pm dx dy, \quad (33)$$

причем знак в каждой из формул (33) выбирается таким, каков знак $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ на поверхности S . Подставляя (31) и (33) в (32), получим формулу для вычисления потока:

$$\Pi_S(\vec{F}) = \pm \iint_{\mathcal{D}_{yz}} P(\varphi(y, z), y, z) dy dz \pm$$

$$\pm \iint_{\mathcal{D}xz} Q(x; \psi(x, z); z) dx dz \pm \iint_{\mathcal{D}xy} R(x; y; \phi(x; y)) dx dy. \quad (34)$$

З а д а ч и

I. Найти поток векторного поля $\vec{F} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}$ через часть внешней стороны сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, заключенной в первом октанте (рис. I3).

Решение. По формуле (30) найдем единичный вектор нормали $\vec{n}$ к поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Получим

$$\vec{n} = \frac{\text{grad}(x^2 + y^2 + z^2 - 1)}{|\text{grad}(x^2 + y^2 + z^2 - 1)|} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

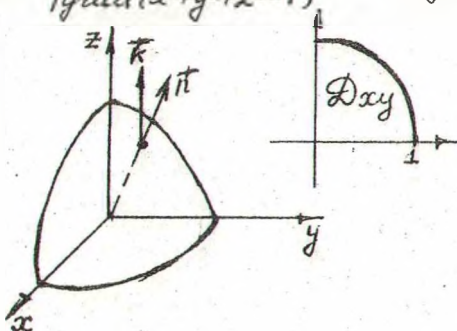


Рис. I3

В формуле (30) берем знак (+), так как вектор нормали к внешней стороне поверхности S образует с осью OZ (или Ox , или Oy) острый угол (рис. I3).

Так как $\cos \alpha = x > 0$, $\cos \beta = y > 0$, $\cos \gamma = z > 0$, то в формуле (34) бе-

рем перед всеми интегралами знак плюс.

Полагая, что в (34) $P = xy$, $Q = yz$, $R = xz$, получим:

$$I_3(\vec{F}) = \iint_{\mathcal{D}yz} xy dy dz + \iint_{\mathcal{D}xz} yz dx dz + \iint_{\mathcal{D}xy} xz dx dy. \quad (35)$$

Из уравнения сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ находим:

$$x = \varphi(y; z) = \sqrt{1 - y^2 - z^2}, \quad y = \psi(x; z) = \sqrt{1 - x^2 - z^2}, \\ z = \phi(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Подставляя эти выражения для x , y , z соответственно в первый, второй и третий интегралы правой части (35), получим:

$$I_3(\vec{F}) = \iint_{\mathcal{D}yz} y \sqrt{1 - y^2 - z^2} dy dz + \iint_{\mathcal{D}xz} z \sqrt{1 - x^2 - z^2} dx dz + \\ + \iint_{\mathcal{D}xy} x \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy.$$

Вычислим третий интеграл, переходя к полярным координатам: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $0 \leq \varphi \leq \pi/2$, $0 \leq r \leq 1$ (рис.13):

$$J_3 = \iint_{D_{xy}} x \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy = \iint_{D_{xy}} r \cos \varphi \sqrt{1-r^2} r dr d\varphi = \\ = \int_0^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi \int_0^1 r^2 \sqrt{1-r^2} dr = \frac{\pi}{16}.$$

Аналогично вычисляются интегралы:

$$J_1 = \iint_{D_{yz}} y \sqrt{1-y^2-z^2} dy dz = \frac{\pi}{16},$$

$$J_2 = \iint_{D_{xz}} z \sqrt{1-x^2-z^2} dx dz = \frac{\pi}{16}.$$

Искомый поток равен $\Pi_S(\vec{F}) = J_1 + J_2 + J_3 = \frac{3\pi}{16}.$

2.II. Инвариантные определения и свойства дивергенции и ротора (Б)

Пусть векторное поле $\vec{F}(M)$ определено в пространственной области G . В области G выберем какую-нибудь замкнутую поверхность S , ограничивающую область V объема $\mathcal{V}$, и в области V (можно и на поверхности S) возьмем произвольную точку M .

Вычислим поток $\Pi_S(\vec{F})$ и отнесем его к единице объема области V :

$$\frac{\Pi_S(\vec{F})}{\mathcal{V}} = \frac{\oint_S (\vec{F} \cdot \vec{n}) dS}{\mathcal{V}} \quad (36)$$

Перейдем к пределу, стягивая область V в точку M .

