

517
B95

Інстытэтва адукацыі Рэспублікі Беларусь
БЕЛАРУСКІ ДЗЯРЖАЎНЫ ТЭХНАЛАГІЧНЫ УНІВЕРСІТЭТ

Кафедра вышэйшай матэматыкі

**ВЫШЭЙШАЯ МАТЭМАТЫКА
Ў ПЫТАННЯХ, ЗАДАЧАХ І
ПРАКТЫКАВАННЯХ.
НЯВЫЗНАЧАНЫЯ І
ВЫЗНАЧАНЫЯ ІНТЭГРАЛЫ**

Метадычны дапаможнік
для студэнтаў І курса ўсіх спецыяльнасцей

Мінск 2002

УДК 517

Разгледжаны і рэкамендаваны да выдання рэдакцыйна-выдавецкай
радай універсітэта.

Складальнікі: Звяровіч Л.Ф., Зотава М.А.,
Кончыц Р.М., Рысюк Н.А.,
Семянкова А.С., Шынкевіч А.А.

Навуковы рэдактар дацэнт Ж.М.Гарбатовіч

Рэцэнзенты: дацэнт кафедры вылічальнай тэхнікі БДТУ
Н.М.Пуставалава;
загадчык кафедры тэорыі функцый БДУ
д. ф.-м. н., прафесар Э.І.Звяровіч

Па тэматычным плане выданняў вучэбна-метадычнай літаратуры
універсітэта на 2001 год. Паз.27.

Для студэнтаў I курса ўсіх спецыяльнасцей.

УВОДЗИНЫ

Метадычны дапаможнік прызначаны для студэнтаў першага курса ўсіх спецыяльнасцей з мэтай дасягнення большай эфектыўнасці практычных заняткаў і стымулявання самастойнай работы студэнтаў.

Дапаможнік складаецца з 3 глаў: “Нявызначаны інтэграл”, “Вызначаны інтэграл” і “Прымяненне вызначанага інтэграла”. Кожная глава ўтрымлівае тэарэтычныя пытанні, задачы і практыкаванні двух ўзроўняў складанасці для аўдыторнай і самастойнай работы, а таксама для самаправеркі.

Задачы і практыкаванні, пазначаныя літарай А (першы ўзровень складанасці), утрымліваюць абавязковы мінімум, які павінен засвоіць кожны студэнт.

Літарай Б пазначаны задачы і практыкаванні другога ўзроўняў складанасці. Наяўнасць пытанняў для самакантролю дазваляе зрабіць самастойную работу студэнтаў больш асэнсаванай.

Для большасці задач дадзены адказы.

ЛІТАРАТУРА

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. В 2 т. М.: Наука, 1985.
2. Шипачев В.С. Высшая математика. М.: Высш.шк., 1985.
3. Герасимович А.И., Рысюк Н.А. Математический анализ. Ч.І. Мн.: Выш.шк., 1989.
4. Кузнецов А.В., Янчук Л.Ф. и др. Общий курс: Учебник для студентов экономических специальностей вузов. Мн.: Выш. шк., 1993.
5. Кремер Н.Ш. и др. Высшая математика для экономистов. М.: “Банки и биржи”. Изд. ЮНИТИ, 1997.
6. Рябушко А.П. и др. Индивидуальные задания по высшей математике. Мн.: Выш.шк., 2000.



Глава 1. НЯВЫЗНАЧАНЫ ІНТЭГРАЛ

1.1. Паняцце нявызначанага інтэграла і яго ўласцівасці

Тэарэтычныя пытанні

1. Даць азначэнне і прывесці прыклады першаіснай.
2. Сфармуляваць і даказаць асноўныя ўласцівасці першаіснай.
3. Прывесці прыклады функцый, якія не маюць першаіснай сярод элементарных функцый.
4. Даць азначэнне і прывесці прыклады нявызначанага інтэграла.
5. Сфармуляваць асноўныя ўласцівасці нявызначанага інтэграла.
6. Даказаць, што $\int f(kx + b)dx = \frac{1}{k} F(kx + b) + C$, дзе $F(x)$ — першаісная для $f(x)$.
7. Запісаць табліцу асноўных нявызначаных інтэгралаў і праверыць формулы дыферэнцаваннем.
8. Прывесці прыклады нявызначаных інтэгралаў, якія не выражаюцца праз элементарныя функцыі.

Заданні для аўдыторнай работы

А

1. Знайсці інтэгралы з дапамогай іх уласцівасцей і асноўнай табліцы інтэгралаў. Вынікі праверыць дыферэнцаваннем:

- | | |
|---|--|
| 1) $\int (6x^2 - \sqrt[3]{x^2} + 8)dx;$ | 2) $\int (\frac{2}{x^4} + \frac{3}{\sqrt[4]{x^3}})dx;$ |
| 3) $\int \frac{7 - x^2 e^x + 4x}{x^2} dx;$ | 4) $\int \frac{(2 + \sqrt{x})^2}{x\sqrt{x}} dx;$ |
| 5) $\int \frac{4 + \sin^3 x}{\sin^2 x} dx;$ | 6) $\int \frac{dx}{16 + x^2};$ |
| 7) $\int \frac{3^x - 2^x}{6^x} dx;$ | 8) $\int \frac{dx}{\sqrt{5 - 5x^2}};$ |
| 9) $\int \frac{dx}{\sqrt{3 + x^2}};$ | 10) $\int \frac{dx}{6 - x^2}.$ |

2. Вядома, што $\int f(kx + b)dx = \frac{1}{k} F(kx + b) + C$, дзе $F(x)$ -першаісная для $f(x)$. З дапамогай гэтай уласцівасці знайсці інтэгралы і вынікі

праверыць дыферэнцаваннем:

1) $\int \cos 2x dx$;

2) $\int \sin \frac{x}{3} dx$;

3) $\int e^{-3x+2} dx$;

4) $\int \frac{dx}{\cos^2 4x}$;

5) $\int \frac{dx}{5x+7}$;

6) $\int \frac{dx}{\sqrt{6-x}}$;

7) $\int (3x-1)^{10} dx$;

8) $\int \frac{dx}{1+9x^2}$.

Б

3. Знайсці інтэгралы:

1) $\int \lg^2 x dx$;

2) $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$;

3) $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)} dx$;

4) $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^2 x}$;

5) $\int \frac{\sqrt{2+x^2} + \sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}} dx$;

6) $\int \frac{dx}{(2x+1)^2 + 9}$;

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{16-(3x-1)^2}}$;

8) $\int \frac{dx}{x^2 + 4x}$.

4. Знайсці інтэгралы:

1) $\int (u'(x)v(x) + u(x)v'(x)) dx$;

2) $\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx$;

3) $\int e^{u(x)} u'(x) dx$.

5. Знайсці раўнанне лініі, якая праходзіць праз пункт $M_0(0;-3)$, калі вядома, што вуглавы каэфіцыент датычнай да гэтай крывой у пункце з абсцысай x роўны $\frac{1}{3x+1}$.

Заданні для самастойнай работы

А

6. Знайсці інтэгралы. Вынікі праверыць дыферэнцаваннем:

1) $\int (\frac{3}{2\sqrt{x}} - 4x^3 + 5) dx$;

2) $\int (\sqrt{x} + 1)x^2 dx$;

$$3) \int \left(\frac{2}{x^2} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^3}} \right) dx;$$

$$5) \int \frac{\sqrt[3]{x} + 2}{x^5} dx;$$

$$7) \int \frac{dx}{9 + x^2};$$

$$9) \int \left(\frac{7}{\sqrt{4 - x^2}} - \frac{3}{\sqrt{4 + x^2}} \right) dx;$$

$$11) \int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{3}};$$

$$4) \int \frac{6 - \cos^3 x}{\cos^2 x} dx;$$

$$6) \int \frac{5xe^x - 4}{x} dx;$$

$$8) \int \frac{dx}{16 - x^2};$$

$$10) \int \sin(3x + 2) dx;$$

$$12) \int (1 - 2x)^7 dx.$$

Б

7. Знайдіть інтегралы:

$$1) \int \operatorname{ctg}^2 x dx;$$

$$3) \int \frac{1 + 2x^2}{x^2(1 + x^2)} dx;$$

$$5) \int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx;$$

$$7) \int \frac{dx}{9x^2 + 6x + 5};$$

$$2) \int \sin^2 \frac{x}{2} dx;$$

$$4) \int \frac{(1 + \sqrt{x})^3}{\sqrt[3]{x}} dx;$$

$$6) \int \frac{\sqrt{4 + x^2} - \sqrt{4 - x^2}}{\sqrt{16 - x^4}} dx;$$

$$8) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}.$$

Питання для самоконтролю

8. Назвіть 3-4 перші аргументи для кожної з функцій:

$$1) f(x) = 4x^3;$$

$$2) f(x) = \cos 3x;$$

$$3) f(x) = 2^x.$$

9. Знайдіть $f(x)$:

$$1) \int f(x) dx = 2 \arctg \frac{x}{2} + C;$$

$$2) \int f(x) dx = \ln |x + \sqrt{x^2 + 3}| + C,$$

10. Ці з'являються гэтыя роўнасці правільнымі:

$$1) \int (u'(x)v(x) + u(x)v'(x)) dx = u(x)v(x) + C; \quad 2) \int \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} dx = 2\sqrt{u(x)} + C ?$$

11. Знайські інтегралы:

$$1) \int f'(3x) dx;$$

$$2) \int f'(x+1) dx;$$

$$3) \int \frac{u'(x)}{u^2(x)} dx;$$

$$4) \int \frac{u'(x)}{1+u^2(x)} dx.$$

12. Матэрыяльная кропка рухаецца прамалінейна з хуткасцю $V=3\cos t$, і ў пачатковы момант $t=0$ знаходзілася на адлегласці $s=1$ ад пункта адліку. Вызначыць залежнасць шляху S ад часу t .

