

517

М 54

Министерство народного образования БССР
БЕЛОРУССКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМЕНИ С.М.КИРОВА

Кафедра высшей математики .

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ПО РАЗДЕЛУ " ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ ОДНОЙ
ПЕРЕМЕННОЙ" ДИСЦИПЛИНЫ " ВЫСШАЯ
МАТЕМАТИКА "
для студентов всех специальностей

Минск 1989

УДК 519.2

Рассмотрено и рекомендовано к печати на редакционно-издательском совете института.

Составители: В.А.Гончарова,
М.А.Зотова.

Научный редактор доцент
В.В.Игнатенко.
Рецензент доцент кафедры вычис-
лительной техники
Н.Н.Пустовалова.

По тематическому плану внутривузовских изданий учебно-методической литературы на 1989 год. Поз. 55 (23).

Для студентов всех специальностей.

с. ордена Трудового
Знамени технол.
Кирова, 1989

ВВЕДЕНИЕ

Цель методических указаний – оказание помощи студентам в овладении методами и приемами решения типовых примеров и задач по теме "Производная функции одной переменной" курса "Высшая математика".

В работе приводится теоретический материал на уровне А, решение типовых примеров уровня А, задачи и упражнения для самостоятельной работы (уровни А, Б, С). Для усвоения материала на уровне А достаточно данного пособия, для решения задач и упражнений на уровнях Б и С требуется дополнительная литература.

Методические указания могут быть использованы на практических занятиях, а также для самостоятельной работы.

1. ПОНЯТИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

Пусть функция $y=f(x)$ определена и непрерывна в окрестности точки x_0 , а x – некоторая точка из этой окрестности.

Обозначим через $\Delta x = x - x_0$, через $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ и будем называть Δx – приращением аргумента, Δy – приращением функции в точке x_0 .

1.1. Определение. Производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется число, которое обозначается $f'(x_0)$ и равно конечному пределу отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

По определению

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (I)$$

Если предел (I) не существует или равен бесконечности, то функция $f(x)$ не имеет производной в точке x_0 .

1.2. Определение. Пусть функция $f(x)$ определена на некотором интервале $(a; b)$ и имеет производную в каждой точке этого интервала. Функция $f'(x)$, определенная в каждой точке x интервала $(a; b)$ формулой

Библиотека БГТУ



000000139055b

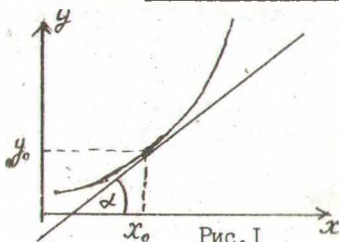
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad (2)$$

называется производной функцией (или просто производной, или производной первого порядка) от $f(x)$.

Кроме $f'(x)$, для производной функции $y=f(x)$ используют также следующие обозначения: $y'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df}{dx}$, $\dot{y}$.

Операция нахождения производной называется дифференцированием функции.

1.3. Геометрический смысл производной. Производная $f'(x_0)$



равна угловому коэффициенту касательной к кривой $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$, где $y_0=f(x_0)$, т.е. $k_{кас} = \tan \alpha = f'(x_0)$ (рис. I).

Уравнение касательной к кривой $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$

имеет вид $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

(3)

1.4. Механический смысл производной. Пусть материальная точка движется по прямой так, что в каждый момент времени t она находится на расстоянии $S(t)$ от некоторой начальной точки O_x . Функция $S(t)$ называется законом движения. Производная функции $S(t)$ в точке t равна мгновенной скорости движения в момент времени t , т.е. $S'(t) = v(t)$.

1.5. Пример. Найти по определению производную функции $y=x^2+3x$ в точке x_0 .

Решение. Найдем приращение функции Δy в точке x_0 , отвечающее приращению аргумента Δx : $f(x_0) = x_0^2 + 3x_0$; $f(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^2 + 3(x_0 + \Delta x)$; $\Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 + 3(x_0 + \Delta x) - x_0^2 - 3x_0 = 2x_0\Delta x + 3\Delta x + (\Delta x)^2$.

По формуле (1) производная $f'(x_0)$ будет равна $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x_0\Delta x + 3\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x_0 + 3$.

Так как $f'(x_0) = 2x_0 + 3$ при любом x_0 , то $(x^2 + 3x)' = 2x + 3$.

1.6. Пример. Найти по определению производную функции

$$y = \frac{1}{x}.$$

Решение. Имеем $f(x) = \frac{1}{x}$; $f(x+\Delta x) = \frac{1}{x+\Delta x}$.

$$\Delta y = \frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}.$$

По формуле (2) находим

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x+\Delta x)} = -\frac{1}{x^2}.$$

1.7. Пример. Найти по определению производную функции

$$y = \sin x.$$

Решение. Имеем $f(x) = \sin x$; $f(x+\Delta x) = \sin(x+\Delta x)$. Используя формулу (2) и первый замечательный предел, находим $(\sin x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos(x + \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos(x + \frac{\Delta x}{2}) = \cos x.$$

1.8. Пример. Найти по определению производную функции

$$y = \ln x.$$

Решение. Имеем $f(x) = \ln x$, $f(x+\Delta x) = \ln(x+\Delta x)$. Используя формулу (2) и второй замечательный предел, получим

$$\begin{aligned} (\ln x)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+\Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \ln \left(\frac{x+\Delta x}{x} \right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \\ &= \ln \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x} \cdot \frac{1}{x}} = \ln e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

1.9. Пример. Найти касательную к кривой $y = \ln x$ в точке $M(e; 1)$.

Решение. Воспользуемся уравнением касательной (3). В нашем случае $x_0 = e$, $y_0 = 1$. Найдем $f'(x_0)$. Имеем $f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$; $f'(e) = \frac{1}{e}$. Следовательно, искомое уравнение имеет вид

$$y - 1 = \frac{1}{e}(x - e); \quad y - 1 = \frac{x}{e} - 1; \quad x - ey = 0.$$

1.10. Пример. Зависимость пути от времени при прямолинейном движении точки задана уравнением $S = t^2 + 3t$ (t - в сек, S - в м). Найти скорость движения в конце пятой секунды.

Решение. Скорость в произвольный момент времени t будет равна (см. I.4): $v(t) = s'(t) = 2t + 3$. В конце 5-й секунды эта скорость равна

$$v(5) = 2 \cdot 5 + 3 = 13 \text{ (м/сек)}.$$

2. ОСНОВНЫЕ ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Если C - постоянная величина и функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют производные, то:

$$1. (C)' = 0$$

$$2. (u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$3. (uv)' = u'v + uv'$$

$$4. (cu)' = C \cdot u'$$

$$5. \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$6. \left(\frac{C}{v}\right)' = \frac{-Cv'}{v^2}$$

Рассмотрим примеры на нахождение производных с использованием правил I-7.

2.1. Пример. Найти производную функции $y = \log_a x$.

Решение. Воспользуемся формулой перехода к логарифму по новому основанию, формулой (I.8) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, и найдем производную, применяя правило 4. Получим

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a} (\ln x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln a}.$$

2.2. Пример. Найти производную функции $y = 3 \ln x - \log_2 x + \sqrt{8}$.

Решение. Имеем (I.7, 2.1) $(\ln x)' = \cos x$; $(\log_2 x)' = \frac{1}{x \ln 2}$

Для нахождения производной данной функций последовательно применяем правила 2, 4, I. Получим

$$\begin{aligned} (3 \ln x - \log_2 x + \sqrt{8})' &= (3 \ln x)' - (\log_2 x)' + (\sqrt{8})' \\ &= 3(\ln x)' - \frac{1}{x \ln 2} + 0 = 3 \cos x - \frac{1}{x \ln 2}. \end{aligned}$$

2.3. Пример. Найти производную функции $y = \operatorname{tg} x$, если $(\cos x)' = -\sin x$.

Решение. Выразим $\operatorname{tg} x$ через $\sin x$ и $\cos x$, воспользуемся правилом 5 нахождения производной частного двух функций. В нашем примере $u = \sin x$, $v = \cos x$. Получим

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

2.4. Пример. Найти производную функции $y = (x^2 + 3x) \cdot \operatorname{tg} x$

Решение. Имеем (1.5, 2.3) $(x^2 + 3x)' = 2x + 3$; $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

Вспользуемся правилом 3 нахождения производной произведения двух функций. Положив $u = x^2 + 3$, $v = \operatorname{tg} x$, получим

$$(x^2 + 3x) \operatorname{tg} x' = (x^2 + 3x)' \operatorname{tg} x + (x^2 + 3x) (\operatorname{tg} x)' = (2x + 3) \cdot \operatorname{tg} x + \frac{x^2 + 3x}{\cos^2 x}$$

2.5. Пример. Найти производную функции $y = \frac{5}{3 - \ln x}$

Решение. Найдем производную данной функции, применяя последовательно правила 6, 2, 1 и формулу $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. Получим

$$\left(\frac{5}{3 - \ln x} \right)' = - \frac{5(3 - \ln x)'}{(3 - \ln x)^2} = - \frac{5 \cdot (-\frac{1}{x})}{(3 - \ln x)^2} = \frac{5}{x(3 - \ln x)^2}$$

3. ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Установим правило, позволяющее найти производную сложной функции $y = y(u(x))$ в точке x при условии, что известны производные составляющих ее функций $y = y(u)$ и $u = u(x)$ в точках x и $u = u(x)$ соответственно.

3.1. Теорема. Пусть функция $u = u(x)$ имеет производную в точке x , а функция $y = y(u)$ имеет производную в соответствующей точке u . Тогда сложная функция $y = y(u(x))$ имеет производную в точке x и эта производная может быть найдена по формуле

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x \quad (4)$$

3.2. Замечание. Если в формуле (4) функция $u(x)$ в свою очередь является сложной функцией, то к ней применяется правило дифференцирования сложной функции (4).

Для удобства применения правила дифференцирования сложной функции ниже приводится таблица производных функций $y[u(x)]$, где $y(u)$ — основная элементарная функция, а $u(x)$ — любая функция, имеющая производную.

Таблица 1

$$1. (u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'; \quad \alpha = \text{const} \quad 6. (\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$$

$$\begin{array}{ll}
 2. (a^u)' = a^u \ln a \cdot u' & 7. (\operatorname{ctg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u} \\
 2a. (e^u)' = e^u \cdot u' & 8. (\operatorname{arcsin} u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u' \\
 3. (\log_a |u|)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u' & 9. (\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u' \\
 3a. (\ln |u|)' = \frac{1}{u} \cdot u' & 10. (\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u' \\
 4. (\sin u)' = \cos u \cdot u' & 11. (\operatorname{arccotg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u' \\
 5. (\cos u)' = -\sin u \cdot u'
 \end{array}$$

В частности, $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$; $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

Рассмотрим примеры на нахождение производных сложных функций.

3.3. Пример. Найти производную функции $y = \sin \ln x$.

Решение. Данная функция является суперпозицией двух функций: $y = \sin u$; $u = \ln x$.

Обе эти функции имеют производные: $y_u' = (\sin u)' = \cos u$; $u_x' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$, следовательно, применяя формулу (4), получим

$$y_x' = \cos u \cdot u_x' = \cos \ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cos \ln x.$$

3.4. Пример. Найти производную функции $y = \sqrt{x^2 + 1}$.

Решение. Имеем $y = \sqrt{u}$, $u = x^2 + 1$. Обе функции имеют производные $y_u' = \frac{1}{2\sqrt{u}}$, $u_x' = (x^2 + 1)' = 2x$, следовательно,

$$y_x' = (\sqrt{x^2 + 1})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u_x' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

3.5. Пример. Найти производную функции $y = \arccos \frac{1}{x}$.

Решение. Имеем $y = \arccos u$, $u = \frac{1}{x}$, следовательно,

$$y_x' = (\arccos \frac{1}{x})' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u_x' = -\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{1}{x})^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x \sqrt{x^2 - 1}}.$$

3.6. Пример. Найти производную функции $y = \ln \cos x^2$.

Решение. Здесь $y = \ln u$, $u = \cos x^2$. Имеем

$$y_x' = \frac{1}{u} \cdot u_x' = \frac{1}{\cos x^2} \cdot (\cos x^2)'$$

Чтобы найти производную $(\cos x^2)'$, нужно второй раз применить правило дифференцирования сложной функции (4). Получим $(\cos x^2)' = -\sin x^2 \cdot (x^2)' = -\sin x^2 \cdot 2x$

Окончательно:

$$y' = (\ln \cos x^2)' = \frac{1}{\cos x^2} (-\sin x^2) \cdot 2x = -2x \operatorname{tg} x^2$$

3.7. Пример. Найти производную функции $y = e^{\operatorname{tg}^3 x}$

Решение. Данная функция является суперпозицией трех функций $y = e^u$, $u = v^3$, $v = \operatorname{tg} x$.