Определение. Если отношение (36) имеет конечный предел, когда область V стягивается в точку M , то этот предел называют дивергенцией (расходимостью) векторного поля $\vec{F}(M)$ в точке M :

$$\operatorname{div} \vec{F}(M) = \lim_{V \rightarrow M} \frac{\oint_S (\vec{F} \cdot \vec{n}) dS}{\mathcal{V}} \quad (37)$$

Если считать векторное поле $\vec{F}(M)$ стационарным полем скоростей несжимаемой текущей жидкости, то отношение (36) является тогда средней плотностью мощности источников в области V , а его предел (37) — плотностью мощности источни-

ков (стоков) в точке M . Таким образом, в гидродинамической интерпретации дивергенция векторного поля $\vec{F}(M)$ в точке M — это плотность мощности источников жидкости в этой точке.

В электростатическом векторном поле напряженности, созданном электрическими зарядами, распределенными в пространстве, дивергенция является плотностью распределения электрических зарядов в данной точке поля.

Доказано, что если координаты вектора $\vec{F}(M)$ (функции P, Q, R) непрерывны вместе со своими частными производными 1-го порядка в области G , то в любой точке $M \in G$ существует конечный предел (37). Непрерывность частных производных функций P, Q, R гарантирует дифференцируемость этих функций — условие, при котором векторное поле $\vec{F}(M)$ будем называть дифференцируемым.

Таким образом, в каждой точке дифференцируемого векторного поля определено число — дивергенция поля в этой точке, т.е. векторное поле $\vec{F}(M)$ порождает скалярное поле — поле дивергенции $u = \text{div } \vec{F}(M)$.

Свойства дивергенции:

1. $\text{div}(\alpha \vec{F}_1 + \beta \vec{F}_2) = \alpha \text{div } \vec{F}_1 + \beta \text{div } \vec{F}_2$ ($\alpha, \beta = \text{const}$);
2. $\text{div}(\varphi \cdot \vec{F}) = \varphi \text{div } \vec{F} + \vec{F} \cdot \text{grad } \varphi$ (φ — скалярная функция);
3. $\text{div}(\vec{c} \cdot \varphi) = \vec{c} \cdot \text{grad } \varphi$ ($\vec{c}$ — постоянный вектор).

Пусть M — некоторая точка в области G , а $\vec{n}_0$ — произвольный единичный вектор, выходящий из точки M . Через точку M проведем плоскость перпендикулярно к $\vec{n}_0$, и в этой плоскости выберем какой-нибудь замкнутый контур L , окружающий точку M . Ориентируем L таким образом, чтобы из конца вектора $\vec{n}_0$ обход L был виден совершающимся против часовой стрелки. Пусть площадь плоской фигуры, ограниченной контуром L , равна S .

Вычислим циркуляцию поля $\vec{F}(M)$ вдоль контура L и разделим ее на площадь $S : (\int_L \vec{F} d\vec{r}) / S$. Будем теперь стягивать контур L в точку M (в этом случае $S \rightarrow 0$). Предел

$$\lim_{S \rightarrow 0} \frac{\int_L \vec{F} \cdot d\vec{r}}{S} \quad (38)$$

называют плотностью циркуляции поля $\vec{F}(M)$ в точке M по данному направлению $\vec{n}_0$.

Если циркуляция вектора $\vec{F}$ по контуру L характеризует вращательную способность вектора $\vec{F}$ на контуре L , то плотность циркуляции (38) характеризует вращательную способность вектора $\vec{F}$ в данной точке M по данному направлению $\vec{n}_0$.

В общем случае по разным направлениям, выходящим из M , плотность циркуляции вектора $\vec{F}$ будет различна. Возникает вопрос: по какому направлению она будет наибольшей?

Определение. Ротором (или вихрем) вектора $\vec{F}$ (векторного поля $\vec{F}$) в точке M называется такой вектор, проекция которого на любое направление $\vec{n}_0$, выходящее из точки M , равна плотности циркуляции поля $\vec{F}$ в точке M по направлению $\vec{n}_0$:

$$\text{Рот}_{\vec{n}_0} \vec{F}(M) = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint_L \vec{F} d\vec{r}}{S}. \quad (39)$$

Величина $\text{Рот}_{\vec{n}_0} \vec{F}$ будет наибольшей, когда угол между векторами $\text{Рот}_{\vec{n}_0} \vec{F}$ и $\vec{n}_0$ равен нулю, т.е. $\text{Рот}_{\vec{n}_0} \vec{F}$ дает направление, по которому плотность циркуляции в точке M будет наибольшей.