13. Прывесці прыклады нявызначаных інтэгралаў, якія не выражаюцца праз элементарныя функцыі.

1.2. Асноўныя метады інтэгравання

Тэарэтычныя пытанні

1. Сфармуляваць уласцівасць інварыянтнасці нявызначанага інтэграла.

2. Расказаць аб метадах інтэгравання шляхам падвядзення функцыі пад знак дыферэнцыяла, прывесці прыклады.

3. Запісаць і даказаць формулу замены зменнай у нявызначаным інтэграле.

4. Запісаць і даказаць формулу інтэгравання па частках у нявызначаным інтэграле.

5. Запісаць асноўныя тыпы інтэгралаў, якія бяруцца метадам інтэгравання па частках. Для кожнага тыпу вызначыць спосаб разбівання падінтэгральнага выразу на u і dv .

Заданні для аўдыторнай работы

A

14. Знайські інтэгралы шляхам падвядзення функцыі пад знак дыферэнцыяла:

$$dx = d(x+b) = \frac{1}{k} d(kx) = \frac{1}{k} d(kx+b)$$

$$1) \int e^{4x} dx = \frac{1}{4} \int e^{4x} d(4x) = \dots;$$

$$2) \int \frac{dx}{\cos^2 5x};$$

$$3) \int \frac{dx}{x^2 - 4x + 5} = \int \frac{d(x-2)}{(x-2)^2 + 1} = \dots;$$

$$4) \int \frac{dx}{x^2 + 6x};$$

$$5) \int \frac{dx}{7-2x};$$

$$6) \int \sin\left(\frac{x}{3} - 1\right) dx;$$

$$7) \int 2^{3-x} dx;$$

$$8) \int (7x-9)^6 dx;$$

$$9) \int \frac{dx}{\sqrt{9-(4x+1)^2}};$$

$$10) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+7}};$$

$$x dx = \frac{1}{2} d(x^2) = \frac{1}{2} d(x^2 + b) = \frac{1}{2k} d(kx^2 + b)$$

$$11) \int e^{x^2} x dx = \frac{1}{2} \int e^{x^2} d(x^2) = \dots;$$

$$12) \int x \cos x^2 dx;$$

$$13) \int \frac{x dx}{\sqrt{4+3x^2}} = \left| d(4+3x^2) = 6x dx \right| = \frac{1}{6} \int \frac{d(4+3x^2)}{\sqrt{4+3x^2}} = \dots;$$

$$14) \int \frac{3x dx}{9-4x^2};$$

$$15) \int \frac{x dx}{(1+5x^2)^2};$$

$$16) \int \frac{x dx}{\sqrt{x^4-3}};$$

$$17) \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^4}};$$

$$18) \int \frac{x^2 dx}{25+x^6} = \frac{1}{3} \int \frac{d(x^3)}{5^2+(x^3)^2} = \dots;$$

$$19) \int \frac{x^2 dx}{\sin^2 x};$$

$$20) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^3}};$$

$$21) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^6}};$$

$$\cos x dx = d(\sin x) = d(\sin x + b) = \frac{1}{k} d(k \sin x + b)$$

$$22) \int \sin^3 x \cos x dx = \int \sin^2 x d(\sin x) = \dots;$$

$$23) \int \frac{\cos x dx}{3 \sin x + 7} = \frac{1}{3} \int \frac{d(3 \sin x + 7)}{3 \sin x + 7} = \dots;$$

$$24) \int \frac{\cos x dx}{4 - \sin^2 x};$$

$$25) \int e^{-\cos x} \sin x dx;$$

$$26) \int 3^{\lg 2x} \frac{dx}{\cos^2 2x};$$

$$27) \int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$28) \int \frac{dx}{(1+x^2) \arctg x};$$

$$29) \int \operatorname{tg} 5x dx;$$

$$30) \int \frac{\sin(3x-1)}{\cos^4(3x-1)} dx;$$

$$31) \int \frac{e^x dx}{\sqrt{4-e^{2x}}};$$

$$32) \int \frac{5x+2x^3}{1+x^4} dx;$$

$$33) \int \frac{2^x dx}{\sqrt{4^x+3}}.$$

15. Знайдіть інтеграли метадам заміни змінної:

- 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+4}\sqrt{x}} = \left| x = t^4, dx = 4t^3 dt \right| = \int \frac{4t^3 dt}{t^2 + t} = \dots;$
- 2) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+4}};$
- 3) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}};$
- 4) $\int \frac{x^2 dx}{(2x+3)^4};$
- 5) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x} + \sqrt[3]{1+2x}};$
- 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}};$
- 7) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}} \quad \left(\begin{matrix} x = \sin t \\ x = 1/t \end{matrix} \right).$

16. Знайдіть інтеграли метадам інтегрування по частинах:

- 1) $\int (3x+4) e^{-x} dx = \left| u = 3x+4, du = 3dx \right| \left| dv = e^{-x} dx, v = -e^{-x} \right| = \dots;$
- 2) $\int x \cos \frac{x}{2} dx;$
- 3) $\int (x^2 + 3x) \sin 2x dx;$
- 4) $\int x^4 \ln x dx;$
- 5) $\int \arcsin 3x dx;$
- 6) $\int x \arctg x dx;$
- 7) $\int \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{x+1}}.$

Б

17. Знайдіть інтеграли:

- 1) $\int \frac{7x-5}{4x^2+4x+10} dx;$
- 2) $\int \frac{3x+10}{\sqrt{6x-x^2}} dx;$
- 3) $\int \frac{\arcsin 2x+5x}{\sqrt{1-4x^2}} dx;$
- 4) $\int (\sqrt{\cos 2x} + \sin 2x)^2 dx;$
- 5) $\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{1-\sin^4 x}} dx;$
- 6) $\int \frac{x \ln(1+x^2)}{1+x^2} dx;$
- 7) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}};$
- 8) $\int e^{\sqrt{x}} dx;$
- 9) $\int \sqrt{4-x^2} dx;$
- 10) $\int \ln^2(x+1) dx;$
- 11) $\int x^2 e^{x^3} dx;$
- 12) $\int e^{-x} \cos 3x dx;$
- 13) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+16}} \quad \left(\begin{matrix} x = \operatorname{tg} t \\ x = \frac{1}{t} \end{matrix} \right);$
- 14) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x \ln x} dx.$

Задання для самостійної роботи

A

18. Знайсті інтеграли шляхом падвядзення функції пад знак диференціала:

$$1) \int \frac{dx}{(2x+1)^2 + 9};$$

$$2) \int \frac{dx}{\sqrt{4 - (5x-1)^2}};$$

$$3) \int x \cos(3+x^2) dx;$$

$$4) \int \sin^2 3x \cos 3x dx;$$

$$5) \int \frac{4 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx;$$

$$6) \int e^{\sqrt{3-4x}} \frac{dx}{\sqrt{3-4x}};$$

$$7) \int \frac{x dx}{1+5x^2};$$

$$8) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{7-x^3}};$$

$$9) \int \frac{2+3 \ln x}{x} dx;$$

$$10) \int 2^{\frac{1}{x}} \frac{dx}{x^2};$$

$$11) \int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x} + 1}};$$

$$12) \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

19. Знайсті інтегралы метадам замены зменнай:

$$1) \int \frac{x dx}{\sqrt{x+1}};$$

$$2) \int \frac{x dx}{\sqrt[3]{1-3x}};$$

$$3) \int \frac{dx}{\sqrt{x+2}\sqrt[3]{x}};$$

$$4) \int x\sqrt{3-x} dx;$$

$$5) \int \frac{4x+3}{(2x-1)^5} dx;$$

$$6) \int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}} dx.$$

20. Знайсті інтегралы метадам інтегрування па частках:

$$1) \int (1-4x) e^x dx;$$

$$2) \int (3x+2) \cos x dx;$$

$$3) \int \ln(x+3) dx;$$

$$4) \int x^2 \sin \frac{x}{3} dx;$$

$$5) \int \arccos 2x dx;$$

$$6) \int x \arctg x dx.$$

21. Знайські інтеграли:

$$1) \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2 - 4}\sqrt{x}} dx;$$

$$3) \int \frac{\sin x \cos x dx}{\sqrt{\cos^2 x - \sin^2 x}};$$

$$5) \int \arctg \sqrt{x} dx;$$

$$7) \int \frac{dx}{e^x \sqrt{1 + e^{-2x}}};$$

$$9) \int \frac{dx}{\sqrt{(4 + x^2)^3}} \quad (x = 2 \operatorname{tg} t);$$

$$2) \int \frac{x dx}{\sqrt{4x - x^2}};$$

$$4) \int \frac{\ln x dx}{x(4 - \ln^2 x)};$$

$$6) \int x \sin x \cos x dx;$$

$$8) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9 - x^2}} \quad (x = 3 \sin t);$$

$$10) \int \cos(\ln x) dx.$$

Задання для самоконтролю

22. Запишіть уласцівасць інваріантності нявизначанаго інтеграла.