Дважды применяя правило дифференцирования сложной функции, получим

$$(e^{\operatorname{tg}^3 x})' = e^{\operatorname{tg}^3 x} \cdot (\operatorname{tg}^3 x)' = e^{\operatorname{tg}^3 x} \cdot 3 \operatorname{tg}^2 x \cdot (\operatorname{tg} x)' = \frac{e^{\operatorname{tg}^3 x} 3 \operatorname{tg}^2 x}{\cos^4 x}$$

3.8. Пример. Найти производную функции $y = \sqrt[5]{\operatorname{arctg} 3^x}$

Решение. Имеем $y = \sqrt[5]{u}$, $u = \operatorname{arctg} v$, $v = 3^x$, следовательно-

$$\begin{aligned} \text{но,} \\ (\sqrt[5]{\operatorname{arctg} 3^x})' &= \frac{1}{5} (\operatorname{arctg} 3^x)^{-\frac{4}{5}} (\operatorname{arctg} 3^x)' = \frac{1}{5} (\operatorname{arctg} 3^x)^{-\frac{4}{5}} \cdot \\ &\cdot \frac{1}{1+(3^x)^2} \cdot (3^x)' = \frac{1}{5} (\operatorname{arctg} 3^x)^{-\frac{4}{5}} \cdot \frac{1}{1+(3^x)^2} \cdot 3^x \ln 3 \end{aligned}$$

4. ЛОГАРИФИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Логарифмическое дифференцирование удобно применять в тех случаях, когда требуется найти производную произведения нескольких функций или дроби, числитель и знаменатель которой содержат произведения, а также при нахождении производных степенно показательных функций, т.е. функций вида

$$y = [u(x)]^{v(x)}$$

Метод логарифмического дифференцирования заключается в следующем:

1) исходную функцию $y = f(x)$ логарифмируем: $\ln y = \ln f(x)$;

2) полученное равенство дифференцируем по x , применяя правило нахождения производной сложной функции (4):

$$\frac{1}{y} \cdot y' = (\ln f(x))'_x;$$

3) из последнего равенства находим производную y'_x :

$$y'_x = f(x) \cdot (\ln f(x))'_x$$

Рассмотрим примеры на применение метода логарифмического дифференцирования.

4.1. Пример. Найти производную функции

$$y = \frac{(x+3) \sqrt[3]{x^2+1} \cdot e^x}{\sqrt[3]{6-x}^2}$$

Решение. Применяя правила логарифмирования частного, произведения, степени, найдем $\ln y$. Получим

$$\ln y = \ln(x+3) + \frac{1}{3} \ln(x^2+1) + x - \frac{2}{3} \ln(6-x)$$

Полученное равенство продифференцируем по x :

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{x+3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2x}{x^2+1} + 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6-x} \cdot (-1)$$

Умножив обе части последнего равенства на y , найдем искомую производную:

$$y' = \left(\frac{1}{x+3} + \frac{2x}{3(x^2+1)} + 1 + \frac{2}{3(6-x)} \right) \frac{(x+3) \sqrt[3]{x^2+1} e^x}{\sqrt[3]{6-x}^2}$$

4.2. Пример. Найти производную степенно показательной функции

$$y = (\sin x)^{\sqrt{x}}$$

Решение. Имеем $\ln y = \sqrt{x} \ln(\sin x)$:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln(\sin x) + \sqrt{x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$y' = \left(\frac{\ln(\sin x)}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} \operatorname{ctg} x \right) (\sin x)^{\sqrt{x}}$$

4.3. Замечание. Метод логарифмического дифференцирования можно применять и в том случае, когда $f(x)$ принимает отрицательные значения. Нужно только брать $\ln |f(x)|$ и иметь в виду, что $(\ln |u|)' = \frac{1}{u} \cdot u'$

5. ВОПРОСЫ, ЗАДАЧИ

- 1 (А). Дайте определение производной функции $y=f(x)$ в точке x_0 , в точке x , на интервале (a, b) .
- 2 (А). Укажите геометрический и механический смысл производной.
- 3 (А). Сформулируйте основные правила дифференцирования.
- 4 (А). Запишите производные основных элементарных функций.
- 5 (А). Пусть функции $u=u(x)$ и $y=f(u)$ дифференцируемы. Напишите формулу нахождения производной функции $y=f(u(x))$

в точке x .

6(A). В чем заключается метод логарифмического дифференцирования? Когда он применяется?

7(B). В какой точке нельзя провести касательную к графику функции $y = |x-4|$?

8(B). Верно ли утверждение: если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то $f(x)$ имеет производную в каждой точке $[a, b]$?

9(B). Верно ли утверждение: если $f(x)$ имеет производную в каждой точке отрезка $[a, b]$, то $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$?

Задачи

5.1(A). Используя определение, найти производные функции $y = f(x)$ в точке x и в точке x_0 .

1. $y = 2x^2 + x + 1, \quad x_0 = 3;$

2. $y = 2x^2 + 4x + 5, \quad x_0 = -1;$

3. $y = 1 - x + 3x^2, \quad x_0 = 2;$

4. $y = 2x^2 - 7x, \quad x_0 = -2;$

5. $y = 1 - 4x + 8x^2, \quad x_0 = -3;$

6. $y = 1 - x + 2x^2, \quad x_0 = 1;$

7. $y = x^2 - 4x + 5, \quad x_0 = 0.$

5.2(A). Используя таблицу производных и основные правила дифференцирования, найти производные функций.

1. а) $y = \frac{x}{2} + \frac{x}{x} + \frac{x^2}{4} - \frac{4}{x^2};$ б) $y = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} - \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \sqrt{6};$ в) $y = 1 - x\sqrt{x} + 4x^2\sqrt{x^2};$ г) $y = \frac{1}{\sqrt{x^3}} + \frac{1}{5\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt[3]{4}};$ д) $y = \frac{5\sqrt{x} + x + 1}{x^3};$ е) $y = (\sqrt{x})^x + x^{\sqrt{x}};$ ж) $y = \lg x - \ln x - \ln a \log_a x;$ з) $y = \frac{x^2 + 1}{x^2} \arctg x;$ и) $y = x \ln x \cos x;$ к) $y = \frac{x^4}{\ln x} + \frac{2}{2x-1};$ л) $y = t \lg t + t^2 \arctg t;$ м) $\rho = \frac{3^y + 3^y}{3^y - 3^y};$ н) $y = \frac{1 \cos x}{1 - 3 \sin x}.$

2. а) $y = 2x^2 + \frac{3}{x} - \frac{4}{\sqrt{x}}$
- б) $y = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{x^3} + \frac{x^2}{9} - \frac{2}{2x^2}$ в) $y = 1 - x^3\sqrt{x} + 4x^2\sqrt{x}$
- г) $y = \frac{1}{\sqrt{x^3}} + \frac{2}{5\sqrt{x}} - \frac{2x}{\sqrt[3]{4x}}$ д) $S = \frac{t^2+2}{t-2}$
- е) $z = \frac{2\varphi-3}{3} + \frac{5}{2\varphi+1}$ ж) $y = t^2 \ln t$
- з) $y = 5^x \cdot x^5$ и) $y = \frac{3e^x}{e^2+4}$ к) $y = x \arcsin x + \arccos x$
- л) $y = \frac{\operatorname{ctg} x}{2 \ln x}$ м) $y = \frac{\pi}{x \operatorname{arctg} x}$ н) $y = \frac{1+\cos x}{2 \sin x}$
3. а) $y = 4x^2 - \frac{7}{x} - 6$ б) $y = \frac{2x}{7} - \frac{3}{2x^2} + \frac{x^3}{3} - \frac{5}{2x^3}$
- в) $y = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$ г) $y = x\sqrt[3]{x} + \frac{\sqrt{x}}{x^2} - \frac{5\sqrt[5]{x^2}}{2}$
- д) $y = \frac{6}{1+3t} - \frac{5t+4}{5}$ е) $S = \frac{1-4t}{2-3t^2}$ ж) $z = 2\varphi \sin \varphi$
- з) $y = 2^x x^2 - \ln x$; $y'(1) = ?$ и) $y = x \arcsin x + \arcsin \frac{1}{3}$
- к) $y = \frac{1-e^x}{2(e^x+3)}$ л) $y = \frac{\operatorname{tg} x}{2 \cos x} + x \operatorname{ctg} x$
- м) $y = \frac{3 \cdot 2^x + 4 \cdot 3^x}{3x}$; $y'(0) = ?$
4. а) $y = \frac{3x^4}{2} + 3x^3 - 2x^2 + x - 1$
- б) $y = \frac{2}{x^3} + \frac{2x^3}{3} - \frac{4}{x} + \frac{x}{4}$ в) $y = 3x^2\sqrt{x} - \frac{4}{x\sqrt{x}}$
- г) $y = \frac{2t^2+7t-3}{t^4}$ д) $y = \frac{2x}{\sqrt{x^2}} + \frac{x^2}{3\sqrt{x}} + \sqrt[3]{5}$
- е) $S = \frac{3}{1-2t} + \frac{t-4t^2}{4}$ ж) $z = \frac{1-3\varphi}{1+2\varphi^2} + \frac{1}{1+\varphi}$; $z'(0) = ?$
- з) $y = 7xe^x + \frac{2^x}{5x^2}$ и) $y = x \sin x \cos x$
- к) $y = \frac{x \ln x}{e^x} + \ln 2$ л) $y = x^2 \operatorname{arctg} x + \frac{1}{\operatorname{arctg} x}$
- м) $y = x \log_2 x$ н) $y = x \arccos x + \log_3 5$

5. а) $y = 2x^4 - 3x^2 + 6x - 5$ б) $y = \frac{3}{2x^2} + \frac{4}{x} - \frac{5x^2}{2} + \frac{1}{x}$

в) $y = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt{x^2}}$

г) $y = \frac{x^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + x^2\sqrt{5}$

д) $y = \frac{1-7t}{4} + \frac{\sqrt{5}}{2+t^2}$

е) $z = \frac{1-2\varphi}{1-\varphi^2}$

ж) $x = \frac{3}{5-t} + \frac{t^2}{5} + \frac{1}{\ln 3}$

з) $y = x^{10} \cdot 10^x$

и) $y = x^2 \log_3 x + 2x \cos x$

к) $y = \frac{x^2 + 2^x}{e^x} \quad y'(1) = ?$

л) $y = \sqrt[3]{x} \operatorname{tg} x + \arcsin x$

м) $y = \frac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{arctg} x} + \frac{1}{\operatorname{ctg} x}$

н) $y = \frac{\sin x + 2}{\cos x}$

6. а) $y = 0.5x^8 + 3x^6 - x + 2$ б) $y = \frac{a}{x^3} - \frac{7b}{x^2} + \frac{c}{x}$

в) $y = \frac{x}{5\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{2}}$

г) $y = \frac{2t^4 - 3t^2 + 4t - 1}{t^5}$

д) $y = \frac{4x\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{x^2}{\sqrt{x}}$

е) $S = \frac{2t}{1-t^2}$ ж) $z = \frac{\arccos \varphi}{\varphi}$

з) $y = \frac{\ln x - 3}{\ln x}$

и) $y = x \log_2 x$

к) $y = x \operatorname{tg} x \operatorname{arctg} x$

л) $y = \frac{x \cos x + 5}{\sin x}; \quad y'(\frac{\pi}{2}) = ?$ м) $y = \frac{\arcsin x}{\arccos x} + \cos \frac{x}{5}$

н) $y = 5^x \log_5 x + \sqrt{3}$

7. а) $y = 3x^2 + \frac{x^5}{5} - \frac{1}{2x^2}$ б) $y = \frac{3}{4x} + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3}$

в) $y = x^2\sqrt[5]{x} - \frac{3}{x\sqrt{x}} + \frac{5}{\sqrt[5]{x^2}}$

г) $y = (2-t^2) \cos t + 2t \sin t$

д) $S = \frac{1-2t^2}{\sqrt{3}} + \frac{4}{1+5t}$ е) $z = \frac{3\varphi}{9-\varphi^2}$

ж) $y = \frac{x}{\sin x + \cos x}$

з) $y = \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{x}}{\operatorname{arctg} x}$

и) $y = x \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x$

к) $y = \sqrt{x} \ln x + 3^x x^3$ л) $y = e^x \arcsin x$

м) $y = \frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{2}$

н) $y = 2^x \log_2 x + \log_2 5$

5.3(А). Написать уравнение касательной к кривой $y=f(x)$

в точке $M_0(x_0, y_0)$.