Доказано, что если векторное поле $\vec{F}(M)$ дифференцируемо в G , то конечный предел (39) существует для любой точки $M \in G$ и любого направления $\vec{n}_0$. В этом случае векторное поле $\vec{F}(M)$ порождает новое векторное поле - поле $\text{Рот} \vec{F}(M)$, причем вектор $\text{Рот} \vec{F}(M)$ в каждой точке $M \in G$ векторного поля $\vec{F}(M)$ характеризует тенденцию к вращению, или завихренность поля $\vec{F}(M)$ в точке M .

Свойства ротора векторного поля:

1. $\text{Рот} \vec{c} = 0$ ($\vec{c}$ - постоянный вектор);
2. $\text{Рот}(\alpha \vec{F}_1 + \beta \vec{F}_2) = \alpha \text{Рот} \vec{F}_1 + \beta \text{Рот} \vec{F}_2$;
3. $\text{Рот} \vec{r} = 0$ ($\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$);
4. $\text{Рот} \text{grad} \varphi = 0$ (φ - скалярная функция);
5. $\text{Рот}(\varphi \cdot \vec{F}) = \varphi \cdot \text{Рот} \vec{F} + \text{grad} \varphi \times \vec{F}$.

Приведенные здесь определения дивергенции и ротора не зависят от выбора системы координат в пространстве и поэтому называются инвариантными.

2.12. Оператор Гамильтона (Р)

Оператором Гамильтона (набла-оператором) ∇ называет-

ся символический вектор, определяемый в декартовой прямоугольной системе координат выражением

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \vec{k}. \quad (40)$$

При помощи оператора Гамильтона удобно записывать все три основные операции векторного анализа: взятие градиента скалярного поля, дивергенции и ротора векторного поля.

Рассмотрим, например, произведение $\nabla \cdot u$, где $u = u(x, y, z)$ — скалярная функция. Если под произведением $\frac{\partial}{\partial x} \cdot u$, $\frac{\partial}{\partial y} \cdot u$, $\frac{\partial}{\partial z} \cdot u$ понимать взятие частной производной от функции $u(x, y, z)$ по соответствующим переменным, то

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} = \text{grad } u, \quad \text{т.е. } \nabla u = \text{grad } u. \quad (41)$$

Если рассмотреть скалярное произведение набла-вектора на вектор $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, то получим

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \text{div } \vec{F}, \quad \text{т.е. } \nabla \cdot \vec{F} = \text{div } \vec{F}. \quad (42)$$

Найдем теперь векторное произведение набла-вектора на $\vec{F}$:

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \text{rot } \vec{F}, \quad \text{т.е. } \nabla \times \vec{F} = \text{rot } \vec{F}. \quad (43)$$

Сформулируем основные правила обращения с оператором набла:

1) ∇ — линейный оператор, т.е. результат действия его на сумму двух однотипных величин, есть сумма результатов действия на каждое слагаемое в отдельности, и постоянные числовые множители можно выносить за знак ∇ ;

2) ∇ действует по обычным правилам дифференцирования;

3) ∇ как оператор действует на все величины, стоящие после него, и не действует на величины, стоящие перед ним;

4) при использовании оператора ∇ в сложных выражениях необходимо пользоваться правилами векторной алгебры для перестановки сомножителей.

Задачи

1. Используя оператор ∇ , доказать, что $\text{div}(\text{rot } \vec{F}) = 0$.

Решение. Имеем: $\text{div}(\text{rot } \vec{F}) = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{F})$. Применяя свойства смешанного произведения, получим

$$\text{div}(\text{rot } \vec{F}) = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = \vec{F} \cdot (\nabla \times \nabla) = \vec{F} \cdot \vec{0} = 0.$$

2. Используя оператор ∇ , найти $\operatorname{div}(\varphi \vec{F})$, где φ - скалярная функция.