23. У інтегралах уставиць адсутны множник:

$$1) \int 4^{x^2} [] dx = \int 4^{x^2} d(x^2);$$

$$2) \int [] \sin\left(\frac{5}{x}\right) dx = \int \sin\left(\frac{5}{x}\right) d\left(\frac{5}{x}\right);$$

$$3) \int (3 \operatorname{tg} x - 1)^6 [] dx = \int (3 \operatorname{tg} x - 1)^6 d(3 \operatorname{tg} x - 1).$$

24. Назваць функцыю, якая будзе падводзіцца пад знак дыферэнцыяла:

$$1) \int x^2 (5 - 2x^3)^8 dx;$$

$$2) \int \frac{dx}{(1 + \operatorname{tg} x) \cos^2 x};$$

$$3) \int \frac{dx}{x \sqrt{3 + \ln x}};$$

$$4) \int \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx.$$

25. Запишіть формулу замены зменнай у нявизначаным інтеграле.

26. Назваць від падстаноўкі для інтэгравання метадам замены зменнай:

$$1) \int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}} dx;$$

$$2) \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x+2}} dx;$$

$$3) \int \frac{2x-5}{(3x+1)^6} dx;$$

$$4) \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1-x^2}}.$$

27. Знайдіть інтегралы двома спосабамі: 1) падвядзеннем функцыі пад знак дыферэнцыяла; 2) заменай зменнай:

1) $\int \frac{\operatorname{ctg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx;$

2) $\int \frac{\ln x dx}{x(4 + \ln^2 x)};$

3) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}.$

28. Запісаць формулу інтэгравання па частках.

29. Разбіць падынтэгральны выраз на u і dv для інтэгравання па частках:

1) $\int (x^2 - 6x) \sin 3x dx;$

2) $\int \ln^2 x dx;$

3) $\int x \arccos 2x dx;$

4) $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx.$

30. Знайдзі інтэграл $\int \sqrt{9-x^2} dx$ двома метадамі:

1) інтэграваннем па частках; 2) заменай зменнай.

1.3. Інтэграванне рацыянальных функцый (дробаў)

Тэарэтычныя пытанні

1. Дачь азначэнне і прывесці прыклады: 1) рацыянальных дробаў (функцый); 2) правільных і няправільных рацыянальных дробаў.

2. Як раскладзі няправільны рацыянальны дроб на суму мнагачлена і правільнага рацыянальнага дробу?

3. Запісаць у агульным выглядзе прасцейшыя рацыянальныя дробы.

4. Выкладзі метады інтэгравання прасцейшых рацыянальных дробаў I—III тыпаў.

5. Сфармуляваць правіла раскладу правільнага рацыянальнага дробу на суму прасцейшых дробаў.

6. Сфармуляваць і даказаць тэарэму аб існаванні нявызначанага інтэграла ад рацыянальнай функцыі.

Заданні для аўдыторнай работы

A

31. Назваць, якія з дробаў з'яўляюцца: 1) правільнымі, 2) няправільнымі.

Виділіть цілу частку у неправильних дробах:

1) $\frac{7}{x+5}$;

2) $\frac{7x}{x+5}$;

3) $\frac{3x^2-1}{x^3-1}$;

4) $\frac{3x^2-1}{x^2+4}$;

5) $\frac{x^2}{x-2}$;

6) $\frac{2x^5-3x^2}{x^2+x+1}$

32. Знайдіть інтеграли ад прасцейших рацыянальных дробаў:

1) $\int \frac{dx}{(1+2x)^3}$;

2) $\int \frac{dx}{7-3x}$;

3) $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+7} dx$;

4) $\int \frac{2x-7}{x^2+4x+13} dx$;

5) $\int \frac{5x+3}{x^2-x+1} dx$;

6) $\int \frac{9-3x}{2x^2+x+1} dx$.

33. Раскладзі дроб на прасцейшыя, не адшукваючы каэфіцыентаў раскладу:

1) $\frac{5x+6}{(x-1)x^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2}$;

2) $\frac{7x^2+5}{x(x-4)^3}$;

3) $\frac{3x+7}{x^3-1}$;

4) $\frac{4}{(x^2-5x+4)(x^2-5x+7)}$;

5) $\frac{x^2+4x+1}{(x^2-1)(x+1)(x^2+9)}$;

6) $\frac{x-2}{x^2(x^2+4)^2}$;

7) $\frac{x^3-x^2}{(x^4-16)(x^3-8)}$.

34. Знайдзі каэфіцыенты раскладу A, B, C (лічыць x роўным караням назоўніка: $x=0, x=1, x=-2$):

$$\frac{3x-7}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2};$$

$$3x-7 = A(x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-1);$$

$$x=0: -7 = -2A \Rightarrow A = 3.5, \dots$$

35. Знайдзі каэфіцыенты раскладу A, B, C (лічыць x роўным караням

Заданні для самоконтролю

44. Запи́саць, які́я з дробаў з'яўляюцца правільнымі:

1) $\frac{3x-7}{x^3+1}$;

2) $\frac{2x^3-4}{x^2+3x}$;

3) $\frac{6x-1}{x+2}$;

4) $\frac{5x}{x^2+x+6}$.

45. Запи́саць, які́я з дробаў з'яўляюцца прасцейшымі:

1) $\frac{3}{2x+7}$;

2) $\frac{4x-1}{x^2+3x+5}$;

3) $\frac{7x-1}{x^2+x-2}$;

4) $\frac{5}{(3-x)^4}$.

46. Не раскладаючы дроб, назваць парадак k мнагачлена ў яго цэлай частцы:

1) $\frac{3x^2+1}{x-4}$;

2) $\frac{5x^2+4}{x^2+1}$;

3) $\frac{x^5}{x^3-1}$;

4) $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} (m > n)$.

47. Запоўніць прабелы ў раскладах дробаў:

1) $\frac{?}{x^4+3x^2} = 2x + \frac{1}{?}$;

2) $\frac{x^3+12x-4}{?} = \frac{?}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{?}{x^2+4}$.

48. Выдзеліць поўны квадрат:

1) $x^2+6x+10$;

2) x^2-3x+1 ;

3) $4x^2+4x+10$;

4) $3x^2+2x+4$.

49. Знайсці інтэгралы:

1) $\int \frac{6x+5}{x^2-x+2} dx$;

2) $\int \frac{7x-1}{x^2-x-2} dx$;

3) $\int \frac{5x^2-x-5}{(x^2-x-2)^2} dx$;

4) $\int \frac{dx}{x^3+4x}$.

50. Ці існуюць рацыянальныя дробы, інтэгралы ад якіх не выражаюцца праз элементарныя функцыі?

Калі існуюць, то прывесці прыклады.

1.4. Інтэграванне функцый, якія рацыянальныя залежаць ад трыганаметрычных

Тэарэтычныя пытанні

1. Даць азначэнне і прывесці прыклады функцый, якія рацыянальныя залежаць ад трыганаметрычных.

2. Сфармуляваць і даказаць тэарэму аб існаванні нявызначанага інтэграла ад функцыі, якая рацыянальна залежыць ад трыганаметрычных функцый.

3. Якая падстаноўка называецца ўніверсальнай трыганаметрычнай? Калі яна прымяняецца?

4. Якія падстаноўкі прымяняюцца для знаходжання інтэграла

$$\int R(\sin x, \cos x) dx,$$

калі падынтэгральная функцыя рацыянальна залежыць ад $\sin x, \cos x$ і

- 1) няцотна па $\sin x$;
- 2) няцотна па $\cos x$;
- 3) цотна па $\sin x$ і $\cos x$?

5. Сфармуляваць правіла знаходжання інтэграла $\int \sin^n x \cos^m x dx$, калі

- 1) m - няцотны лік, а n - адвольны;
- 2) n - няцотны лік, а m - адвольны;
- 3) m і n - цотныя лікі.