1. $y = 2 - x - x^2$; $M_0(2; -4)$ 2. $y = (x+1)\sqrt[3]{3-x}$; $M_0(2, 3)$
3. $y = -x^2 + 4x + 1$; $M_0(-1; -4)$ 4. $y = \frac{1}{x}$; $M_0(-\frac{1}{2}; -2)$
5. $y = x - \frac{1}{x}$; $M_0(1; 0)$ 6. $y = x \ln x$; $M_0(e, e)$
7. $y = 3\sqrt[3]{x} + 2x$; $M_0(-1; -5)$

5.4 (А). Найти производные следующих функций, используя правило дифференцирования сложной функции.

1. а) $y = \arccos \frac{3x-5}{4}$ б) $y = \sqrt[3]{1 + \operatorname{tg}(x + \frac{1}{x})}$
 в) $y = \log_2(2x^2 - 7x)$ г) $y = \cos^3 4x$
 д) $y = x \cdot 10^{\arcsin 2x}$ е) $y = \sin^2 x \cdot \sin x^2$ ж) $y = \frac{1}{\operatorname{tg}^3 3x}$
 з) $S = \operatorname{arctg}^2 \frac{2}{t}$ и) $S = \ln \sin \sqrt{\frac{t-1}{t+1}} + \frac{2}{(t-t^2+3)^3}$
 к) $z = \frac{1}{2}(\operatorname{ctg}^2 \sqrt{\varphi} + \ln \sin \sqrt{\varphi})$ л) $y = \sqrt{x}$ м) $y = (\ln x)^x$, $x > 1$.
2. а) $y = x \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$ б) $y = 2 \frac{1}{4x}$ в) $y = \ln \arccos x$
 г) $y = \sqrt[3]{\ln \sin \frac{x+3}{4}}$ д) $y = \sin^4 2x$ е) $y = \frac{1}{\operatorname{arctg} e^{2x}}$
 ж) $y = x \arcsin \sqrt{1-3x}$ з) $z = \sin^2 \frac{\varphi}{3} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{3} + \operatorname{tg} \frac{\varphi}{3}$
 и) $v = \frac{t}{\sqrt{t^2 - a^2}}$ к) $y = (\cos x)^x$ л) $y = (x^2 + 1)^{\frac{1}{x}}$
 м) $z = \frac{1}{\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 4x}} + \log_2(\log_2 x)$
3. а) $y = x \cdot \sin \frac{1}{x}$ б) $y = \cos^5 3x$
 в) $u = \frac{1}{\sqrt{a^2 - v^2}} + a^2 \arccos \frac{v}{a}$ г) $y = \operatorname{ctg} \sqrt[3]{1-2x^3}$
 д) $y = \ln \sin \sqrt[3]{\operatorname{arctg} e^{3x}}$ е) $y = x \cdot 3^{\sin x}$ ж) $x = \sqrt{1 + \ln^2 t}$
 з) $x = \arcsin^2 \frac{1}{t}$ и) $y = x \sqrt{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 + \sqrt{\operatorname{ctg} \sqrt{x}}}$
 к) $y = (\cos x)^x$ л) $y = \frac{-1}{6(1-3\cos x)^2} + \frac{11}{2(3-2x)^4} + \frac{x^8}{3(1-x^2)^4}$

м) м) $y = (\arctg x)^{\sqrt{x}}$

4. а) $y = \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}$ б) $\tilde{x} = y \sin 3y + \sin^3 y$ в) $x = \lg^4 5t$

г) $y = \arcsin \frac{5}{x^2}$ д) $y = \ln^4 \sin \frac{1}{2x}$ е) $\tilde{x} = \log_3(x^2 - 4x) + x \cdot 10^{2x-3}$

ж) $\rho = \frac{\sin^2 \theta}{2 \cos \theta} + e^{\sqrt{\theta^2 - \theta}}$ з) $y = \arctg^2 \ln(3x+4)$

и) $z = 10^{\sqrt[4]{\lg 2y}}$ к) $y = (x^2 + 1)^x$ л) $y = x^{\sin x}$

м) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{\lg^5 \frac{3x}{2}}}$

5. а) $y = \sqrt{\arcsin x + \arctg^2 x}$ б) $x = \sqrt[4]{t} \cdot 2^{\frac{1}{\cos t}}$

в) $\tilde{x} = \sin^3 y \cdot \cos^2 \frac{y}{2}$ г) $y = \ln \arctg \frac{1}{x+1}$ д) $y = \frac{x}{9\sqrt{9+x^2}} +$

$+ \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}$ е) $y = (1 + \ln \sin x)^{10}$ ж) $z = \frac{1}{2}(3-y)\sqrt{1-y-y^2} +$

$+ 2 \arcsin \frac{y+1}{\sqrt{2}}$ з) $y = x e^{-x^2}$ и) $x = \frac{1}{3} \lg^3 t + \operatorname{ctg}^3 \sqrt{1+t^2}$

к) $y = (\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}$ л) $y = (1 + \frac{1}{x})^x$ м) $\tilde{x} = \sqrt{\cos y} \cdot a^{\sqrt{\cos y}}$

6. а) $y = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4$ б) $y = \ln \lg \frac{x}{2}$ в) $z = \varphi \cdot \lg^3 \frac{y}{7}$

г) $\tilde{x} = \sqrt[4]{y} \arccos \frac{1}{y}$ д) $z = 2^{\frac{1}{\sin^2 5y}}$ е) $y = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

ж) $y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 4})$ з) $x = \arcsin e^{-2t}$ и) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{(x^2 - x)^2}} + \arctg 2^{3x^2}$

к) $y = (1 - x^2) \arccos x$ л) $y = \left(\frac{x}{1+x}\right)^{x^2}$

м) $y = 5^{\frac{x^2}{3}} \cdot x$

7. а) $y = \frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}$ б) $z = \operatorname{ctg}^5 \frac{y}{2}$ в) $\tilde{x} = t \cdot 3^{-\frac{1}{t^2}}$

г) $y = \ln \sqrt{\frac{1 - \lg x}{1 + \lg x}}$ д) $\tilde{x} = 2^{\cos y^2}$ е) $y = \arctg^3 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$

ж) $x = t \sqrt{e^{\frac{2t}{t+1}}}$ з) $y = \frac{3 \operatorname{ctg} 2x}{\sin 4x}$ и) $y = (\lg 2x)^{\sin x}$

к) $y = (\sin 3x)^{\arctg 2}$ л) $y = \frac{1}{5 \sqrt{\lg^2(4+i^2 x)}}$ м) $\tilde{x} = 2^{\lg y} \cdot \operatorname{ctg}^2 y$

5.5(A). Показать, что функция $y = x e^{-x}$ удовлетворяет уравнению $xy' = (1-x)y$.

5.6(B). Пользуясь определением, найти $y'(0)$, если

1. $y = 1/x$; 2. $y = x/x$.

5.7(B). Найти производные следующих функций

1. $y = \arccos \frac{1}{x}$;

2. $y = 13x + 1$;

3. $y = e^{x^x}$;

4. $y = x^{x^x}$;

5. $f(x) = x(x-1)(x-2)\dots(x-1000)$; $f'(0) = ?$

5.8(B). По оси Ox движутся две точки, имеющие законы движения $x_1 = 100 + 5t$, $x_2 = \frac{t^2}{2}$ при $t \geq 0$. С какой скоростью удаляются эти точки друг от друга в момент встречи (x дается в см, t в сек).

5.9(B). Показать, что если $f(x)$ имеет производную при $x=a$, то $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - a f'(x)}{x - a} = f(a) - a f'(a)$.

5.10(B). Нормалью к кривой $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ называется прямая, проходящая через M_0 перпендикулярно касательной к кривой в этой точке. Выведите уравнение нормали к кривой $y=f(x)$ в точке M_0 .

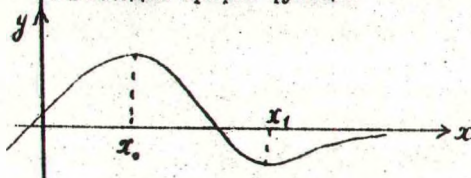
5.11(B). Можно ли утверждать, что сумма $F(x) = f(x) + g(x)$ не имеет производной в точке x_0 , если: а) функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0 , а функция $g(x)$ не имеет производной в этой точке? б) обе функции $f(x)$ и $g(x)$ не имеют производной в точке x_0 ?

5.12(B). Можно ли утверждать, что $F(x) = f(x) \cdot g(x)$ не имеет производной в точке $x = x_0$, если: а) функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0 , а функция $g(x)$ не имеет производной в этой точке? б) обе функции $f(x)$ и $g(x)$ не имеют производной в точке x_0 . Рассмотреть примеры: а) $f(x) = x$, $g(x) = 1/x$; б) $f(x) = 1/x$, $g(x) = 1/x$ при $x = 0$.

5.13(В). Доказать, что производная четной дифференцируемой функции есть функция нечетная, а производная нечетной функции есть функция четная.

5.14(В). Доказать, что производная дифференцируемой периодической функции есть функция снова периодическая с тем же периодом.

5.15(В). Дан график функции



Приближенно построить график ее производной.

5.16(В). Равенство $x^2 + 4x + 4 = 7x + 2$ имеет место при $x = 1$. Будет ли при том же значении x иметь место равенство, полученное дифференцированием данного? Пояснить ответ геометрическими соображениями.

5.17(В). Пусть $\varphi(x)$ и $f(x)$ - дифференцируемые функции от x . Найти y' , если

$$y = \log_{\varphi(x)} f(x) \quad \left(\varphi(x) > 0; f(x) > 0; \varphi(x) \neq 1 \right).$$

5.18(В). Провести касательную к гиперболе $y = \frac{x+9}{x+5}$ так, чтобы она прошла через начало координат.

5.19(С). Пользуясь определением, найти $f'(0)$, если

а) $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases};$

б) $f(x) = \begin{cases} 1-x, & x \leq 0 \\ e^{-x}, & x > 0 \end{cases}.$

5.20(С). Найти α и β , при которых функция $y = ax + \beta$ всюду дифференцируема, Построить $y'(x)$

а) $y = \begin{cases} \alpha x + \beta, & x \leq 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases};$

б) $y = \begin{cases} \alpha + \beta x^2, & |x| < 1 \\ \frac{1}{|x|}, & |x| \geq 1 \end{cases}.$

5.21(С). При каком условии функция $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$)

и $f(0) \neq 0$ а) непрерывна при $x=0$; б) дифференцируема при $x=0$; в) имеет непрерывную производную при $x=0$?

6. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Пусть функция $y=f(x)$ определена на некотором интервале (a, b) и имеет производную в каждой точке этого интервала; $f'(x)$ является функцией от x , определенной на интервале (a, b) , и можно говорить о её производной на этом интервале.

6.1. Определение. Производной второго порядка (или второй производной) функции $y=f(x)$ называется, если она существует, производная от функции $f'(x)$.

Обозначается вторая производная символами

$$y'', f''(x), \frac{d^2 y}{dx^2}, \frac{d^2 f(x)}{dx^2}, \ddot{y}.$$

По определению $y'' = (y')'$.

Производную от производной второго порядка называют производной третьего порядка и т.д.

6.2. Определение. Производной n -го порядка функции $y=f(x)$ называется, если она существует, производная от производной $(n-1)$ -го порядка этой функции.

Обозначается производная n -го порядка

$$y^{(n)}, f^{(n)}(x), \frac{d^n y}{dx^n}, \frac{d^n f(x)}{dx^n}.$$

По определению

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})'. \quad (5)$$

6.3. Механический смысл производной второго порядка.

Если функция $S = S(t)$ описывает закон движения материальной точки, то, как известно (1.4), первая производная дает мгновенную скорость в момент времени t : $v(t) = S'(t)$. В таком случае вторая производная $S''(t)$ равна скорости изменения скорости $v(t)$, т.е. равна ускорению движущейся точки в момент времени t :

$$S''(t) = v'(t) = a(t).$$

6.4. Пример. Найти производную третьего порядка функ-

ции $y = 5x^4$.