Решение. Имеем: $\operatorname{div}(\varphi \cdot \vec{F}) = \nabla(\varphi \cdot \vec{F}) = (\nabla \varphi) \cdot \vec{F} + \varphi \cdot \nabla \vec{F} = \operatorname{grad} \varphi \cdot \vec{F} + \varphi \cdot \operatorname{div} \vec{F}$.

2.13. Гармоническое поле. Оператор Лапласа (Б)

Векторное поле $\vec{F} = \vec{F}(M)$, $M \in G$ называется гармоническим (или лапласовым), если $\operatorname{rot} \vec{F}(M) = 0$, $\operatorname{div} \vec{F}(M) = 0$, $\forall M \in G$.

Таким образом, если G - односвязная область, гармоническое поле является одновременно потенциальным и соленоидальным (см. п.2.6, п.2.8).

Пусть $u = u(x, y, z)$ - потенциал гармонического поля, т.е. $\vec{F} = \operatorname{grad} u$. Используя второе условие гармоничности поля, получим: $\operatorname{div} \vec{F} = \operatorname{div} \operatorname{grad} u = \operatorname{div} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} \right) = 0$,

$$\text{т.е.} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad \Delta u = 0. \quad (44)$$

Уравнение (44) называется уравнением Лапласа, а Δ - оператором Лапласа, или лапласианом:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Таким образом, гармоническое (лапласово) поле полностью определяется скалярной функцией $u = u(x, y, z)$, которая является решением уравнения (44).

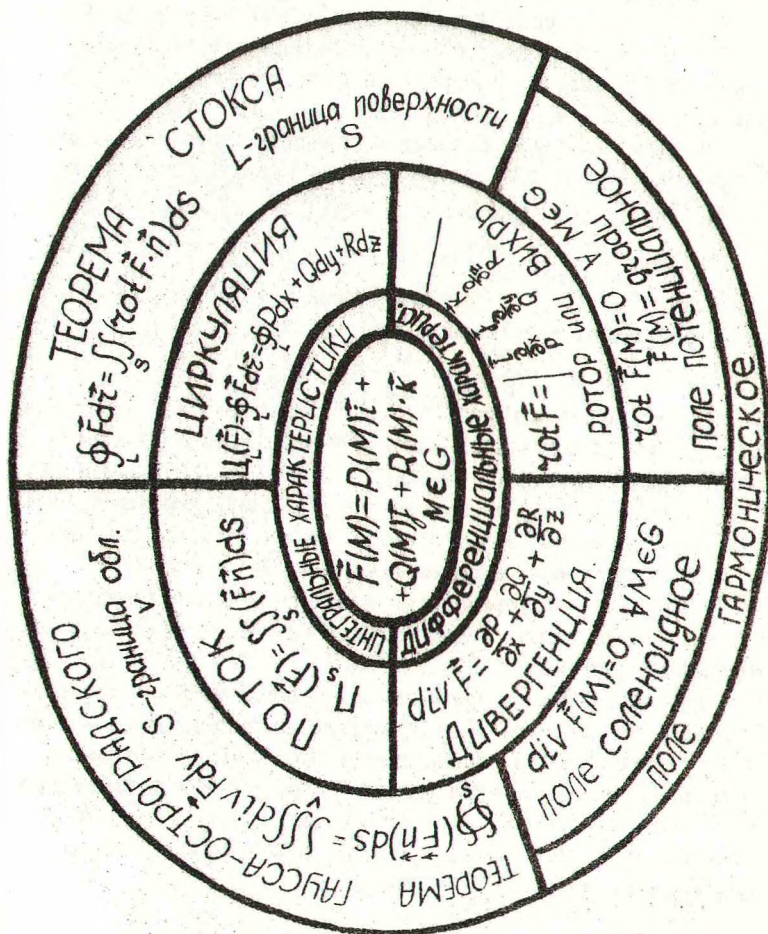
Функция $u = u(x, y, z)$ называется гармонической, если она имеет непрерывные частные производные до 2-го порядка включительно и является решением уравнения Лапласа (44).

В заключение сформулируем основную теорему векторного анализа, показывающую важность понятий потенциального и соленоидального полей.