6. Сфармуляваць правіла знаходжання інтэгралаў $\int \operatorname{tg}^n x dx$; $\int \operatorname{ctg}^m x dx$.

Заданні для аўдыторнай работы

A

51. Знайсці інтэгралы з дапамогай ўніверсальнай трыганаметрычнай падстаноўкі:

1) $\int \frac{dx}{3 + \cos x}$;

2) $\int \frac{dx}{5 - 4 \sin x}$;

3) $\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$;

4) $\int \frac{1 + 2 \cos x}{3 - \sin x} dx$.

52. Знайші інтегралы з дапамогай падыходзячых падстановак:

1) $\int \cos^4 x \sin x dx$;

2) $\int \frac{\sin x dx}{(1 + \cos x)^2}$;

3) $\int \frac{\cos^3 x}{4 - \sin^2 x} dx$;

4) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx$;

5) $\int \frac{dx}{3 \sin^2 x + \cos^2 x}$;

6) $\int \frac{dx}{4 - 5 \sin^2 x}$

53. Знайші інтегралы ад цэлых дадатных ступеней трыганаметрычных функцый:

1) $\int \sin^4 2x \cos 2x dx$;

2) $\int \cos^2 x \sin^3 x dx$;

3) $\int \cos^5 x dx$;

4) $\int \cos^2 3x dx$;

5) $\int \sin^4 x dx$;

6) $\int \operatorname{ctg}^3 x dx$;

7) $\int \sin 6x \cos x dx$;

8) $\int \sin 5x \sin 2x dx$.

Б

54. Знайші інтегралы:

1) $\int \cos^4 \frac{x}{3} \sin^5 \frac{x}{3} dx$;

2) $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$;

3) $\int \frac{dx}{\operatorname{ctg} x + 2}$;

4) $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^4 x}$;

5) $\int \frac{\sin x dx}{\sin^3 x + \cos^3 x}$;

6) $\int \frac{dx}{(a \sin x + b \cos x)^2}$;

7) $\int \frac{dx}{\sin x \sin 2x}$;

8) $\int \frac{1 - \sin x + \cos x}{1 + \sin x - \cos x} dx$.

Заданні для самастойнай работы

А

55. Знайші інтегралы з дапамогай універсальнай трыганаметрычнай падстаноўкі:

1) $\int \frac{dx}{5 - 3 \cos x}$;

2) $\int \frac{dx}{5 + 4 \sin x}$;

3) $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$;

4) $\int \frac{2 - \sin x}{2 + \cos x} dx$.

56. Знайдіть інтеграли з допомогою падаючих підстановок:

1) $\int \cos^3 x dx;$

2) $\int \frac{\cos x}{(1 - \sin x)^3} dx;$

3) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x} dx;$

4) $\int \frac{dx}{\cos^4 x};$

5) $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx;$

6) $\int \operatorname{tg}^4 x dx.$

57. Знайдіть інтеграли:

1) $\int \sin^2 \frac{x}{3} dx;$

2) $\int \sin^2 x \cos^3 x dx;$

3) $\int \cos^4 x dx;$

4) $\int \sin^5 x dx;$

5) $\int \sin x \cos 3x dx;$

6) $\int \cos 2x \cos 5x dx.$

Б

58. Знайдіть інтеграли:

1) $\int \sin^2 \frac{x}{2} \cos^5 \frac{x}{2} dx;$

2) $\int \cos^6 x dx;$

3) $\int \sin x \sin 2x \sin 3x dx;$

4) $\int \frac{\cos x - \sin x}{(1 + \sin x)^2} dx;$

5) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx;$

6) $\int \frac{3 \operatorname{tg} x + 1}{2 \sin 2x - 5 \cos 2x + 1} dx.$

Задання для самоконтролю

59. Запишіть, які з функцій з'являються раціональними від $\sin x$ і $\cos x$:

1) $\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x};$

2) $\cos^4 x;$

3) $\frac{\sqrt[3]{\cos^2 x}}{2 + \sin x};$

4) $\frac{1 - \cos x}{\sin^4 x}.$

60. Запишіть, які з функцій з'являються нелінійними на $\sin x$:

1) $\sin^3 x \cos^2 x;$

2) $\frac{1 + \sin x}{\cos x};$

3) $\frac{\sin 2x}{4 + \cos x}.$

61. Запісаць, якія з інтэгралаў бяруцца з дапамогай падстаноўкі $\sin x = t$:

$$1) \int \sin^2 x \cos^3 x dx; \quad 2) \int \cos^4 x dx; \quad 3) \int \frac{\cos x}{1 + \cos^2 x} dx.$$

62. Запісаць, якія з інтэгралаў бяруцца з дапамогай падстаноўкі $\operatorname{tg} x = t$:

$$1) \int \sin^2 x \cos^4 x dx; \quad 2) \int \operatorname{tg}^5 x dx; \quad 3) \int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^4 x}.$$

63. Знайсці інтэгралы:

$$1) \int \cos^4 x dx; \quad 2) \int \frac{dx}{2 - \sin x + \cos x}.$$

64. Ці існуюць функцыі $R(\sin x, \cos x)$, рацыянальна залежныя ад $\sin x, \cos x$, інтэгралы ад якіх не выражаюцца праз элементарныя функцыі? Калі існуюць, то прывесці прыклады.

1.5. Інтэграванне ірацыянальных функцый

Тэарэтычныя пытанні

1. Запісаць, якія падстаноўкі прымяняюцца для вылічэння інтэгралаў віду:

$$\begin{aligned} 1) & \int R(x; \sqrt{ax+b}) dx; \\ 2) & \int R(x; \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}) dx; \\ 3) & \int R(x; \sqrt[n]{x}; \sqrt[n]{x}; \dots; \sqrt[n]{x}) dx, \end{aligned}$$

дзе падынтэгральная функцыя рацыянальна залежыць ад узказаных у дужках аргументаў.

2. Сфармуляваць і даказаць тэарэму аб існаванні нявызначаных інтэгралаў 1) – 3).

3. Запісаць, якія трыганаметрычныя падстаноўкі прымяняюцца для вылічэння інтэгралаў віду:

$$\begin{aligned} 4) & \int R(x; \sqrt{a^2 - x^2}) dx; \\ 5) & \int R(x; \sqrt{a^2 + x^2}) dx; \\ 6) & \int R(x; \sqrt{x^2 - a^2}) dx. \end{aligned}$$

Заданні для аудиторнай работы

A

65. Знайсці інтэгралы:

$$1) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 6x + 5}};$$

$$3) \int \frac{3x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx;$$

$$5) \int \frac{dx}{\sqrt[3]{5x-3-1}};$$

$$7) \int \frac{\sqrt{x} dx}{(\sqrt{x}-3)^6};$$

$$9) \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx;$$

$$2) \int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}};$$

$$4) \int \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+3}+1} dx;$$

$$6) \int \frac{dx}{2\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}};$$

$$8) \int \frac{dx}{\sqrt[3]{3+2x} + \sqrt{3+2x}};$$

$$10) \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4} dx.$$

Б

66. Знайсці інтэгралы:

$$1) \int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx;$$

$$3) \int x^2 \sqrt{9-x^2} dx;$$

$$5) \int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx;$$

$$2) \int \sqrt{3+4x-4x^2} dx;$$

$$4) \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2-4}};$$

$$6) \int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \frac{dx}{x^2}.$$

Заданні для самастойнай работы

A

67. Знайсці інтэгралы:

$$1) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+9}};$$

$$3) \int \frac{x+1}{\sqrt{2x+1}+1} dx;$$

$$5) \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+2\sqrt{x}}};$$

$$2) \int \frac{5x-3}{\sqrt{x^2+x+1}} dx;$$

$$4) \int \frac{dx}{(1+\sqrt{x})^3};$$

$$6) \int \sqrt{x}(2+\sqrt{x})^6 dx;$$

$$7) \int \frac{dx}{x\sqrt{4+x^2}};$$

$$8) \int \frac{dx}{x^2\sqrt{16-x^2}}.$$

Б

68. Знайдіть інтегралы:

$$1) \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-4)^3}};$$

$$2) \int \sqrt{3-2x-x^2} dx;$$

$$3) \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x};$$

$$4) \int x^3 \sqrt[3]{(1+x^3)^2} dx.$$

Заданні для самоконтролю

69. Запишіть, з допомогою яких підстановок можна вилічити інтегралы:

$$1) \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt{x}};$$

$$2) \int \frac{\sqrt{x+1}}{x+4} dx;$$

$$3) \int \sqrt{x}(3-\sqrt{x})^3 dx.$$

70. Запишіть, з допомогою яких тригонометричних підстановок можна вилічити інтегралы:

$$1) \int \sqrt{16-x^2} dx;$$

$$2) \int \frac{\sqrt{9+x^2}}{x^4} dx;$$

$$3) \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4}}.$$

Глава 2. ВИЗНАЧАНЫ ІНТЕГРАЛ

2.1. Інтегральная сума. Визначаны інтеграл, яго ўласцівасці

Тэарэтычныя пытанні

1. Як будзеца інтегральная сума $f(x)$ на $[a;b]$?
2. Які геаметрычны сэнс інтегральнай сумы $f(x)$ на $[a;b]$?
3. Што называецца вызначаным інтэгралам?
4. Які геаметрычны сэнс вызначанага інтэграла?
5. Які эканамічны сэнс вызначанага інтэграла?
6. Калі існуе вызначаны інтэграл?
7. Якія галоўныя ўласцівасці вызначанага інтэграла вы ведаеце?