Решение. Находим первую производную и затем, применяя формулу (5), последовательно находим вторую и третью производные. Имеем $y' = (5x^4)' = 20x^3$; $y'' = (20x^3)' = 60x^2$;

$$y''' = (60x^2)' = 120x$$

6.5. Пример. Найти производные до четвертого порядка включительно функции $y = \sin^2 x$.

Решение. Имеем

$$y' = (\sin^2 x)' = 2 \sin x \cos x = \sin 2x.$$

Применяя формулу (5), находим последующие производные $y'' = (\sin 2x)' = 2 \cos 2x$; $y''' = (2 \cos 2x)' = -4 \sin 2x$;

$$y^{(iv)} = (-4 \sin 2x)' = -8 \cos 2x.$$

6.6. Пример. Показать, что функция $y = e^{x^2}$ удовлетворяет уравнению $y'' - 2xy' - 2y = 0$.

Решение. Найдем первую и вторую производные данной функции: $y' = 2xe^{x^2}$; $y'' = (2xe^{x^2})' = 2e^{x^2} + 2xe^{x^2} \cdot 2x = (2 + 4x^2)e^{x^2}$.

Подставим y , y' , y'' в заданное уравнение. Получим $y'' - 2xy' - 2y = (2 + 4x^2)e^{x^2} - 2x \cdot 2xe^{x^2} - 2e^{x^2} = (2 + 4x^2 - 4x^2 - 2)e^{x^2} \equiv 0$,

т.е. функция e^{x^2} удовлетворяет данному уравнению (является его решением).

6.7. Пример. Показать, что функция $y = x \ln x + x^3 + 2x^2$ удовлетворяет уравнению $xy''' + y'' = 12x + 4$.

Решение. Найдем первые три производные данной функции:

$$\begin{aligned} y' &= (x \ln x + x^3 + 2x^2)' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} + 3x^2 + 4x = \\ &= \ln x + 3x^2 + 4x + 1; \quad y'' = (\ln x + 3x^2 + 4x + 1)' = \frac{1}{x} + 6x + 4 \\ y''' &= \left(\frac{1}{x} + 6x + 4\right)' = -\frac{1}{x^2} + 6. \end{aligned}$$

Подставив y'' и y''' в левую часть уравнения, получим $xy''' + y'' = x(-\frac{1}{x^2} + 6) + \frac{1}{x} + 6x + 4 = 12x + 4$, т.е. функция $y = x \ln x + x^3 + 2x^2$ удовлетворяет уравнению

$xy'' + y' = 12x + 4$ (является его решением).

6.8. Пример. При прямолинейном движении точки зависимость пути от времени задана уравнением $S = \sqrt{t}$ (t - в сек, S - в м). Найти ускорение в конце четвертой секунды.

Решение. Ускорение в произвольный момент времени t равно (см. 7.3): $a(t) = S''(t)$. Имеем

$$S'(t) = (\sqrt{t})' = \frac{1}{2\sqrt{t}}; \quad S''(t) = \left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)' = \left(\frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{4\sqrt{t^3}}$$

В конце четвертой секунды ускорение будет равно

$$a(4) = S''(4) = -\frac{1}{4\sqrt{4^3}} = -\frac{1}{32} \text{ (м/сек}^2\text{)}.$$

7. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ

Иногда зависимость между x и y удобно задавать двумя уравнениями

$$\begin{cases} y = \psi(t), \\ x = \varphi(t), \end{cases} \quad (6)$$

где t - вспомогательная переменная, параметр.

Часто этим пользуются в механике, где параметр t обозначает время, а уравнения (6) представляют собой параметрические уравнения траектории движущейся точки $M(x, y)$.

Исключая из уравнений (6) параметр t , если это можно, получим y как функцию от x : $y = \psi(t(x))$, где $t(x)$ - функция обратная к $\varphi(t)$. На практике исключение параметра бывает затруднительным, а иногда и невозможным.

Приведенное ниже правило дифференцирования функции, заданной параметрически, не требует исключения параметра.

7.1. Теорема. Пусть функция y от аргумента x задана параметрически: $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases}$ Если в точке t существуют

производные x'_t , y'_t и $x'_t \neq 0$, то существует производная y'_x в точке $x = \varphi(t)$ и она равна

$$\begin{cases} y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \\ x = \varphi(t). \end{cases} \quad (7)$$

Применяя формулу (7), мы получим производную y'_x как

функцию от t : $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = f(t)$, т.е. зависимость y'_x от x также будет определяться двумя уравнениями (параметрически):

$$\begin{cases} y'_x = f(t), \\ x = \varphi(t). \end{cases} \quad (8)$$

7.2. Замечание. Для нахождения второй производной нужно применить формулу (7) к функции y'_x , заданной параметрически уравнениями (8). Получим

$$\begin{cases} y''_{xx} = (y'_x)'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}. \end{cases} \quad (9)$$

Чтобы найти производную третьего порядка y'''_{xxx} , нужно применить правило 7.1 к функции y''_{xx} и т.д.

7.3. Пример. Найти производные первого и второго порядка функции, заданной параметрически

$$y = \sin^3 t, \quad x = t - \frac{1}{2} \sin 2t.$$

Решение. Применяя формулу (7), найдем производную первого порядка:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(\sin^3 t)'}{(t - \frac{1}{2} \sin 2t)'} = \frac{3 \sin^2 t \cos t}{1 - \cos 2t} = \frac{3 \sin^2 t \cos t}{2 \sin^2 t} = \frac{3}{2} \cos t.$$

Зависимость y'_x от x определяется двумя уравнениями:

$$y'_x = \frac{3}{2} \cos t, \quad x = t - \frac{1}{2} \sin 2t.$$

Применяя формулу (9), найдем производную второго порядка:

$$\begin{aligned} y''_{xx} &= (y'_x)'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(\frac{3}{2} \cos t)'}{(t - \frac{1}{2} \sin 2t)'} = \frac{-\frac{3}{2} \sin t}{1 - \cos 2t} \\ &= \frac{-\frac{3}{2} \sin t}{2 \sin^2 t} = -\frac{3}{4 \sin t}. \end{aligned}$$

Имеем $y''_{xx} = -\frac{3}{4 \sin t}, \quad x = t - \frac{1}{2} \sin 2t.$

7.4. Пример. Найти уравнение касательной к эллипсу

$$x = 6 \cos t, \quad y = 2 \sin t$$

в точке M_0 , соответствующей значению параметра $t_0 = \frac{\pi}{4}$.

Решение. найдем координаты точки M_0 :

$$x_0 = 6 \cos \frac{\pi}{4} = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}; \quad y_0 = 2 \sin \frac{\pi}{4} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

Найдем угловой коэффициент касательной. Имеем

$$k_{\text{кас}} = y'(x_0), \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2 \cos t}{-6 \sin t} = -\frac{1}{3} \cot t.$$

Так как точке $M_0 = 3\sqrt{2}$ соответствует значение параметра $t_0 = \frac{\pi}{4}$, то $y'(x_0) = -\frac{1}{3} \cot \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{3}$.

Подставим в уравнение касательной (3) координаты точки M_0 и значение углового коэффициента:

$$y - \sqrt{2} = -\frac{1}{3}(x - 3\sqrt{2}).$$

Следовательно, уравнение касательной к данному эллипсу в точке M_0 имеет вид: $x + 3y - 6\sqrt{2} = 0$.

8. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ

Если независимая переменная x и функция y связаны уравнением вида $F(x, y) = 0$, которое не разрешено относительно y , то это уравнение определяет y как неявную функцию от x .

Несмотря на то, что уравнение $F(x, y) = 0$ не разрешено относительно y , оказывается возможным найти производную от y по x .

Правило дифференцирования неявной функции заключается в следующем: если зависимость между аргументом x и функцией этого аргумента y задана уравнением $F(x, y) = 0$, не разрешенным относительно y , то для отыскания производной от y по x надо продифференцировать это уравнение по x , считая при этом y как функцию x . Разрешая полученное таким путем уравнение, содержащее x, y, y' относительно y' , найдем выражение для y' через x и y , т.е. $y' = f(x, y)$. Для нахождения y'' необходимо продифференцировать левую и правую часть равенства $y' = f(x, y)$, считая y как функцию от x , а затем вместо y' подставить полученное ранее выражение.

В.Д. Пример. Найти y' , если $x^3 + y^3 - 3axy = 0$

Дифференцируем по x : $(x^3)' + (y^3)' - (3axy)' = 0'$

$$3x^2 + 3y^2 \cdot y' - 3a(x'y + xy') = 0.$$

Отсюда

$$3y^2 y' - 3axy' = 3ay - 3x^2,$$

$$y' = \frac{3(ay - x^2)}{3(y^2 - ax)} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$$

8.2. Пример. Пусть $x \cdot e^y + y = a$. Найти y'
 Дифференцируем по x : $(x \cdot e^y)' + y' = a'$

$$x' \cdot e^y + x \cdot e^y \cdot y' + y' = 0$$

$$(x e^y + 1) y' = -e^y; \quad y' = \frac{-e^y}{x e^y + 1}$$

8.3. Пример. Пусть $3 \sin x + 4 \cos y = 5$. Найти y''
 Дифференцируем по x : $(3 \sin x)' + (4 \cos y)' = 5'$

$$3 \cos x - 4 \sin y \cdot y' = 0$$

$$y' = \frac{3 \cos x}{4 \sin y} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\cos x}{\sin y} \quad (\text{ж})$$

Дифференцируем (ж) еще раз по x :

$$y'' = \frac{3}{4} \cdot \frac{-\sin x \cdot \sin y - \cos x \cdot \cos y \cdot y'}{\sin^2 y} =$$

$$= -\frac{3}{4} \cdot \frac{\sin x \cdot \sin y + \cos x \cdot \cos y \cdot \frac{3}{4} \frac{\cos x}{\sin y}}{\sin^2 y} =$$

$$= -\frac{3}{16} \cdot \frac{4 \sin x \cdot \sin^2 y + 3 \cos x \cdot \cos y}{\sin^3 y}$$

9. ВОПРОСЫ, ЗАДАЧИ

1. Дайте определение второй производной функции $y = f(x)$, третьей производной, производной n -го порядка.

2. Каков механический смысл второй производной?

3. Как находятся первая и вторая производная функций, заданных параметрически?

4. Сформулируйте правило дифференцирования неявной функции.

Задачи

9.1 (А) Найти $\frac{dy}{dx}$ данных функций.

1. $x^2 + y^2 - 4xy = 0$

2. $xy + \sin y = 0$

3. $x^3 + y^3 - 5a(x+y) = 0$

4. $x^2 + 2xy - y^2 = 2x$

$$5. \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$6. x = 1 - 5y + y^2$$

$$7. xy^2 + x^2y = 2$$

9.2 (A). Найти тангенс угла наклона касательной к кривой в точке $M_0(x_0, y_0)$.

$$1. ye^y = e^{x+1}; \quad x_0 = 0, y_0 = 1$$

$$2. (x+y)^3 = 27(x-y) \quad x_0 = 2, y_0 = 1$$

$$3. 2^x + 2^y = 2^{x+y} \quad x_0 = 1, y_0 = 1$$

$$4. (e^y - x)^2 = x^2 + 9 \quad x_0 = -4, y_0 = 0$$

$$5. y^2 = x + \ln \frac{y}{x} \quad x_0 = 1, y_0 = 1$$

$$6. 2y = 1 + xy^2 \quad x_0 = 1, y_0 = 1$$

$$7. y/x + xy = 2 \quad x_0 = 1, y_0 = 1$$

9.3 (A). Найти $\frac{dy}{dx}$

$$1. a) \begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^2} \\ y = \frac{3at^2}{1+t^2} \end{cases};$$

$$6) \begin{cases} x = \lg t + \operatorname{ctg} t \\ y = 2 \ln \operatorname{ctg} t \end{cases}$$

$$2. a) \begin{cases} x = \sqrt[3]{1-t} \\ y = \sqrt{1-\sqrt[3]{t}} \end{cases};$$

$$6) \begin{cases} x = a(\cos t - t \sin t) \\ y = a(\sin t - t \cos t) \end{cases}$$

$$3. a) \begin{cases} x = \sin^2 t \\ y = \cos^2 t \end{cases};$$

$$6) \begin{cases} x = t \ln t \\ y = \frac{\ln t}{t} \end{cases}$$

$$4. a) \begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases};$$

$$6) \begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$$

$$5. a) \begin{cases} x = \frac{2at}{1+t^2} \\ y = \frac{a(1-t^2)}{1+t^2} \end{cases};$$

$$6) \begin{cases} x = e^{-t} \cos t \\ y = e^{-t} \sin t \end{cases}$$

$$6. a) \begin{cases} x = e^{2t} \cos^2 t \\ y = e^{2t} \sin^2 t \end{cases};$$

$$6) \begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = \sqrt[3]{t} \end{cases}$$

7. а) $\begin{cases} x = \frac{a}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right) \\ y = \frac{b}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \end{cases}$;

б) $\begin{cases} x = a \cos^2 t \\ y = a \cos t \sin t \end{cases}$

9.4 (А). Найти $\frac{d^2 y}{dx^2}$

1. а) $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$;

б) $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t^2 \end{cases}$;

в точке, где $t=0$.