Теорема. Любое непрерывно дифференцируемое векторное поле $\vec{F}(M)$, заданное на всем пространстве и исчезающее на бесконечности вместе со своими дивергенцией и ротором, может быть единственным образом (с точностью до векторной постоянной) представлено в виде суммы потенциального $\vec{F}_1(M)$ и соленоидального $\vec{F}_2(M)$ полей, т.е. $\vec{F}(M) = \vec{F}_1(M) + \vec{F}_2(M)$, где $\operatorname{rot} \vec{F}_1(M) = 0$, $\operatorname{div} \vec{F}_2(M) = 0$.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

Диаграмма основных характеристик векторного поля



ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Примеры физических полей

1. Поле сил тяготения. Если в пространстве имеется некоторое распределение масс, то по закону Ньютона на единичную массу, помещенную в точку M , будет действовать некоторая сила притяжения $\vec{F}(M)$.

Векторы $\vec{F}(M)$, рассматриваемые во всех точках некоторой пространственной области, определяют векторное поле, называемое полем тяготения данной системы масс. Сама сила $\vec{F}(M)$ называется напряженностью поля тяготения в точке M .

Если поле тяготения создается одной точечной массой m_0 , расположенной в точке M_0 , то напряженность поля $\vec{F}(M)$ определяется формулой

$$\vec{F}(M) = G \cdot \frac{m_0 \cdot \vec{r}}{r^3}, \quad (45)$$

где G - гравитационная постоянная, $\vec{r} = \vec{M M_0}$, $r = |\vec{r}|$.

Поле сил тяготения является потенциальным. Функция

$$u(M) = G \cdot \frac{m_0}{r} \quad (46)$$

называется точечным потенциалом тяготения (или ньютоновским потенциалом). Она определяет скалярное поле, называемое полем потенциала тяготения.

Функции $\vec{F}(M)$ и $u(M)$ связаны соотношением $\vec{F}(M) = -\text{grad } u$.

2. Электростатическое поле. Электрическое поле, неизменное во времени, называется электростатическим.

Основными величинами, характеризующими электростатическое поле, являются: $\vec{E}$ - вектор напряженности электростатического поля, $\vec{D}$ - вектор электрической индукции, скалярная функция u - потенциал поля.

Если поле создано одним точечным зарядом q , помещенным в точку M_0 , то

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = -\text{grad } u(M), \quad (47)$$

$$\vec{D}(M) = \epsilon \cdot \vec{E}, \quad u(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon r},$$

где ϵ - абсолютная диэлектрическая проницаемость среды, $\vec{r} = \vec{M_0 M}$, $r = |\vec{r}|$.

Электростатическое поле может быть создано также систе-

мой точечных зарядов $q_1, q_2, \dots, q_n$, расположенных в точках $M_1, M_2, \dots, M_n$, или сплошным объемным распределением электрических зарядов с плотностью $\rho(M)$ в заданной области. В этих случаях формулы для $\vec{E}$, $\vec{D}$ и u имеют более сложный вид (см. [2]).

Независимо от того, какой системой электрических зарядов создано электростатическое поле, для него справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= 0, & \operatorname{div} \vec{D} &= \rho, & \vec{D} &= \epsilon \cdot \vec{E}, \\ \oint_L \vec{E} d\vec{z} &= 0, & \oint_S (\vec{D} \cdot \vec{n}) ds &= Q, \end{aligned} \quad (48)$$

где Q - суммарный заряд в области, ограниченной поверхностью S , ρ - объемная плотность заряда.

3. Электромагнитное поле постоянного тока. Движение электрических зарядов сопровождается другим физическим полем - магнитным.

Основными характеристиками магнитного поля в каждой его точке являются: $\vec{H}$ - напряженность магнитного поля, $\vec{B}$ - магнитная индукция.

В изотропной среде между векторами $\vec{H}$ и $\vec{B}$ существует зависимость, выражаемая формулой $\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$, где μ - абсолютная магнитная проницаемость среды.

В основе теории электромагнитного поля постоянного тока лежит закон Био-Савара. В дифференциальной форме этот закон имеет вид:

$$d\vec{H}(M) = \vec{I} \cdot \frac{d\vec{s} \times \vec{r}_0}{4\pi r^2},$$

где $\vec{I}$ - сила тока, $d\vec{s}$ - элемент провода, по которому течет ток, $\vec{r}_0$ - расстояние от элемента $d\vec{s}$ до точки M , $\vec{r}_0$ - единичный вектор направления от $d\vec{s}$ к M .