Заданні для аудиторної роботи

A

Не вилічаючи інтеграли, адкажыце, якія знакі яны маюць (1-6).

$$1. \int_{-2}^1 x^3 dx.$$

$$2. \int_{\frac{1}{3}}^1 x \ln x dx.$$

$$3. \int_{-1}^2 \sqrt[3]{x} dx.$$

$$4. \int_{-1}^1 e^{-x^2} dx.$$

$$5. \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx.$$

$$6. \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \lg x dx.$$

Не вылічаючи інтегралы, адкажыце, якія з іх большыя (7-10).

$$7. \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{ці} \quad \int_1^3 \frac{dx}{x}.$$

$$8. \int_1^2 \frac{dx}{x^2} \quad \text{ці} \quad \int_1^2 \frac{dx}{x^4}.$$

$$9. \int_1^4 \log_2 x dx \quad \text{ці} \quad \int_1^4 \ln x dx.$$

$$10. \int_2^5 2^x dx \quad \text{ці} \quad \int_2^5 5^x dx.$$

Ацаніце інтегралы (11-13).

$$11. \int_{-1}^1 \sqrt{8+x^3} dx.$$

$$12. \int_{-1}^1 \sqrt[3]{26+x^3} dx.$$

$$13. \int_{-1}^1 \sqrt[3]{31+x^5} dx.$$

Заданні для самастойнай работы

A

Якія знакі маюць інтегралы (14-19)?

$$14. \int_{-1}^2 x^5 dx.$$

$$15. \int_{-1}^2 2^x dx.$$

$$16. \int_{-\frac{1}{2}}^2 \ln(1+x) dx.$$

$$17. \int_{-1}^1 (1+x)^3 dx.$$

$$18. \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx.$$

$$19. \int_{-5}^0 (1-x^2) dx.$$

Якія з інтэгралаў большыя (20-22)?

$$20. \int_0^1 x^2 dx \quad \text{ці} \quad \int_0^1 x^5 dx.$$

$$21. \int_{-1}^0 3^x dx \quad \text{ці} \quad \int_{-1}^0 8^x dx.$$

$$22. \int_{-1}^1 2^x dx \quad \text{ці} \quad \int_{-1}^1 2^{-x} dx.$$

Ацаніць інтэгралы (23-25).

23. $\int_0^2 \sqrt{12+x^2} dx.$

24. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}}$

25. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{10+3\cos x}.$

Пытанні для самакантролю

1. Ці можа $\int_a^b f(x)dx = 0$, калі $a \neq b$, $f(x) \neq 0 \forall x \in [a, b]$?

2. Калі $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$?

3. Калі $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$?

4. Ці сапраўдна роўнасць $\int_{-1/2}^{1/2} \sin^2 x \ln \frac{1+x}{1-x} dx = 0$?

5. Ці сапраўдна няроўнасць $\int_0^1 e^{x^2} dx > 1$?

2.2. Формула Ньютана-Лейбніца. Замена зменнай у вызначаным інтэграле. Інтэграванне па частках

Тэарэтычныя пытанні

1. Як запісваецца формула Ньютана-Лейбніца?
2. Калі выгадна выкарыстоўванне формулы Ньютана-Лейбніца для вылічэння вызначанага інтэграла?
3. Як запісваецца формула замены зменнай у вызначаным інтэграле?
4. Калі выкарыстоўваецца формула замены зменнай у вызначаным інтэграле?
5. Як запісваецца формула інтэгравання па частках у вызначаным інтэграле?
6. Інтэгралы ад якіх функцый бяруцца па частках?

A

Вилічыць інтэгралы (26-47).

$$26. \int_1^2 (3x^2 + 2x + 1) dx.$$

$$28. \int_0^{\pi/2} \cos^3 x \sin x dx.$$

$$30. \int_0^{\pi/2} \sin^3 \varphi d\varphi.$$

$$32. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{1 + x^2} dx.$$

$$34. \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \cos x}.$$

$$36. \int_0^{16} \sqrt{256 - x^2} dx.$$

$$38. \int_2^9 \frac{x dx}{\sqrt[3]{x-1}}.$$

$$40. \int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^2 x dx.$$

$$42. \int_0^1 e^{x+e^x} dx.$$

$$44. \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{4 + 3 \cos x}.$$

$$27. \int_0^1 x^2 \sqrt{1+x^3} dx.$$

$$29. \int_0^{\ln 3} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}.$$

$$31. \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx.$$

$$33. \int_{-1/2}^{1/2} \frac{3^x}{1+9^x} dx.$$

$$35. \int_0^{\pi} 2^4 \sin^4 x \cos^4 x dx.$$

$$37. \int_0^{\pi} x^2 \cos x dx.$$

$$39. \int_0^{1/2} \arcsin x dx.$$

$$41. \int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}.$$

$$43. \int_0^{1/2} \arccos x dx.$$

$$45. \int_0^1 x e^{-x} dx.$$

Б

$$46. \int_1^e \ln^2 x dx.$$

$$47. \int_0^{\pi/2} e^x \sin x dx.$$

Даказаць, што:

$$48. \int_1^e \frac{dx}{\ln x} = \int_1^2 \frac{e^x dx}{x}.$$

$$49. \int_{-2}^2 \sin x f(\cos x) dx = 0.$$

$$50. \int_{1/\sqrt{2}}^1 \frac{dx}{\arcsin x} = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{x}.$$

Заданні для самостійної роботи

А

Вилічыць інтэгралы (51-70).

$$51. \int_0^1 x^5 \sqrt{1+x^6} dx.$$

$$52. \int_0^{\pi/2} \sin^4 x \cos x dx.$$

$$53. \int_1^e \frac{1 + \ln x}{x} dx.$$

$$54. \int_0^{\pi/2} \lg^2 x dx.$$

$$55. \int_{-1}^3 \frac{dx}{\sqrt{2x+3+2}}.$$

$$56. \int_0^5 \frac{x dx}{\sqrt{1+3x}}.$$

$$57. \int_2^9 \frac{x dx}{\sqrt[3]{x-1}}.$$

$$58. \int_1^2 \frac{dx}{x^2 + x^4}.$$

$$59. \int_3^8 \frac{\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{x+1}-1} dx.$$

$$60. \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2 + \cos x}.$$

$$61. \int_{-\pi}^{\pi} x \sin x \cos x dx.$$

$$62. \int_0^1 x^3 e^{-x^2} dx.$$

$$63. \int_0^1 x^2 e^{-x} dx.$$

$$64. \int_0^1 \ln(x^2 + 1) dx.$$

$$65. \int_0^1 x^3 e^{-x^2} dx.$$

$$66. \int_0^1 \arctg \sqrt{x} dx.$$

$$67. \int_0^{\pi/2} \sqrt{x} \ln x dx.$$

$$68. \int_0^{\pi/9} \frac{x dx}{\cos^2 3x}.$$

$$69. \int_0^{\pi} (x+2) \cos \frac{x}{2} dx.$$

$$70. \int_0^1 \frac{\arcsin \frac{x}{2}}{\sqrt{2-x}} dx.$$

Б

Вилічыць інтэгралы (71-80).

$$71. \int_1^e \sin(\ln x) dx.$$

$$72. \int_1^e \cos(\ln x) dx.$$

$$73. \int_{-4}^4 \frac{x^4 \sin x}{x^4 + 4} dx.$$

$$75. \int_{-2000}^{2000} \frac{x^{2001} - x}{x^{2000} + 1} dx.$$

$$77. \int_0^2 f(x) dx, \text{ калі } f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 4 - 2x, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

$$79. \int_0^{\pi} x \operatorname{sgn}(\cos x) dx.$$

$$74. \int_{-3}^3 \frac{x^3 \cos x}{x^2 + 3} dx.$$

$$76. \int_0^{\pi/2} \frac{\cos y dy}{4 + \sqrt{\sin y}}.$$

$$78. \int_0^3 \operatorname{sgn}(x - x^3) dx.$$

$$80. \int_1^{n+1} \ln[x] dx.$$

2.3. Няўласныя інтэгралы

Пытанні для кантролю

1. Дайце азначэнне няўласнага інтэграла з бясконцымі граніцамі.
2. Дайце азначэнне збежнасці няўласнага інтэграла.
3. Які няўласны інтэграл называецца разбежным?
4. Якія вы ведаеце прыкметы збежнага і разбежнага няўласнага інтэграла?
5. Дайце азначэнне няўласнага інтэграла ад неабмежаванай функцыі.
6. Сфармулюйце прыкметы збежнасці і разбежнасці няўласных інтэгралаў ад неабмежаваных функцый.