в) $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;

г) $y = \ln \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$;

д) $x^4 - xy + y^4 = 1$ в точке $(0; 1)$

2. а) $\begin{cases} x = at^2 \\ y = bt^3 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} x = \frac{1}{\cos t} \\ y = \operatorname{tg} t \end{cases}$;

в) $y = \frac{1}{x^2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x}}{x}$;

г) $y = \left(\frac{2x+1}{2} \right)^3$;

д) $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0$ в точке $M(1; 1)$.

3. а) $\begin{cases} x = e^{-t} \cos t \\ y = e^{-t} \sin t \end{cases}$;

б) $\begin{cases} x = \arcsin t \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}$;

в) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$;

г) $y = \frac{1}{(1-2x)^4}$;

д) $x^2 + y^2 - 2x = 0$ в точке $M(1; 1)$.

4. а) $\begin{cases} x = e^{-at} \\ y = e^{at} \end{cases}$

в точке $M(1; 1)$; б) $\begin{cases} x = 3t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$;

в) $y = \sqrt{1-x^2} \arcsin x$; г) $y = \ln(1+\sqrt{1-x^2})$; д) $y = x + \ln y$.

5. а) $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$;

б) $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \end{cases}$

в точке $M(a; 0)$;

в) $y = \ln \operatorname{ctg} 4x$;

г) $y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \cos x \cdot \ln \operatorname{tg} x$;

д) $y^3 - y = 0, x^2$ в точке $M(0; 1)$.

б) а) $\begin{cases} x = e^{-t} \\ y = e^{2t} \end{cases}$; б) $\begin{cases} x = \arctg t \\ y = \frac{1}{2}t^2 \end{cases}$ в точке $M(-\frac{3}{4}, \frac{1}{2})$;

в) $y = x e^{x^2}$; г) $y = x \arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2x$

д) $x^3 + y^3 - 2xy = 0$ в точке $M(1; 1)$.

7. а) $\begin{cases} x = \arcsin t \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}$; б) $\begin{cases} x = e^{-t} \\ y = e^{2t} \end{cases}$ в точке $M(1; -1)$;

в) $y = x \sqrt{1+x^2}$; г) $y = x (\sin(\ln x) + \cos(\ln x))$;

д) $x^2 + y^2 = 4$ в точке $M(-2; -2)$.

9.5 (А) Найти производную указанного порядка

1. $y = \frac{a}{x^{10}}$; $y''' = ?$ 3. $y = x \ln x$; $y^{(iv)} = ?$

2. $y = \sin^2 \frac{x}{2}$; $y^{(iv)} = ?$ 4. $y = x^3 \ln x$; $y''' = ?$

б. $\rho = a \sin 2\varphi$; $\frac{d^4 \rho}{d\varphi^4} = ?$ 6. $y = \lg x$; $y''' = ?$

7. $y = \frac{x}{1+x^2}$; $y^{(iv)} = ?$

9.6 А.1. Точка движется прямолинейно по закону $S(t) = \frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{2} + 3t^2 - 4$, где S - координата точки (в м), t - время. Найти ее скорость и ускорение в момент $t = 3$ с.

Определить момент времени, когда ускорение равно нулю.

2. По прямой движутся две точки. Закон движения первой точки $S_1(t) = t^4 + 2t^3 + 5t + 1$, закон движения второй точки $S_2(t) = 12t^2$. В какой момент времени точки имеют одинаковые ускорения? (S_1 и S_2 - в м, t - в с).

3. Точка движется по прямой так, что ее расстояние S

от начального пункта через t сек равно $S = \frac{t^4}{4} - 4t^3 + 16t^2$ (м)

а) В какие моменты точка была в начальном пункте?

б) В какие моменты ее скорость равна нулю?

4. Точка движется прямолинейно, причем $S = 17t$ (м). Найти скорость и ускорение в момент $t = 9$ с.

5. Точка движется прямолинейно с переменной скоростью $v = 5\sqrt{t} - \frac{2}{t}$ (м/с). Найти скорость и ускорение в конце первой секунды.

6. Скорость точки, движущейся прямолинейно, определяется формулой $v = 5t + 3t^2$ (м/с). Какое ускорение будет иметь точка через 4 с после начала движения?

7. Материальная точка массы m движется прямолинейно по закону $S = 2t + 3t^2 + 2t^3 + t^4$. Найти действующую силу. Указание: $F = ma$. (t - в с, S - в м).

9.7 (В). Написать уравнение касательной к кривой в заданной точке.

1. $\begin{cases} x = t^3 + 1 \\ y = t^2 + t + 1 \end{cases}$ в точке при $t = 1$

2. $x^2 - 2xy + 3y^2 - 2y - 16 = 0$ в точке $A(1; 3)$.

3. $x^2 + y^2 = 25$ в точке $M(3; 4)$.

9.8 (В). Показать, что функция $y = x + \ln 2x$ удовлетворяет уравнению $y'' + 4y = 4x$.

9.9 (В). Показать, что функция $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$ при любых постоянных C_1 и C_2 удовлетворяет уравнению

$$y'' + 3y' + 2y = 0.$$

9.10 (В). Под каким углом пересекаются линии

а) $x^2 + y^2 = 8$ и $y^2 = 2x$?

б) $x^2 + y^2 - 4x = 1$ и $x^2 + y^2 + 2y = 9$?

в) $x^2 + 4y^2 = 4$ и $5x^2 = 4(1 - y)$?

9.11 (В). Написать уравнение касательной и нормали к линии

$\begin{cases} x = t^3 + 1 \\ y = t^2 + t + 1 \end{cases}$ в точке $M(2; -3)$.

9.12(В) Написать уравнение касательной и нормали к кривой $x^2 - 1xy + 3y^2 - 2y - 16 = 0$ в точке $A(1; 1)$.

9.13(В) Найти производную n -го порядка следующих функций:

а) $y = \frac{1+x}{1-x}$;

б) $y = \ln(ax, b)$.

9.14(В) Формула Лейбница, применяемая для вычисления производной n -го порядка от произведения двух функций $u(x)$ и $v(x)$, имеет вид:

$$y^{(n)} = (u \cdot v)^{(n)} = u^{(n)} \cdot v + n \cdot u^{(n-1)} \cdot v' + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} u^{(n-2)} \cdot v'' + \dots + u \cdot v^{(n)}$$

Применяя формулу Лейбница, найти $y^{(n)}$ если $y = x^2 e^{-2x}$.

9.15(В) Проверить, что функция y , определенная уравнением $\arctg \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ удовлетворяет соотношению

$$x(dy - dx) = y(dx + dy).$$

10. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке x и некоторой ее окрестности.

10.1. Определение. Функция $f(x)$ называется дифференцируемой в точке x , если приращение функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ может быть представлено в точке x в виде $A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$, т.е. $\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$. (10)

Здесь A - величина, не зависящая от Δx ; $\alpha(\Delta x)$ бесконечно малая функция высшего порядка малости, чем Δx , т.е.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x} = 0. \quad (11)$$

Если функция $y = f(x)$ имеет в точке x производную, то по теореме о связи предела с бесконечно малыми и из определения производной следует, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x) \quad \text{или}$$

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x, \quad (12)$$

где $\alpha(\Delta x) \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$.

Сравнивая формулы (10) и (12), можно сделать вывод, что функция, имеющая в точке производную, дифференцируема в этой точке. Справедливо и обратное утверждение, т.е. имеет

место теорема.

10.2. Теорема. Для того, чтобы функция $f(x)$ была дифференцируемой в точке x , необходимо и достаточно, чтобы она имела в точке x конечную производную $f'(x)$.

Функция, дифференцируемая в каждой точке интервала (a, b) , называется дифференцируемой на (a, b) .

Существует связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции.

10.3. Теорема. Если функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x , то она непрерывна в этой точке.

Действительно, если функция дифференцируема, то её приращение можно представить в виде (10), а следовательно,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (A \cdot \Delta x + o(\Delta x)) = 0,$$

т.е. $f(x)$ непрерывна в точке x .

Утверждение, обратное к теореме 10.3, несправедливо, т.е. не всякая функция, непрерывная в точке x , имеет в этой точке конечную производную.

На рис.2 изображен график непрерывной на $[-1; 1]$ функции

$y = \sqrt[3]{x^2}$. В точке $x=0$ эта функция непрерывна, но не имеет конечной производной, т.к.

$$y' = \frac{x}{3\sqrt[3]{x}} \text{ и в точке } x=0 \text{ } y'(0) = \infty.$$

Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x . Тогда

приращение Δy функции можно представить в виде $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + o(\Delta x)$, т.к. в общем случае $f'(x) \neq 0$, то при постоянном x и $\Delta x \rightarrow 0$ произведение $f'(x) \cdot \Delta x$ есть бесконечно малая величина первого порядка относительно Δx , а $o(\Delta x) \cdot \Delta x$ — есть величина более высокого порядка, чем Δx . Таким образом, приращение Δy функции состоит из двух слагаемых, из которых первое слагаемое $f'(x) \Delta x$ есть главная часть приращения, линейная относительно Δx .

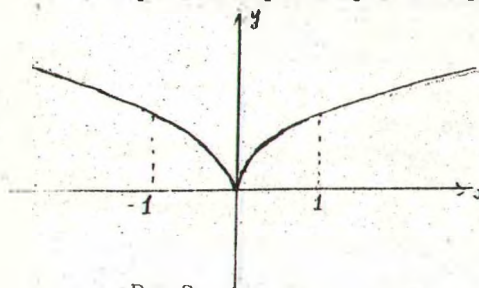


Рис.2

10.4. Определение. Если приращение Δy функции $y = f(x)$ в точке x может быть представлено по формуле (10), то главная часть приращения Δy , линейная относительно Δx называется дифференциалом этой функции и обозначается dy или $df(x)$.

Из определения следует, что

$$dy = f'(x) \Delta x.$$

Анализируя формулы (10) и (12), можно сделать вывод, что дифференциал находится по формуле

$$dy = f'(x) \Delta x. \quad (13)$$

Поскольку для функции $y=x$ имеем $dy = dx = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$, то для независимой переменной $dx = \Delta x$, и дифференциал (13) можно записать в виде

$$dy = f'(x) dx. \quad (14)$$

Из формулы (14) следует, что

$$f'(x) = \frac{dy}{dx},$$

т.е. производная функции равна частному дифференциала функции и дифференциала аргумента.

Можно показать, что формула (14) для дифференциала функции остаётся неизменной и в том случае, когда x является функцией другой переменной.

10.5. Свойство инвариантности дифференциала. Дифференциал функции равен произведению производной на дифференциал аргумента, независимо от того, является аргумент независимой переменной или функцией другой переменной.

Например, $d(\sin x) = \cos x \cdot dx$

$$d(\sin u) = \cos u \cdot du,$$

где $u(x)$ - любая дифференцируемая функция.

10.6. Геометрический смысл дифференциала. На рис.3 изображены графики некоторой дифференцируемой функции $y = f(x)$ и касательной к ней в точке $B(x_0; f(x_0))$. Выражения $\Delta x = f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)$, $dy = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ геометрически означают соответственно длины следующих отрезков: BC ; AB ; CK ; MK .

В малой окрестности точки x_0 график функции $y=f(x)$ и касательная, проведенная к нему в точке $(x_0; f(x_0))$, близки друг к другу. Из двух рассматриваемых линий касательная является более простой. Если в окрестности точки x_0 кривую заменить отрезком касательной (линеаризация функции), то для значений $f(x_0+\Delta x)$ получаем приближенную формулу

Погрешность этого приближенного равенства является бесконечно малой более высокого порядка, чем Δx . Например, для функции, изображенной на рис.3, погрешность значения $f(x_0 + \Delta x)$, вычисленного по формуле (15), равна длине отрезка KN .