В частности, если электрический ток силой $\vec{I}$ течет по прямолинейному проводу бесконечно большой длины, то векторное поле магнитной напряженности будет плоско-параллельным и определится формулой

$$\vec{H}(M) = \frac{I}{2\pi r^2} (-y\vec{i} + x\vec{j}), \quad \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}. \quad (49)$$

При изучении магнитного поля важное значение имеет прин-

цип непрерывности магнитного потока, утверждающий, что линии магнитной индукции не имеют ни начала, ни конца. В природе не существует магнитных масс, являющихся источниками линий магнитной индукции. Магнитное поле порождается только электрическими токами, и линии магнитной индукции, окружающие токи, всегда непрерывны и замкнуты. Математическим выражением этого факта являются следующие соотношения: $\operatorname{div} \vec{B} = 0$, $\oint_S (\vec{B} \cdot \vec{n}) ds = 0$.

Около провода, по которому течет ток, возникает также и электрическое поле, которое характеризуется уравнениями (48).

Таким образом, для электромагнитного поля постоянного тока имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= 0, & \operatorname{div} \vec{D} &= \rho, & \vec{D} &= \epsilon \vec{E}, & \vec{\delta} &= \gamma \vec{E}, \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{\delta}, & \operatorname{div} \vec{B} &= 0, & \vec{B} &= \mu \cdot \vec{H}, \\ \oint_L \vec{E} d\vec{r} &= 0, & \oint_S (\vec{D} \cdot \vec{n}) ds &= 0, \\ \oint_L \vec{H} d\vec{r} &= I, & \oint_S (\vec{B} \cdot \vec{n}) ds &= 0, \end{aligned} \quad (50)$$

где $\vec{\delta}$ - вектор плотности тока проводимости, γ - удельная проводимость.

Формула $\oint_L \vec{H} d\vec{r} = I$ называется законом полного тока.

ОТВЕТЫ

Задачи уровня А

1. 1) Парабола $y = (6x - x^2)/9$, $z = 1$; $\vec{V} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{W} = -2\vec{j}$;
2) эллипс $x^2/4 + z^2 = 1$, $y = 3$; $\vec{V} = 2\vec{i}$, $\vec{W} = \vec{k}$; 3) прямая $\frac{x+2}{3} = \frac{z-5}{4} = \frac{y-1}{1}$,
 $\vec{V} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{W} = 0$; 4) винтовая линия $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$;
 $\vec{V} = -\vec{i} + \vec{k}$, $\vec{W} = \vec{j}$; 5) прямая $\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-5}{4}$; $\vec{V} = -2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{W} = 4\vec{i} - 6\vec{j} + 8\vec{k}$; 6) эллипс $y^2/25 + z^2/16 = 1$, $x = 2$; $\vec{V} = -4\vec{k}$, $\vec{W} = 5\vec{j}$; 7) парабола $y = (12x - x^2)/9$, $z = 5$; $\vec{V} = 3\vec{i}$, $\vec{W} = -2\vec{j}$.

2. 1) Семейство гипербол $y = c/x$; $y = 3/x$; 2) семейство прямых $2x - y = c$; $2x - y = 3$; 3) семейство парабол $x = c - y^2$; $x = 1 - y^2$;
4) семейство парабол $y = cx^2$; $y = -x^2$; 5) семейство гипербол $x^2 - y^2 = c$; $x^2 - y^2 = 4$; 6) семейство окружностей $(x+1)^2 + y^2 = C$ ($C > 0$); $(x+1)^2 + y^2 = 10$; 7) семейство эллипсов $x^2 + y^2/2 = c$ ($c > 0$); $x^2 + y^2/2 = 3$.

3. 1) Семейство параллельных плоскостей $x+3y-5z=c$; 2) семейство параболоидов $x^2+y^2=c$; 3) семейство параболоидов $x^2+y^2=c$; 4) семейство эллиптических цилиндров $2y^2+9z^2=c$ ($c>0$); 5) семейство сфер с центром в начале координат $x^2+y^2+z^2=c$ ($c>0$); 6) семейство эллипсоидов $x^2/4+y^2/9+z^2/16=c$ ($c>0$); 7) семейство параллельных плоскостей $x-4y+z=c$.

4. 1) а) 2,6; б) 1; 2) а) $-\sqrt{2}$; б) $4/\sqrt{5}$; 3) а) $-11/4$; б) $-\sqrt{3}/3$; 4) а) $-9\sqrt{3}/2$; б) 12; 5) а) $\sqrt{2}/2$; б) $-16/\sqrt{21}$; 6) а) $(\sqrt{3}+1)/4$; б) $\sqrt{15}/5$; 7) а) $(\sqrt{3}-1)/4$; б) $30/\sqrt{29}$.