$$7. \text{ Даследуйце збежнасць інтэграла } \int_a^{\infty} \frac{dx}{(x-a)^k}, a \neq 0.$$

$$8. \text{ Даследуйце збежнасць інтэграла } \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^k}, a \neq 0.$$

Заданні для аўдыторнай работы

A

Вылічыць няўласныя інтэгралы (або даказаць іх разбежнасць) (81-103).

$$81. \int_1^{+\infty} \frac{3}{x^2} dx.$$

$$83. \int_5^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x-1}}.$$

$$85. \int_{-\infty}^0 x^2 e^{4x^3} dx.$$

$$82. \int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x}.$$

$$84. \int_{-\infty}^0 e^{2x} dx.$$

$$86. \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{x^4 + 5}}.$$

$$87. \int_{-\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{x dx}{9 + x^4}.$$

$$89. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$$

$$91. \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \ln x}.$$

$$93. \int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}.$$

$$95. \int_{-1}^1 \frac{3x^2 + 2}{\sqrt[3]{x^2}} dx.$$

$$88. \int_0^{+\infty} \cos 3x dx.$$

$$90. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+2)dx}{x^2 + 4x + 7}.$$

$$92. \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$94. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{ctg} x dx.$$

$$96. \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}}.$$

Б

$$97. \int_0^{+\infty} x \sin x dx.$$

$$99. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+x)}.$$

$$101. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x}.$$

$$103. \int_0^1 x \ln x dx.$$

$$98. \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx.$$

$$100. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^{-x} + e^x}.$$

$$102. \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$$

$$104. \int_{-1}^0 \frac{e^x dx}{x^2}.$$

Даследаваць на збежнасць і разбежнасць няўласныя інтэгралы (105-112).

$$105. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + x^2 + 2}$$

$$107. \int_1^{+\infty} \frac{e^x}{x} dx.$$

$$109. \int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}} dx.$$

$$111. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

$$106. \int_1^{+\infty} \frac{4 + \cos x}{\sqrt{x^3}} dx.$$

$$108. \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{x^3 + 1}.$$

$$110. \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^5 + x^3}.$$

$$112. \int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}} - 1}.$$

Задання для самостійної роботи

Вилічіть няуласныя інтэгралы (або даказаць іх разбежнасьць) (113-132).

А

$$113. \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx.$$

$$115. \int_2^{+\infty} \frac{x dx}{x^2 - 3}.$$

$$117. \int_0^{+\infty} \sin \frac{x}{3} dx.$$

$$119. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x+3}{x^2+3x+7} dx.$$

$$121. \int_0^4 \frac{dx}{(x-2)^2}.$$

$$123. \int_1^e \frac{dx}{x^4 \sqrt{\ln x}}.$$

$$114. \int_2^{+\infty} \frac{dx}{4+x^2}.$$

$$116. \int_{-\infty}^0 \frac{\arctg x dx}{1+x^2}.$$

$$118. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+6x+11}.$$

$$120. \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \ln^2 x}.$$

$$122. \int_0^{\pi} \frac{dx}{1-\cos x}.$$

$$124. \int_{-1}^1 \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^3}} dx.$$

Б

$$125. \int_0^{+\infty} x \cos x dx.$$

$$127. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}.$$

$$129. \int_1^3 \frac{dx}{x^2-6x+8}.$$

$$131. \int_0^1 \ln x dx.$$

$$126. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x+x^3}.$$

$$128. \int_0^2 \frac{dx}{8-x^3}.$$

$$130. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}.$$

$$132. \int_0^1 \frac{dx}{x^2+x^4}.$$

Даследаваць на збежнасьць няуласныя інтэгралы (133-138).

$$133. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^6+x^3+4}.$$

$$135. \int_1^{+\infty} \frac{x^4+2}{x^5} dx.$$

$$134. \int_2^{+\infty} \frac{5+\sin x}{\sqrt[6]{x^7}} dx.$$

$$136. \int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx.$$

$$137. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}}$$

$$138. \int_0^1 \frac{\sin(\frac{x}{2})}{\sqrt[3]{x}}$$

Глава 3. ПРИМЯНЕНИЕ ВЫЗНАЧАНАГА ИНТЕГРАЛА

3.1. Плошча плоскай фігуры

Тэарэтычныя пытанні

1. Як вылічваецца плошча крывалінейнай трапецыі ў дэкартавых каардынатах?

2. Запішыце формулу, па якой можна вылічыць плошчу крывалінейнай трапецыі, абмежаванай крывой, зададзенай параметрычнымі раўнаннямі.

3. Як можна вылічыць плошчу крывалінейнага сектара ў палярных каардынатах?

Заданні для аўдыторнай работы

Вылічыць плошчы фігур, якія абмежаваны лініямі (1 - 33).

A

$$1. y = 4 - x^2, 2x + y - 4 = 0.$$

$$2. y = (x+2)^2, y = 4 - x, y = 0.$$

$$3. y = 2 - x^2, y^3 = x^2.$$

$$4. x = 3y - y^2, x = 0.$$

$$5. 2x = (y+3)^2, x + y - 1 = 0.$$

$$6. y^2 = 4x, x = 1, x = 9.$$

$$7. y = 2^{x-3} + 1, y = 2^{3-x} + 1, y = 1,5.$$

$$8. y = x - \frac{\pi}{2}, y = \cos x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}.$$

$$9. y = a^2 / (x^2 + a^2), y = 0.$$

$$10. y = x^2 - 6x + 10, y = 6x - x^2, x = -1.$$

$$11. y = \arcsin x, y = \pm \frac{\pi}{2}, x = 0.$$

$$12. x = 3 \cos t, y = 2 \sin t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$13. x = 2(1 - \sin t), y = 2(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi, y = 0.$$

$$14. x = 5 \cos 2t, y = 2 \sin 2t, \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi, y = 0.$$

$$15. \rho = 2 \cos 3\varphi, -\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}.$$

$$16. \rho = 5(1 - \sin \varphi), \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{4}.$$

$$17. \rho = 5 \sin \varphi.$$

$$18. \rho = a(1 - \cos \varphi).$$

$$19. x^2 + y^2 = 8, y - x = 0, y - \sqrt{3}x = 0 (x \geq 0, y \geq 0).$$

Б

20. $y = 4^{-x}, y = -\log_4 x, x = 0, y = 0$. 21. $y^2 = \sin^2 x \cos x, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.
 22. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2), x^2 + y^2 = a^2(x^2 + y^2 \geq a^2)$.
 23. $\rho = a \sin 3\varphi (a > 0)$. 24. $\rho = a(1 - \cos \varphi), \rho = a(\rho \geq a)$.
 25. $\rho^2 = 2 \cos 2\varphi$. 26. $\rho = 1 + \cos \varphi, \rho = \sqrt{3} \sin \varphi$.
 27. $x = 3t^2, y = 3t - t^3$. 28. $x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, x = 1 (x \geq 1)$.
 29. $y^2 = x(x-1)^2$. 30. $(x^2 + y^2)^2 = a^2 xy$.
 31. $a^2 y^2 = x^2(a^2 - x^2)$. 32. $x = a \sin t, y = b \sin 2t$.
 33. $x = 2t - t^2, y = 2t^2 - t^3$.

34. При якій значенні a пряма $x = a$ розділить площу фігури, обмеженої лініями $y = \frac{1}{x^2}, x = 1, x = 2, y = 0$, папалам?

35. Вилічіть площу фігури, яка обмежена кривою $y = \frac{1}{x}$, дотичній до неї в пункті $(1; 1)$ і прямою $x = 3$.

36. Вилічіть площу фігури, яка обмежена параболою $y = x^2$ і нормаллю до неї в пункті перетинання параболы з прямою $x = 1$.

37. Вилічіть площу фігури, яка обмежена параболою $y = x^2 - 2x + 3$, дотичній до неї в пункті $A(3; 6)$ і восьм'ю координат.

Задання для самостійної роботи

Вилічіть площу фігур, які обмежені лініями (38-67).