Пусть C — произвольная постоянная, а u и v — дифференцируемые функции, тогда справедливы следующие формулы:

10.8. Пример. Найти дифференциал функции $y = \arctg^2 \sqrt{x}$ в произвольной точке x .

Решение. Найдем производную

$$y(x) = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x} \cdot \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}$$

Согласно формуле (14) дифференциал данной функции будет равен $dy = \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx$.

10.9. Пример. Дана функция $y = 3x^2 + 5x - 4$. Определить Δy и dy 1) при произвольных значениях x и Δx ;

2) при переходе от значения $x_0 = 4$ к значению $x_1 = 4,03$.

Решение. 1) Пусть x и Δx произвольны. Имеем

$$\begin{aligned} \Delta y &= 3(x + \Delta x)^2 + 5(x + \Delta x) - 4 - (3x^2 + 5x - 4) = 3x^2 + \\ &+ 6x \cdot \Delta x + 3\Delta x^2 + 5x + 5\Delta x - 4 - 3x^2 - 5x + 4 = \\ &= (6x + 5)\Delta x + 3\Delta x^2. \end{aligned}$$

Дифференциал данной функции будет равен

$$dy = (3x^2 + 5x - 4)' dx$$

$$dy = (6x + 5)dx, \quad (dx = \Delta x).$$

Сравнивая с Δy , видим, что dy является главной частью приращения, линейной относительно Δx . Второе слагаемое является бесконечно малой более высокого порядка, чем Δx .

2) При переходе от точки $x_0 = 4$ к точке $x_1 = 4,03$ переменная x изменяется на величину $\Delta x = 4,03 - 4 = 0,03$.

Вычислим приращение Δy и дифференциал dy при $x_0 = 4$ и $\Delta x = 0,03$. Получим

$$\Delta y = (6 \cdot 4 + 5) \cdot 0,03 + 3 \cdot (0,03)^2 = 0,8727,$$

$$dy = (6 \cdot 4 + 5) \cdot 0,03 = 0,8700.$$

Погрешность приближенного равенства $\Delta y \approx dy$ равна $0,0027$.

II. ВОПРОСЫ, ЗАДАЧИ

Вопросы

1) Дайте определение дифференциала.

2) Каков геометрический смысл дифференциала?

3) В чем состоит инвариантность формы 1^й дифференциала?

4) Дифференциал функции в некоторой точке x_0 равен нулю при любом приращении аргумента. Что означает это геометрически?

5) Для всех x некоторого отрезка $[a, b]$ дифференциал функции больше (меньше) приращения. Что можно сказать;

о графике функции на этом отрезке?

6(в) Для каких функций дифференциал тождественно равен приращению?

Задачи

II.1 (А) Найти дифференциал как главную часть приращения функции, линейную относительно Δx .

1. $y = 3 - x + 5x^2$

5. $y = 2x^2 - 7x$

2. $y = 4x^2 - 2x + 6$

6. $y = 11x^2 - 5x + 6$

3. $y = x - x^3$

7. $y = 8 - x^3$

4. $y = 1 - 2x^2 + 5x$

II.2 (А) Пользуясь формулой вычисления дифференциала, найти дифференциалы следующих функций:

1. а) $y = e^{\sin 4x}$

б) $y = \ln^2 x$ в) $y = \cos \sqrt{x} + \sqrt{x} \sin \sqrt{x}$

г) $y = x \cdot \lg \frac{3}{2x}$

д) $y = \arctg \sqrt{x^2 - 1}$

2. а) $y = a^{\cos 3x}$

б) $y = 2 \arctg \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ в) $y = \ln \cos^2 x$

г) $y = e^{-2x} (2x - 1)$

д) $y = \arctg \sqrt[3]{x^2 - 1}$

3. а) $y = 10^{1 - \cos 5x}$

б) $y = x \cdot \lg^4 \sin x$

в) $y = \sqrt{\lg \frac{x}{2}}$

г) $x = t^2 e^{\frac{1}{t^2}}$ д) $y = \arccos \sqrt{1 - 3x}$

4. а) $y = \arctg^2 \frac{1}{x}$

б) $y = \ln^2 \arccos 3x$

в) $y = x \cdot 5^{2 \sin x}$

г) $y = e^{\sqrt{1-x}}$

д) $y = \frac{1}{18} \sin^6 3x - \frac{1}{24} \sin^6$

5. а) $y = \frac{1}{\arctg e^{-2x}}$

б) $y = x \sqrt{\frac{1-x}{1+x^2}}$

в) $\zeta = \frac{5}{\sqrt[4]{(1-t^2)^3}}$

г) $y = x e^{\frac{1}{\lg^3 \frac{1}{x}}}$

д) $y = (1 + \sin^2 x)^6$

6. а) $y = \frac{1}{\lg^2 2x}$

б) $y = x \arcsin \ln x$

в) $y = \sqrt{1 + \lg(x - \frac{1}{x})}$

г) $y = \sqrt[3]{\frac{1}{1+x^2}}$ д) $y = 2 \sin^5 4x$

7. а) $y = x^2 \arccos \frac{2}{x} - 2\sqrt{x^2 - 4}$

б) $x = \arctg \frac{4}{a} + \ln \sqrt{\frac{a+y}{a-y}}$

в) $y = \log_2 \sin x$

г) $x = (e^{\frac{1}{\cos^2 x}} - 2)^3$

д) $y = 3 \frac{1}{x} + 2 \frac{1}{3x} + \sin^3 \frac{x}{2}$

11.3 (В). Сторона квадрата 8 см. На сколько увеличится его площадь, если каждую сторону увеличить на 0,5 см? на 0,1 см? Найти главную линейную часть приращения площади этого квадрата. Оценить относительную ошибку $\delta = \frac{|\Delta y - dy|}{\Delta y} \cdot 100\%$ при замене приращения его главной частью.

ОТВЕТЫ

- 5.2. 1. а) $\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2} + \frac{x}{x} + \frac{8}{x^3}$ б) $\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{x^3}} - \frac{1}{4\sqrt{x}\sqrt{x}}$
 в) $-\frac{3\sqrt{x}}{2} + \frac{3x}{3} + \frac{3}{\sqrt{x^2}}$ г) $-\frac{3}{2x\sqrt{x^3}} - \frac{1}{10x\sqrt{x}}$
 д) $-\frac{12,5}{x^3\sqrt{x}} - \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^4}$ е) $(\sqrt{x})^x \frac{\ln x}{2} + \sqrt{x} x^{12-1}$
 ж) $\frac{1}{x} (\lg x - 1) + \frac{\ln x}{x \ln 10}$ з) $\frac{x - 2 \arctg x}{x^3}$
 и) $\frac{1}{x} \ln 2x + x \cos 2x$ к) $\frac{x^3(4-x)}{e^x} - \frac{4}{(2x-1)^2}$
 л) $\operatorname{ctg} t - \frac{t}{\ln t} + 2t \arcsin t + \frac{t^2}{(1-t^2)^{3/2}}$ м) $\frac{3^4(1-4\ln 3)}{(3^4-3^2)^2}$
 н) $\frac{2}{1-\ln x}$
 2. а) $4x - \frac{3}{2x^2} + \frac{2}{x\sqrt{x}}$ б) $x^2 - \frac{9}{x^4} + \frac{2x}{9} + \frac{9}{x^3}$
 в) $-\frac{4}{3}\sqrt{x} + 10x\sqrt{x}$ г) $-\frac{3}{4x\sqrt{x^3}} - \frac{1}{3x\sqrt{x}} + \frac{4}{3\sqrt{4x}}$
 д) $\frac{t^2-4t-2}{(t-2)^2}$ е) $\frac{2}{3} - \frac{10}{(2\varphi+1)^2}$ ж) $2t \ln t + t$
 з) $5^x \ln 5 \cdot x^5 + 5^{x+1} \cdot x^4$ и) $\frac{12 e^x}{(e^x+4)^2}$ к) $\arcsin x \cdot \arccos x$
 + $\frac{x(\arccos x - \arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1+\cos^2 x}{\sin^3 x}$
 м) $-\frac{(1+x^2)\arctg x + x}{x^2 \arctg^2 x (1+x^2)}$ н) $-\frac{1+\cos x}{2 \sin^2 x}$
 3. а) $8x + \frac{7}{x^2}$ б) $\frac{2}{7} + \frac{3}{x^3} + x^2 + \frac{15}{2x^4}$
 в) $-\frac{2}{x^3} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} - \frac{2}{3x\sqrt[3]{x}}$ г) $\frac{4}{3}\sqrt{x} - \frac{3}{2x^2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x^3}}$

-35-

д) $-\frac{18}{(1+3t)^2} - 1$ е) $\frac{-12t^2 + 6t - 8}{(2-3t^2)^2}$

ж) $2(\sin \varphi + \varphi \cos \varphi)$ з) 2 и) $\arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

к) $-\frac{2e^x}{(e^x+3)^2}$ л) $\frac{\sin 2x - 2x}{\sin^2 x} + \frac{1+\sin^2 x}{2\cos^2 x}$ м) $3\ln \frac{2}{3}$

4. а) $6x^3 + 9x^2 - 4x + 1$ б) $-\frac{6}{x^2} + 2x^2 + \frac{4}{x^2} + \frac{1}{4}$

в) $\frac{21}{2}x^2\sqrt{x} + \frac{6}{x^2\sqrt{x}}$ г) $-\frac{4}{t^3} - \frac{21}{t^4} + \frac{12}{t^5}$

д) $\frac{6}{5\sqrt{x^2}} + \frac{13}{18}x\sqrt{x}$ е) $\frac{6}{(1-2t)^2} + \frac{1-8t}{4}$ ж) -4

з) $7e^x(1+x) + \frac{2}{5x^3}(x\ln 2 - 2)$ и) $\frac{1}{2}\sin 2x + x\cos 2x$

к) $\frac{\ln x(1-x)+1}{e^x}$ л) $2x \arctg x + \frac{x^2 \arctg^2 x + 1}{(1+x^2) \arctg^2 x}$

м) $\log_2 x + \frac{1}{\ln 2}$ н) $\arccos x - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

5. а) $8x^3 - 6x + 6$ б) $-\frac{3+4x+5x^4}{x^3}$ в) $-\frac{1}{4x\sqrt{x}} + \frac{2}{x^2\sqrt{x^2}}$

г) $\frac{11}{6}\sqrt{x^5} + 2\sqrt{5}x$ д) $-1 - \frac{2t\sqrt{x}}{(2+t^2)^2}$ е) $\frac{2(\varphi-1-\varphi^2)}{(7-\varphi^2)^2}$

ж) $\frac{3}{(5-t)^2} + \frac{2}{5}t$ з) $x^9 \cdot 10^x (10 + x \ln 10)$

и) $2x \log_3 x + \frac{x}{\ln 3} + 2(\cos x - x \sin x)$ к) $\frac{2\ln 2 - 1}{e}$

л) $\frac{1}{3\sqrt{x^2}} \lg x + \frac{\sqrt{x}}{\cos^2 x} + \frac{1}{(1-x^2)}$ м) $-\frac{\pi}{2(1+x^2) \arctg^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}$

н) $\frac{1+2\ln x}{\cos^2 x}$

6. а) $4x^7 + 18x^5 - 1$ б) $-\frac{3a}{x^4} + \frac{14b}{x^3} - \frac{c}{x^2}$

в) $\frac{1}{15\sqrt{x^2}} - \frac{1}{2\sqrt{x^3}}$ г) $-\frac{2}{t^2} + \frac{9}{t^4} - \frac{16}{t^5} + \frac{5}{t^6}$ д) $5\sqrt[4]{x} + \frac{5\sqrt[3]{x^2}}{3}$

е) $\frac{2(1+t^2)}{(1-t^2)^2}$ ж) $-\frac{\varphi + \sqrt{1-\varphi^2} \arccos \varphi}{\sqrt{1-\varphi^2} \cdot \varphi^2}$ з) $\frac{3}{x \ln^2 x}$