5. 1) а) $-0,5\vec{i}+0,5\vec{j}$; $\sqrt{0,5}$; б) $6\vec{i}-4\vec{j}-6\vec{k}$; $\sqrt{88}$; 2) а) $(2\vec{i}+\vec{j})/3$; $\sqrt{5}/3$; б) $\vec{i}-\vec{j}-15\vec{k}$; $\sqrt{227}$; 3) а) $3\vec{i}+1,5\vec{j}$; $3\sqrt{5}/2$; б) $(2\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k})/3$; $2\sqrt{3}/3$; 4) а) $4\vec{i}+\vec{j}$; $\sqrt{2}$; б) $4+8\vec{j}-6\vec{k}$; $\sqrt{101}$; 5) а) $-\vec{i}-\vec{j}$; $\sqrt{2}$; б) $(2\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k})/27$; $1/9$; 6) а) $0,5\vec{i}-\vec{j}$; $\sqrt{5}/2$; б) $3\vec{i}-8\vec{j}-2\vec{k}$; $\sqrt{77}$; 7) а) $2\vec{i}-2,25\vec{j}$; $\sqrt{145}/4$; б) $(-\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})/6$; $1/\sqrt{6}$.

6. х) $x^2+y^2=c_1$, ($c_1>0$), $z=c_2$; 2) $y^2=2x+c_1$, $z=c_2$; 3) $xy=c_1$; $z=c_2$, при $c_1=0$ - координатные оси; 4) $x^2=c_1y$, $z=c_2$; 5) $1/x-1/y=c_1$, $z=c_2$; 6) $x^2+y^2=c_1$, ($c_1>0$), $z=c_2$; 7) $y^2=c_1x$, $z=c_2$.

7. 1) -3; 2) $c\pi R^2$; 3) $-189/2$; 4) 15; 5) $-6\pi a^2$; 6) 0; 7) $2\pi R^2 H$.

8. 1) $2x-2y^2$; M_1 -сток, M_2 -источник; 2) $1-2y^2+x$; M_1 -источник, M_2 -сток; 3) $2x-3xy^2+1$; M_2 -источник, M_3 -сток; 4) $2y-z+x^2-y^2$; M_1 -сток, M_2 -источник; 5) $2y-2yz+x^2$; M_2 -сток, M_3 -источник; 6) $-2y+6xz$; M_1 -источник, M_3 -сток; 7) $2x-2y+4z$; M_1 -сток, M_2 -источник.

9. 1) π ; 2) $-1/6$; 3) 8π ; 4) $-2/3$; 5) $-\pi$; 6) 16; 7) 2.

10. 1) $4/15$; 2) $-4/3$; 3) $4a^3/3$; 4) -4π ; 5) 0; 6) $\pi a^4/4$; 7) -1.

11. 1) а) 3; б) $1/35$; 2) а) 0; б) $1/6$; 3) а) $-e$; б) $-5/4$; 4) а) $-\pi$; б) 2π ; 5) а) $155/6$; б) 82; 6) а) $-15/3$; б) 0; 7) а) 24; б) $33/2$.

Упражнения уровня А

1. 1) прямая; 2) окружность; 2. $d\vec{a}(t) = dx(t)\vec{i} + dy(t)\vec{j} + dz(t)\vec{k}$; 3. $\vec{n} = \pm \frac{\text{grad}(z-f(x,y))}{|\text{grad}(z-f(x,y))|}$ ($\vec{n} = \pm \frac{\text{grad}(x-\varphi(z,y))}{|\text{grad}(x-\varphi(z,y))|}$);

4) 1) мощность источников равна мощности стоков; 2) мощность источников больше мощности стоков; 3) мощность стоков больше

мощности источников; 5. $\Pi_3(\vec{F}) = 0$.