А

38. $y = 3x - x^2, y = 0$. 39. $x = 4y - y^2, x = 0$.
 40. $2x - y = 0, x - 2y + 3 = 0, y = 4$. 41. $y = \frac{1}{4}x^2 - x - 3, y = 0$.
 42. $y = x^2 + 4x + 5, x - y + 9 = 0$. 43. $yx = 6, x + y - 7 = 0$.
 44. $y = (x - 4)^2, y = 16 - x^2, y = 0$. 45. $x = 2y^2, x = 3y^2 - 1$.
 46. $y = 2^x, y = 2 - \log_2 x, x = 0, y = 0$. 47. $y = \frac{1}{x^2}, y = 0, x \geq 1$.
 48. $y = 1 - x, y = \cos x, y = 0$. 49. $x = 2 \cos t, y = 2 \sin t$.
 50. $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 2\pi \leq t \leq 4\pi, y = 0$.
 51. $x = a \cos^3 t, y = b \sin^3 t$. 52. $\rho = 4 \sin 2\varphi; 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

53. $\rho = 3 \cos^2 \frac{\varphi}{2}, -\pi \leq \varphi \leq \pi.$

54. $\rho = 3 + \sin 2\varphi.$

55. $x^2 + y^2 = 16, y = \frac{1}{\sqrt{3}}x, y = \sqrt{3}x (x > 0, y > 0)$

Б

56. $y = |x| + 10, y = 0, x = -2, x = 1.$

57. $y^2 + x^2 = 2y, x^2 + y^2 = 4y, y = -x, y = x.$

58. $\rho = a \cos \varphi$ (аднаго лістка).

59. $\rho = 2a \cos 3\varphi, \rho = a, (\rho \geq a).$

60. $\rho = 4 \sin^2 \varphi.$

61. $\rho = 2 \cos \varphi, \rho = 1, (\rho \geq 1).$

62. $x = y^2(1 - y), x = 0.$

63. $x = t^2, y = t - \frac{t^3}{3}.$

64. $x = t^2 - 1, y = t^3 - t.$

65. $x = a \cos t, y = b \sin t \cos^2 t.$

66. $x = 2 \cos t, y = 4 \sin t, y = 2, (y \geq 2).$

67. $(y^2 + x^2)^2 = ax^3.$

68. При якім значэнні a плошча фігуры, абмежаванай лініямі $y = x^2 + a^2x + 1, y = 0, x = 0, x = 1$, будзе найменшай?

69. При якім дадатным значэнні a плошча крывалінейнай трапецыі, абмежаванай лініямі $y = \frac{x}{4} + \frac{1}{x}, y = 0, x = a, x = a + 3$, будзе мець найменшае значэнне?

70. Вылічыце плошчу фігуры, якая абмежавана парабалай $y = x^2 - 2x + 2$, датычнай да яе ў пункце $M(3;5)$ і воссю ардынат.

71. Вылічыце плошчу фігуры, абмежаванай крывой $y = x^4 - 2x^3 + 3$, воссю абсцыс і двюма ардынатамі, што адпавядаюць пунктам, у якіх функцыя $y(x)$ мае мінімум.

3.2. Даўжыня дугі крывой. Плошча паверхні вярчэння

Тэарэтычныя пытанні

1. Запішыце формулу, па якой можна вылічыць даўжыню дугі крывой у дэкартавых каардынатах.

2. Як вылічваецца даўжыня дугі, калі крывая зададзена параметрычнымі раўнаннямі?

3. Як вылічваецца даўжыня дугі лініі ў палярных каардынатах?

4. Запішыце формулу, па якой можна вылічыць плошчу паверхні

вярчэння фігуры вакол восі $Ox(Oy)$.

Заданні для аўдыторнай работы

А

Знайсні даўжыню дугі крывой (72-80).

72. $y = \ln(x^2 - 1), 2 \leq x \leq 3$.

73. $y^2 = (x-1)^3, 2 \leq x \leq 5$.

74. $y = 2(e^{\frac{x}{4}} + e^{-\frac{x}{4}}), 0 \leq x \leq 4$.

75. $y = \frac{1}{3}x\sqrt{x} - \sqrt{x}, 0 \leq x \leq 3$.

76. $x = t^2, y = t - \frac{1}{3}t^3, 0 \leq t \leq \sqrt{3}$.

77. $x = 8 \sin t + 6 \cos t, y = 6 \sin t - 8 \cos t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

78. $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ (першай аркі цыклоіды).

79. $\rho = 2e^{10\varphi}, 0 \leq \varphi \leq \frac{3}{2}\pi$.

80. $\rho = \frac{1}{2} \cos \varphi, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

81. Знайсці плошчу паверхні, якая ўтвараецца вярчэннем парабалы $y^2 = 4ax$ вакол восі абсцыс, ад вяршыні да пункта з абсцысай $x = 3a$.

Б

82. Знайсці перыметр фігуры, абмежаванай крывымі $y^3 = x^2, y = \sqrt{2-x^2}$.

83. Знайсці даўжыню пятлі крывой $x = \sqrt{3}t^2, y = t - t^3$.

84. Знайсці даўжыню дугі лагарыфмічнай спіралі $\rho = e^{a\varphi}$, якая знаходзіцца ўнутры акружнасці $\rho = 1$.

85. Знайсці плошчу паверхні, якая ўтвараецца вярчэннем лініі $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), (0 \leq t \leq 2\pi)$ вакол восі Ox .

86. Знайсці плошчу паверхні, якая ўтвараецца вярчэннем кардыёіды $\rho = 2(1 + \cos \varphi)$ вакол палярнай восі.

Заданні для самастойнай работы

А

Знайсні даўжыню дугі крывой (87-93).

87. $y = \sqrt{x^3}, 0 \leq x \leq 5$.

88. $y = \ln(\sin x), \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$.

$$89. y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \ln x, 1 \leq x \leq e.$$

$$90. x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, 0 \leq t \leq \ln \pi.$$

$$91. x = \frac{(t^3 - 3t)}{3}, y = t^2 + 2, 1 \leq t \leq 4.$$

$$92. \rho = 4 \sin \varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$93. \rho = 3(1 - \cos \varphi).$$

94. Знайсті площчу паверхні, яка ўтвараецца вярчэннем кубічнай парабалы $3y - x^3 = 0$ вакол восі абсцыс (ад $x_1 = 0$ да $x_2 = a$).

Б

95. Знайсті даўжыню дугі лініі $9y^2 = x(x-3)^2$ паміж пунктамі перасячэння з воссю Ox .

96. На цыклоідзе $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ знайсті пункт, які дзеліць першую арку цыклоіды па даўжыні ў адносінах 1:3.

$$97. \text{Знайсті даўжыню дугі крывой } \rho = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}.$$

$$98. \text{Знайсті даўжыню дугі крывой } x = \int_0^t \cos(\varphi^2) d\varphi,$$

$$y = \int_0^t \sin(\varphi^2) d\varphi, 0 \leq t \leq t_0.$$

99. Знайсті площчу паверхні, яка ўтвараецца вярчэннем лініі $x^2 = y + 4$ вакол восі $Oy, 0 \leq y \leq 2$.

100. Знайсті площчу паверхні, яка ўтвараецца вярчэннем лініі $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi$ вакол восі Oy .

3.3. Аб'ём цела

Тэарэтычныя пытанні

1. Як вылічваецца аб'ём па вядомых плошчах папярочных сячэнняў?
2. Запішыце формулу, па якой можна вылічыць аб'ём цела вярчэння вакол восі Ox .
3. Як вылічваецца аб'ём цела вярчэння вакол восі Oy ?

Заданні для аўдыторнай работы

А

Знайсті аб'ём цела, якое ўтвараецца вярчэннем вакол восі Ox фігуры,

абмежаванай лініямі (101-107).

$$101. \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 (x \geq 0, y \geq 0).$$

$$102. x^2 - y^2 = 1, y = 2\sqrt{2}, y = 0.$$

$$103. y = x^2, y = (x-2)^2, y = 0.$$

$$104. y = \sin x, y = \frac{2}{\pi}x.$$

$$105. y = e^x, x = 0, y = 2.$$

$$106. y = \frac{x^2}{2} + 2x + 2, y = 2.$$

$$107. y = \frac{64}{x^2 + 16}, x^2 = 8y.$$

Знайсі аб'ём цела, якое ўтвараецца вярчэннем вакол восі Oy фігуры, абмежаванай лініямі (108-111).

$$108. y = e^{x^2}, y = 0, x = 0, x = 1.$$

$$109. y = x^2, y = |x|.$$

$$110. x^2 - y^2 = a^2, x = 2a.$$

$$111. x = 4y - y^2, x = 0.$$

Б

112. Вылічыць аб'ём шаравога пояса, абмежаванага паверхнямі $x^2 + y^2 + z^2 = 16, x = 2, x = 3$.

113. Знайсці аб'ём цела, абмежаванага паверхнямі $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - z^2 = 1, z = -1, z = 1$.

114. Знайсці аб'ём цела, якое ўтвараецца вярчэннем вакол восі Ox фігуры, абмежаванай лініяй $x = b \cos^3 t, y = a \sin^3 t$.

115. Знайсці аб'ём цела, якое ўтвараецца вярчэннем вакол восі Ox фігуры, абмежаванай лініяй $y = \frac{8a^2}{x^2 + 4a^2}$ і яе асімптотай.

116. Вылічыць аб'ём цела, якое ўтвараецца вярчэннем вакол восі Oy фігуры, абмежаванай лініяй $y = 2x - x^2$ і восьсю абсцыс.