и) $\log_2 x + \frac{1}{\ln 2}$ к) $\arctg x \cdot \frac{\ln x \cos x + x}{\cos^2 x} + \frac{x \lg x}{1+x^2}$

$$\begin{aligned}
 & \text{a) } -\frac{x}{2} \quad \text{m) } \frac{x}{\arccos^2 x \sqrt{1-x^2}} \quad \text{h) } 5^{-x} \left(\ln x + \frac{1}{x \ln 5} \right) \\
 & 7. \text{ a) } 6x + x^4 + \frac{1}{x^3} \quad \text{б) } -\frac{4}{3x^2} - \frac{4}{x^3} + \frac{9}{x^4} \\
 & \text{в) } \frac{11\sqrt{x^6}}{5} + \frac{9}{2\sqrt{x^5}} - \frac{2}{\sqrt{x^2}} t^2 \sin t \quad \text{г) } -\frac{4t}{\sqrt{3}} - \frac{2t}{(1+5t)^2} \\
 & \text{е) } 3. \frac{9+y^2}{(9-y^2)^2} \quad \text{ж) } 1 + \frac{x}{2} \quad \text{з) } -\frac{\arctg \frac{1}{x}}{(1+x^2) \arctg^2 x} \\
 & \text{и) } \lg x + \ln 10 \quad \text{к) } \frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}} + 3^x (x^3 \ln 3 + 3x^4) \\
 & \text{п) } e^x \arcsin x - \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{м) } \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{x} \cos x \\
 & \text{н) } 2^x \ln x + \frac{2^x}{x \ln 2} \\
 & 5.3. \\
 & 1. 3x+y-2=0 \quad 2. y-3=0 \quad 3. 6x-y+8=0 \\
 & 4. 4x+y-4=0 \quad 5. 2x-y-2=0 \quad 6. 2x-y-2=0 \\
 & 7. 3x-y-2=0 \\
 & 5.4. \\
 & 1. \text{ a) } -\frac{3}{\sqrt{30x-9x^2-9}} \quad \text{б) } \frac{1}{\sqrt{1+x+\lg(x+\frac{1}{2})}} \\
 & \quad \frac{x^2-1}{3x^2 \cos^2(x+\frac{1}{2})} \quad \text{в) } \frac{4x-7}{2(2x^2-7x) \ln 2} \\
 & \text{г) } -12 \cos^2 4x \sin 4x \quad \text{д) } 10 \arcsin 2x \left(1 + \frac{2x \ln 10}{\sqrt{1-x^2}} \right) \\
 & \text{е) } \sin 2x \sin x^2 + 2x \sin^2 x \cos x^2 \quad \text{ж) } -\frac{9 \cos^2 3x}{\sin^4 3x} \\
 & \text{з) } \frac{-4}{x^2+4} \arctg \frac{2}{x} \quad \text{и) } \frac{1}{x^2+1} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2-1(1+t)}} - \frac{6(1-t)}{(x-t^2+3)^2} \\
 & \text{м) } -\text{ctg}^3 \sqrt[3]{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{н) } \frac{\sqrt{x}}{2x^2} (1-\ln x) \cdot u (\ln x)^x (\ln \ln x + \frac{1}{\ln x}) \\
 & 2. \text{ a) } \sqrt{\frac{1-x^2}{2+x^2}} - \frac{3x^2}{\sqrt{(1-x^2)(2+x^2)^3}} \quad \text{б) } \frac{2}{x^2} \ln 2 \left(-\frac{1}{4x^2} \right) \\
 & \text{в) } -\frac{2}{\arccos 2x \sqrt{1-4x^2}} \quad \text{г) } \frac{\text{ctg} \frac{x+3}{4}}{12 \sqrt{\ln^2 \sin \frac{x+3}{4}}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{п) } 8 \sin^3 2x \cos 2x \quad \text{е) } \frac{2e^{-2x}}{(1+e^{-4x}) \arctg^2 e^{-2x}} \\
 & \text{ж) } \arcsin \sqrt{1-3x} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3x}{1-3x}} \quad \text{з) } \frac{1}{2} \sin^4 \text{ctg} \frac{x}{3} - \frac{\sin^2 \frac{x}{3}}{3 \sin^2 \frac{x}{3}} \\
 & \text{и) } -\frac{a^2}{(x^2+a^2)^{3/2}} \quad \text{к) } (\cos x)^x (\ln \cos x - x \lg x) \\
 & \text{п) } (x^2+1)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{x^2+1} - \frac{\ln(x^2+1)}{x^2} \right) \quad \text{м) } -\frac{14}{3 \sqrt[3]{x^2+1}} \cos^2 4x + \frac{1}{x \lg_2 x \ln^2 2} \\
 & 3. \text{ a) } \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} \quad \text{б) } -15 \cos^4 3x \cdot \sin 3x \\
 & \text{в) } \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \left(\frac{x^2}{a^2} - a^2 \right) \quad \text{г) } \frac{6x^2}{5 \sqrt[5]{(1-2x^2)^4} \sin^2 \sqrt{1-2x^2}} \\
 & \text{д) } \frac{e^{3x} \text{ctg}^3 \arctg e^{3x}}{(1+e^x)^3 \sqrt{\arctg^2 e^{3x}}} \quad \text{е) } 3 \sin x (1+x \cos x \ln 3) \\
 & \text{ж) } -\frac{\ln t}{4 \sqrt{1+\ln^2 t}} \quad \text{з) } -\frac{2 \arcsin \frac{1}{t}}{t \sqrt{t^2-1}} \quad \text{и) } \frac{3-2x^2-4x}{3 \sqrt{(1+x)^5}} \\
 & \quad \frac{1}{4 \sqrt{1+\ln^2 t}} \quad \text{к) } (\cos x)^x (\ln \cos x - x \lg x) \\
 & \text{п) } \frac{4 \sqrt{\arctg^2 1x} \sin^2 1x}{\sin x} - \frac{44}{(3-2x)^3} + \frac{x^2}{(1-x^2)^5} \\
 & \text{м) } (\arctg x)^{\sqrt{x}} \left(\frac{\ln \arctg x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{(\arctg x)(1+x^2)} \right) \\
 & 4. \text{ a) } \frac{8^x - x^3}{(4-x^2)^{3/2}} \quad \text{б) } \sin 3y + 3y \cos 3y + 3 \sin^2 y \cos y \\
 & \text{в) } \frac{20 \lg^3 5x}{\cos^2 5x} \quad \text{г) } -\frac{20}{x \sqrt{x^4-25}} \cdot \arcsin \frac{5}{x^2} \\
 & \text{д) } -2 \ln^3 \sin \frac{1}{2x} \cdot \text{ctg} \frac{1}{2x} \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{2x-4}{(x^2+4x) \ln 3} + 10 \frac{2x-3}{x^2+2x} \cdot 10 \ln 10 \\
 & \text{ж) } \frac{\sin \theta (\cos^2 \theta + 1)}{2 \cos^2 \theta} + \frac{(2\theta-1) e^{10^{2-\theta}}}{2 \sqrt{\theta^2-\theta}} \quad \text{з) } \frac{6 \arctg \ln(3x+4)}{3x+4} \\
 & \quad \frac{1}{1+\ln^2(3x+4)} \quad \text{и) } 10^{\sqrt{\text{ctg} 2\theta}} \cdot \ln 10 \frac{\sin 4\theta - 4\theta}{x^2 \sin^2 2\theta} \\
 & \text{к) } (\ln(x^2+1) + \frac{2x^2}{x^2+1})^x \cdot x \sin x (\cos x \cdot (\ln x + \frac{\sin x}{x})) \\
 & \text{м) } \frac{-5}{2 \sqrt[3]{\text{ctg}^2 \frac{2x}{2}} \cdot \sin^2 \frac{3x}{2}} \quad \text{н) } \frac{2 \arctg x}{2 \sqrt{(1-x^2) \arcsin x}} + \frac{2 \arctg x}{1+x^2}
 \end{aligned}$$

- б) $2^{\cos x} \frac{4x \ln 2 \sin x + \cos^2 x}{4 \sqrt[4]{x^3 \cos^2 x}}$ в) $15 \ln^2 5y \cdot \cos 5y \cos^2 \frac{y}{2} - \frac{\sin^2 5y \sin y}{2}$
- г) $-\frac{1}{(x^2+2x+2) \operatorname{arctg} \frac{1}{x+1}}$ д) $\frac{1}{(9x^2)^{3/2}} + \frac{3}{4 \sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}$
- е) $10(1+\ln \sin x)^2 \operatorname{ctg} x$ ж) $\frac{4y^2-3y-5}{4 \sqrt{1-y-y^2}} + \frac{2}{\sqrt{1-y^2-2y}}$
- з) $e^{-x^2}(1-2x^2)$ и) $\frac{\operatorname{tg}^2 t}{\cos^2 t} - \frac{2t}{\sqrt{(1+t^2)^2-3 \sin^2 t} \sqrt{1+t^2}}$
- к) $(\sqrt{x})^{\frac{1}{2}} \frac{1-2 \ln \sqrt{x}}{2x^2}$ л) $(1+\frac{1}{x})^x (\ln(x+\frac{1}{x}) - \frac{1}{x+1})$
- м) $-\frac{a^{\cos y} \sin y}{2 \sqrt{\cos y}} (1+\sqrt{\cos y} \ln a)$
6. а) $4(\frac{x-1}{x+1})^3 \cdot \frac{2}{(x+1)^2}$ б) $\frac{1}{\ln x}$
- в) $\operatorname{tg} \frac{3y}{7} + \frac{3y \operatorname{tg} \frac{1}{7}}{7 \cos^2 \frac{y}{7}}$ д) $2 \sin^3 5y \cdot \ln 2 - \frac{15 \cos 5y}{\sin^4 5y}$
- е) $\frac{a^2}{(a^2-x^2)^{3/2}}$ ж) $\frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$ з) $-\frac{4e^{-2t} \operatorname{arcsin} e^{-2t}}{\sqrt{1-e^{-4t}}}$
- и) $\frac{-2(2x-1)}{3 \sqrt{(x^2-x)^5}} + \frac{\ln 2 \cdot e^{3x^2} \cdot 6x}{1+26x^2}$
- к) $-(1-x^2) \operatorname{arccos} x \left(\frac{\ln(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{2x \operatorname{arccos} x}{1-x^2} \right)$
- л) $(2x \ln \frac{x}{1+x} + \frac{x}{1+x}) \cdot (\frac{x}{1+x})^{x^2}$ м) $5^{\frac{1}{2}} (1 - \frac{\ln 5}{x})$
7. а) $\frac{-x}{\sqrt[4]{(1+2x^2)^5}}$ б) $-\frac{5 \operatorname{ctg}^4 \frac{y}{2}}{2 \sin^2 \frac{y}{2}}$
- в) $3^{\frac{1}{16}} (1 + \frac{\ln 3}{2^{16}})$ г) $-\frac{1}{\cos 2x}$ д) $-2y \sin y^2 \ln 2 \cdot 2^{\cos y^2}$
- е) $3 \operatorname{arctg}^2 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} \cdot \frac{1}{2 \sqrt{x}(2x+\sqrt{x+1})}$ ж) $\sqrt{e^{\frac{2x}{x+1}}} (1 + \frac{t}{(t+1)^2})$
- з) $\frac{-12 \operatorname{ctg}^2 2x}{\sin 4x}$ и) $(\operatorname{tg} 2x)^{\sin x} (\cos x \ln \operatorname{tg} 2x + \frac{4 \sin x}{\ln 4x})$
- к) $(\sin 3x) \operatorname{arctg} 2x \left(\frac{2 \ln \sin 3x}{1+4x^2} + 3 \operatorname{ctg} 3x \operatorname{arctg} 2x \right)$
- л) $\frac{4}{5 \sqrt[5]{2y^4(1+e^{-2x})}} \cdot \frac{e^{-2x}}{(1+e^{-2x}) \ln 10}$

5.6(В) 1. $y'(0)$ не существует; 2. 0; 3. -1.

5.7(В) 1. $\frac{1}{x(x-1)}$; 2. $y' = \begin{cases} 3, & x > -\frac{1}{3} \\ \text{не существует, если } x = -\frac{1}{3} \\ -3, & x < -\frac{1}{3} \end{cases}$

3. $e^{x^2} \cdot x^x (\ln x + 1)$

4. $x^{x^x} \cdot x^x \left(\frac{1}{x} + \ln x + \ln^2 x \right)$

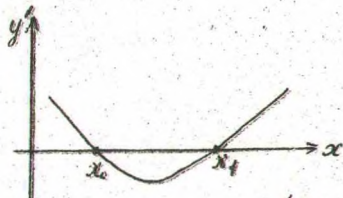
5. 1000!