Задачи уровня Б

I. 1) Правая ветвь гиперболы $x^2/16 - y^2/9 = 1$, $y = -1$; 2) окружность $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, $x - y = 0$; 2. $|\vec{v}| = \omega \sqrt{a^2 + h^2}$, $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ - угловая скорость вращения винта; 3. Семейство прямых $y = x \tan \alpha - c$ ($c > 0$); 4. Семейство конусов $\vec{z} = (x^2 + y^2) \cdot \sin^2 \alpha$, кроме точки $0(0; 0; 0)$; 2) пучок плоскостей $a_1x + a_2y + a_3z = c$ ($b_1x + b_2y + b_3z$); 5. 1) $\vec{n} = \pm(\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k})/3$; 2) $\vec{n} = \pm(2\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k})/\sqrt{17}$; 7. -4; 8. 1) семейство линий пересечений гиперболических цилиндров $y^2 - x^2 = c_1$, $z^2 - x^2 = c_2$; 2) семейство окружностей $x^2 + y^2 + z^2 = c_1$, $x + y + z = c_2$; 9. $\text{div } \vec{D}(M) = 0$, кроме $0(0; 0; 0)$, где $\text{div } \vec{D}(0) = \infty$; 10. 1) 0; 2) $-\frac{2}{3}\pi R^2$; II. 1) $1194\frac{2}{3}$; 2) $\pi/2$; 3) $\pi R^2 H(3R^2 - 4H^2)/10$; 4) -16π ; 5) $\pi - 2$; 12. $-\pi$; 13. $-41/30$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пчелин Б.К. Специальные разделы высшей математики. - М.: Высшая школа, 1973.
2. Пчелин Б.К. Векторный анализ для инженеров-электриков и радиостов. - М.: Энергия, 1968.
3. Колобов А.М., Черенкова Л.П. Избранные главы высшей математики, ч. 2. - Мн.: Вышэйшая школа, 1967.
4. Кальницкий Л.А., Добротин Л.А., Жевержев В.Ф. Специальный курс высшей математики для вузов. - М.: Высшая школа, 1968.
5. Адзерихо С.А., Полонский И.М., Стодольник Н.А. Введение в линейную алгебру, теорию поля и ряды Фурье. - Мн.: Вышэйшая школа, 1968.
6. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Векторный анализ. - М.: Наука, 1978.
7. Болгов В.А., Демидович Б.П., Ефимов А.В. и др. Сборник задач по математике для вузов, ч. 2. - М.: Наука, 1981.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
I. Задания для самостоятельной работы	
I.1. Вопросы уровня А	4
I.2. Задачи уровня А	5
I.3. Упражнения уровня А	10

1.4. Вопросы уровня Б	11
1.5. Задачи уровня Б	11
1.6. Упражнения уровня Б	13
1.7. Упражнения уровня С	15
2. Теоретические сведения и решения типовых задач	
2.1. Векторная функция действительной переменной (А) 17	
2.2. Скалярное поле. Поверхности и линии уровня (А)..19	
2.3. Производная по направлению и градиент скалярно- го поля (А)	20
2.4. Векторное поле, векторные линии (А)	23
2.5. Поток и дивергенция векторного поля. Теорема Гаусса-Остроградского (А)	26
2.6. Соленоидальное векторное поле (А)	30
2.7. Циркуляция и ротор векторного поля. Теорема Стокса. Формула Грина (А)	31
2.8. Потенциальное векторное поле (А)	34
2.9. Вычисление потока векторного поля путем про- ектирования поверхности на одну из координатных плос- костей (Б)	37
2.10. Вычисление потока векторного поля путем про- ектирования поверхности на все три координатные плос- кости (Б)	41
2.11. Инвариантные определения и свойства диверген- ции и ротора (Б)	43
2.12. Оператор Гамильтона (Б)	45
2.13. Гармоническое поле. Оператор Лапласа (Б)... 47	
Приложение I	48
Приложение 2	49
Ответы	51
Литература	53

ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Составители: Гончарова Валентина Арсеньевна,

Зверович Людмила Феликсовна

Редактор М.Ф.Мурашко. Корректор Е.В.Шакирзянова.

Подписано в печать 27.II.91. Формат 60x84¹/16.

Печать офсетная. Усл. печ. л. 3,6. Усл. кр.-отт. 3,6. Уч.-изд. л. 3,1.

Тираж 300 экз. Заказ 515 . Бесплатно .

Белорусский ордена Трудового Красного Знамени технологический институт им.С.М.Кирова. 220630. Минск,Свердлова,13а.

Отпечатано на ротапринте Белорусского ордена Трудового Красного Знамени технологического института им.С.М.Кирова.
220630. Минск,Свердлова,13.