5.8(В) 15 м/сек

5.11(В) а) можно; б) нельзя

5.12(В) а) нельзя; б) нельзя

5.15(В)



5.17(В) $\frac{\psi'(x)}{\psi(x)} \cdot \frac{1}{\ln \psi(x)} - \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} \frac{\ln \psi(x)}{\ln^2 \psi(x)}$

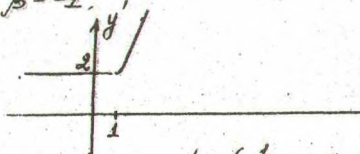
5.18(В) $y+x=0$ в точке $M_0(-3; 3)$

$25y+x=0$ в точке $M_1(-15; 3/5)$

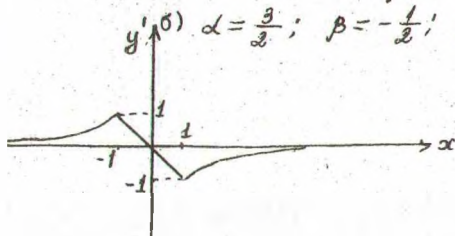
5.19(В) а) 0; б) -1

5.20(В) а) $\alpha=2$; $\beta=-1$

$$y'' = \begin{cases} 2, & x \leq 1 \\ 2x, & x > 1 \end{cases}$$



5.21(В) $\alpha = \frac{3}{2}$; $\beta = -\frac{1}{2}$; $y' = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x \leq -1 \\ -x, & x \in (-1; 1) \\ -\frac{1}{x^2}, & x \geq 1 \end{cases}$



5.21(В) а) $n > 0$; б) $n > 1$; в) $n > 2$

9.1. (A)

1. $\frac{x-2y}{2x-y}$

2. $-\frac{y}{x+2y}$

3. $\frac{ay-x^2}{y^2-ax}$

4. $\frac{1-x-y}{x-y}$

5. $-\frac{4x}{9y}$

6. $\frac{1}{2y-5}$

7. $\frac{-y^2+2xy}{2xy+x^2}$

9.2. (A)

1. $\frac{1}{2}$

2. 0

3. -1

4. 0,2

5. 0

6. -4

7. -0,24

9.3. (A)

1. a) $\frac{2t}{1-t^2}$

б) $\lg 2t$

2. a) $\frac{\sqrt[3]{(1-\sqrt{t})^2}}{\sqrt[6]{t} \sqrt{1-\sqrt{t}}}$

б) $\lg t$

3. a) -1

б) $\frac{1-\ln t}{t^2(\ln t+1)}$

4. a) $\frac{\sin t + \cos t}{\cos t - \sin t}$

б) $-\lg t$

5. a) $\frac{2t}{t^2-1}$

б) $\frac{\sin t - \cos t}{\cos t + \sin t}$

6. a) $\frac{2\sin^2 t + \sin 2t}{2\cos^2 t - \sin 2t}$

б) $\frac{2}{3\sqrt[6]{t}}$

7. a) $\frac{b}{a} \cdot \frac{t^2+1}{t^2-1}$

б) $-\operatorname{ctg} 2u$

9.4. (A)

1. a) $\frac{1}{3a \cos^4 t \sin t}$

б) 1

в) $\frac{3x}{\sqrt{(1-x^2)^5}}$

г) $-\frac{\ln x}{\cos^2 x}$

д) $\frac{1}{4}$

2. a) $\frac{36}{4a^2 t}$

б) $-\operatorname{ctg}^3 t$

в) $\frac{2x}{(x^2+2)^2}$

г) $3(2x+1)$

д) $-\frac{1}{3}$

3. a) $\frac{-2}{e^{-2}(\cos t + \sin t)^3}$

б) $-\sqrt{1-t^2}$

в) $\frac{-4\cos x}{\sin^3 x}$

г) $80(1-2x)^{-6}$

д) -1

4. a) 2

б) $-\frac{t^2+1}{12t^3}$

в) $-\frac{\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)^{3/2}}$

г) $-\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}$

д) $\frac{-4}{(y-1)^3}$

5. а) $\frac{2}{e^t(\cos t - \sin t)^3}$ б) $-\frac{1}{a}$ в) $\frac{64 \cos 8x}{\sin^2 8x}$

г) $\cos x \cdot \ln \lg x + \frac{1}{\cos x}$ д) 6 б.а) $6e^{4t}$

б) 8 в) $e^{x^2(6x+4x^3)}$ г) $\frac{2 \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1-x^2}}$

д) -1 7. а) $-\sqrt{1-t^2}$ б) 6 в) $\frac{5x+6x^3}{(1+x^2)^{3/2}}$

г) $\frac{-2}{x \sin(\ln x)}$ д) $\frac{1}{2}$

9.5 (А. I. $\frac{-1320}{x^{13}}$ 2. $-\frac{1}{2} \cos x$ 3. $\frac{2}{x^3}$

4. $6 \ln x + 11$ 5. $16a \sin 2\varphi$ 6. $2 \frac{1+2 \sin^2 x}{\cos^4 x}$

7. $\frac{-15}{8\sqrt{x^7}}$

9.6 (А. I. 13,5 м/сек; 24 2. 1 сек

3. а) 8 сек; б) $t_1 = \text{сек}$, $t_2 = 8 \text{ сек}$, 4. $1/6 \text{ м/сек}$; $-\frac{1}{108}$

5. 3 м/сек; 8/3 6. 29

7. $m(4+6t)$

9.7 (А. I. $x-y+1=0$ 2. $2x-7y+19=0$

3. $3x+4y-25=0$

9.10 (А. а) $\arctg 3$ б) 45°

в) $\varphi_1 = 0$; $\lg \varphi_2 = 27$; $\lg \varphi_3 = -27$.

9.11 (А. $x-y+1=0$; $x+y-5=0$

9.12 (Б. $2x-7y+19=0$; $7x+2y-13=0$.

9.13 (Б. а) $\frac{2n!}{(1-x)^{n+1}}$ б) $\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!a}{(ax+b)^n}$

$$9.14 \text{ (B)} 2^{a-1} \cdot e^{-2x} \left[2(-1)^n x^{n-1} + 2n(-1)^{n-1} x^{n-2} + \frac{n(n-1)}{2} (-1)^{n-2} \right]$$

$$11.1 \text{ (A)} \quad 1. (-1+10x) \cdot dx \quad 2. (8x-1) \cdot dx \quad 3. (1-3x^2) \cdot dx$$

$$4. (5-4x) \cdot dx \quad 5. (4x-7) \cdot dx \quad 6. (22x-5) \cdot dx$$

$$7. -3x^2 \cdot dx$$

$$11.2 \text{ (A)} \quad 1. \text{ a) } 4e^{4x} \cdot \cos 4x \, dx \quad \text{b) } \frac{3 \ln x \, dx}{x}$$

$$\text{b) } \frac{\cos 1/x}{2} \cdot dx \quad \text{r) } \frac{1}{\tan^2 x} \cdot \left(\frac{1}{\tan x} - \frac{1}{3x \cos^2 \frac{1}{2x}} \right) dx$$

$$\text{d) } \frac{x \sqrt{x^2-1}}{1} \cdot dx$$

$$2. \text{ a) } -3a \cos 3x \cdot \sin 3x \ln a \, dx \quad \text{b) } \frac{dx}{2\sqrt{1-x^2}} \quad \text{B) } -2 \lg x \, dx$$

$$\text{r) } \frac{e^{-3x} \cdot dx}{(4-4x)}$$

$$\text{d) } \frac{3x \cdot dx}{3 \sqrt{x^2-1} \cdot (1 + \sqrt{x^2-1})}$$

$$3. \text{ a) } 15 \cdot 10^{1-\cos^2 x} \cdot \cos^4 x \sin 3x \ln 10 \cdot dx \quad \text{b) } \ln^3 \sin x (\ln \sin x + 4x \lg x) dx$$

$$\text{B) } \frac{dx}{4 \sqrt{\lg \frac{1}{2}}} \cdot \cos^2 \frac{x}{2} \quad \text{r) } 2t \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \left(1 - \frac{t^2}{2} \right) dt \quad \text{d) } \frac{3 dx}{2 \sqrt{3x-9x^2}}$$

$$4. \text{ a) } -2 \arctg \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^2+1}$$

$$\text{b) } \frac{6 \ln x \cos 3x \cdot dx}{\arccos 3x \cdot \sqrt{1-9x^2}}$$

$$\text{B) } 5^{2+\sin x} \cdot \left(1 - \frac{x \cos x \ln 5}{2+\sin x} \right) dx$$

$$\text{r) } \frac{e^{\sqrt{1-x}} \, dx}{2\sqrt{1-x}}$$

$$\text{d) } \sin 3x \cos^3 x \, dx$$

$$5. \text{ a) } \frac{2 e^{-2x} \, dx}{(1+e^{-4x}) \arctg^2 e^{-2x}}$$

$$\text{b) } \left(\frac{\sqrt{1-x}}{1+x^2} + \frac{x(x^2-2x-1)}{2\sqrt{x-1} (1+x^2)^{3/2}} \right) dx$$

$$\text{a) } \frac{15t \, dt}{\sqrt{(1-3t)^2}}$$

$$\text{r) } \frac{1}{e^{\frac{1}{\sin x}}} \cdot \left(1 + \frac{3 \cos^2 \frac{x}{2}}{x \sin^4 \frac{x}{2}} \right) dx$$

$$\text{d) } 6(1+\sin^2 x)^5 \sin 2x \, dx$$

$$6. \text{ a) } \frac{-4 \cos 2x \, dx}{\pi u^3 \cdot 2x}$$

$$\text{b) } \left(\arcsin \ln x + \frac{1}{\sqrt{1-\ln^2 x}} \right) dx$$

$$\text{a) } \frac{(x^2+1) \, dx}{2x^2 \cdot \sqrt{1+\lg(x-\frac{1}{2})} \cdot \cos^2(x-\frac{1}{2})}$$

$$\text{r) } \frac{-2x \, dx}{3 \sqrt[3]{(1+x^2)^4}}$$

д) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 20 \sin^4 x \cdot \cos 4x \cdot \ln 2 \cdot dx$

7. а) $\int x \arccos \frac{x}{2} dx$ б) $\frac{a(3a^2 - y^2)}{2(a^4 - y^4)} dy$

в) $\frac{\operatorname{ctg} x \cdot dx}{\ln 2}$ г) $3(e^{\frac{1}{\cos t}} - 2)^2 e^{\frac{1}{\cos t}} \cdot \frac{\sin t}{\cos^2 t} dt$

д) $\int \left(\frac{1}{x^2} \left(3^{\frac{1}{2}} \ln 3 - \frac{1}{3} 2^{\frac{1}{2}} \ln 2 \right) + \frac{x}{2} \sin^2 \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \right) dx$

II.3(в) $dy = 8 \quad \frac{\Delta y - dy}{\Delta y} \% = 3,03\%$

$dy = 1,6 \quad \frac{\Delta y - dy}{\Delta y} \% = 0,62\%$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. - М.: Наука, 1980. - 432 с.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. - М.: Наука, 1978. - Т. I. - 456 с.
3. Мантуров О.В., Матвеев Н.М. Курс высшей математики. - М.: Высшая школа, 1986. - 480 с.
4. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. - М.: Наука, 1977. - 416 с.
5. Сборник задач по математике (для втузов). Линейная алгебра и основы математического анализа / Под ред. А.В. Ефимова и В.П. Демидовича. - М.: Наука, 1981. - 364 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	3
1. Понятие производной	3
2. Основные правила дифференцирования	6
3. Производная сложной функции.....	7
4. Логарифмическое дифференцирование	9
5. Вопросы, задачи	11
6. Производные высших порядков	11
7. Дифференцирование функций, заданных параметрически	20
8. Дифференцирование неявных функций	22
9. Вопросы, задачи	23
10. Дифференциал функции	28

II. Вопросы, задачи	32
Ответы	34
Литература	43

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО РАЗДЕЛУ "ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ
ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ" ДИСЦИПЛИНЫ "ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА"

Составители: Гончарова Валентина Арсеньевна,
Зотова Мария Андреевна

Редактор М.Ф. Мурашко. Корректор Н.М. Малаховский.

Подписано в печать 1.12.89. Формат 60х84¹/16.

Печать офсетная. Усл. печ. л. 2,9. Усл. кр.-отт. 2,9. Уч.-изд. л. 2,5.

Тираж 500 экз. Заказ 577. Бесплатно.

Белорусский ордена Трудового Красного Знамени технологический
институт им. С.М. Кирова. 220630. Минск, Свердлова, 13а.

Отпечатано на ротапринте Белорусского ордена Трудового
Красного Знамени технологического института им. С.М. Кирова.
220630. Минск, Свердлова, 13.