117. Вылічыць аб'ём цела, якое ўтвараецца вярчэннем вакол восі Ox фігуры, абмежаванай лініяй $x^2 + y^2 - 8y + 7 = 0$.

118. Вилічыць аб'ём цела, якое ўтвараецца вярчэннем заштрыхаванай фігуры (рыс.1) вакол восі Ox .

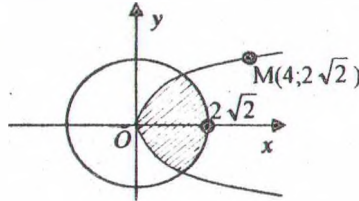


Рис. 1

119. Вилічыць аб'ём цела, якое ўтвараецца вярчэннем заштрыхаванай фігуры (рыс.2) вакол восі Oy .

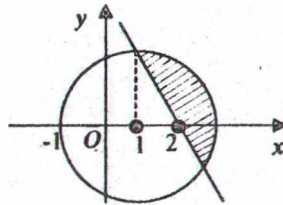


Рис. 2

Заданні для самастойнай работы

A

Знайсі аб'ём цела, якое ўтвараецца вярчэннем вакол восі Ox фігуры, абмежаванай лініямі (120-126).

120. $y = 2x - x^2, y = 0$.

121. $y = \sin x, y = \cos x, y = 0, (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$.

122. $y^2 = \frac{3}{2}x, x^2 + y^2 = 1, (x \geq 0)$.

123. $y = x, y = \frac{1}{x}, y = 0, x = 2$.

124. $y = e^{-2x} - 1, y = e^{-x} + 1, x = 0$.

125. $y = x + 1, y = 2x + 1, x = 2$.

126. $y = (x + 2)^2, y = 4 - x, y = 0$.

Знайсі аб'ём цела, якое ўтвараецца вярчэннем вакол восі Oy фігуры, абмежаванай лініямі (127-130).

127. $y = x^3, y = 0, x = 2$.

128. $y = x^2, 8x = y^2$.

129. $x^2 = y - 1, y = 0, x = 0, x = 1$.

130. $y = x, y = \frac{1}{x^2}, x = 2$.

Б

131. Вилічыць аб'ём цела, абмежаванага эліптычным парабалоідам $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2}$ і плоскасцю $z = 1$.

132. Вилічыць аб'ём цела, абмежаванага парабалоідам $z = x^2 + 2y^2$ і эліпсоідам $x^2 + 2y^2 + z^2 = 6$.

133. Вилічыць аб'ём бочкі, вышыня якой роўна h , дыяметр кожнай асновы – d , дыяметр сярэдняга сячэння – D . Восевыя сячэнні бакавой паверхні – парабалы з вяршынямі на акружнасці сярэдняга сячэння.

134. Вилічыць аб'ём цела, якое ўтвараецца вярчэннем вакол восі Oy фігуры, абмежаванай лініяй $y = \sin x$ і восяю абсцыс ($0 \leq x \leq \pi$).

135. Знайсці аб'ём цела, якое ўтвараецца вярчэннем вакол восі Oy фігуры, абмежаванай лініяй $xy^2 = 8 - 4x$ і яе асімптотай.

136. Вилічыць аб'ём цела, якое ўтвараецца вярчэннем заштрыхаванай фігуры (рыс. 3) вакол восі Ox .

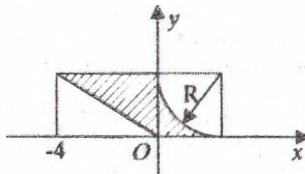


Рис. 3

137. Вилічыць аб'ём цела, якое ўтвараецца вярчэннем заштрыхаванай фігуры (рыс. 4) вакол восі Oy .

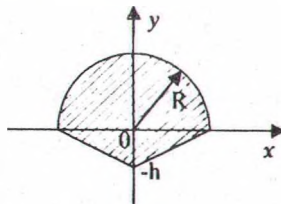


Рис. 4

138. Знайсці аб'ём цела, якое ўтвараецца вярчэннем вакол восі Oy фігуры, абмежаванай лініяй $x = a \cos^3 t$, $y = b \sin^3 t$.

139. Знайсці аб'ём цела, якое ўтвараецца вярчэннем фігуры, абмежаванай лініямі 1) $x = t^3$, $y = t^2$; 2) $y = 0$; 3) $|x| = 1$, - а) вакол восі Ox , б) вакол восі Oy .

3.4. Прымяненне вызначанага інтэграла да рашэння фізічных задач

Заданні для аўдыторнай работы

А

140. Хуткасць руху цела ў момант часу t задаецца формулай $v = 15 - 5t$, дзе v - хуткасць, м/с; t - час, с. Які шлях пройдзе цела ад пачатку адліку часу да спынення?

141. Знайсці масу стрыжня даўжынёй $l = 2$ м, калі лінейная шчыльнасць стрыжня змяняецца па закону $g = (2 + 0,5x^2)$ кг/м, x - адлегласць ад аднаго з краёў стрыжня.

142. Цела рухаецца з паверхні зямлі вертыкальна ўгору з хуткасцю $v = (39,2 - 9,8t)$ м/с. Знайсці найбольшую вышыню пад'ёму цела.

143. Якую работу трэба затраціць, каб сціснуць (расцягнуць) пружыну на 0,6 м, калі сіла ў 1 Н сціскае (расцягвае) яе на 0,01 м?

144. Канцэнтрацыя рэчыва ў вадзе змяняецца па закону $c = \frac{10x}{x+1}$, x - глыбіня слоя. Колькі рэчыва Q змяшчаецца ў вертыкальным слупку вады, плошча папярочнага сячэння якога $s = 1 \text{ м}^2$, а глыбіня змяняецца ад 0 м да 200 м?

Б

145*. Рэзервуар, які мае форму конуса з вышынёй 12 м, напоўнены вадкасцю, удзельная вага якой $12,74 \text{ Н/м}^3$. Аснова конуса ўяўляе сабою круг з дыяметрам 8 м. Знайсці работу, якую трэба затраціць, каб выпампаваць вадкасць з рэзервуара.

146*. Вылічыць работу, якая неабходна для выпампавання масла з вертыкальнага цыліндрычнага рэзервуара вышынёй $H = 6 \text{ м}$ і радыусам асновы $R = 2 \text{ м}$. (Удзельная вага масла $\gamma = 8820 \text{ Н/м}^3$)

147. Пласціна, што мае форму раўнабедранага трохвугольніка з асновай 0,1 м і вышынёй 0,08 м, апушчана вертыкальна ў ваду так, што яе аснова ляжыць на паверхні вады. Вылічыць велічыню сілы, з якой вада ўздзейнічае на кожны бок пласціны.

148. Вылічыць велічыню сілы, з якой вада ўздзейнічае на бок вертыкальнага парабалічнага сегмента, вяршыня якога ляжыць на паверхні вады, а аснова, роўная 1,2 м, знаходзіцца на глыбіні 2 м.

Заданні для самастойнай работы

А

149. Два целы пачалі рухацца адначасова з аднаго і таго ж пункта ў адным напрамку па прамой. Першае цела рухаецца з хуткасцю $v = (6t^2 + 2t)$ м/с, другое – з хуткасцю $v = (4t + 5)$ м/с. На якой адлегласці адно ад другога яны будуць праз 3 с?

150. Вылічыць шлях, які прайшло цела, што свабодна падае ў пустэце, за першыя T секунды руху, калі вядома, што хуткасць свабоднага падзення ў пустэце $v = gt$, дзе t – час, g – паскарэнне сілы цяжару.

151. Знайсі масу стрыжня даўжынёй $l = 10$ м, калі лінейная шчыльнасць стрыжня змяняецца па закону $\rho = (2 + 0,1x^3)$ кг/м, x – адлегласць ад аднаго з канцоў стрыжня.

152. Вылічыць работу, якая выконваецца пры расцягванні пружыны на 0,05 м, калі вядома, што сіла, якая патрабуецца для расцягвання пружыны, прапарцыянальна падаўжэнню x пружыны і што для падаўжэння пружыны на 0,01 м патрабуецца сіла, роўная 1 Н.

Б

153*. Вылічыць работу, якую трэба затраціць, каб выпампаваць ваду, што напўняе паўсферычную пасудзіну з радыусам $R = 0,6$ м.

154*. Пласціна мае форму, якая вызначана на рыс. 5. Знізу яна абмяжоўваецца парабалай, зверху – прамой. Шырыня плаціны ля паверхні роўная 40 м, глыбіня – 10 м. Знайсі велічыню сілы, з якой вада ўздзейнічае на плаціну.

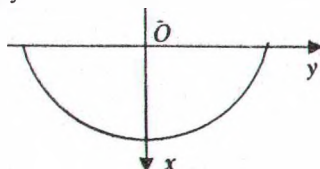


Рис. 5

155. Вертыкальная пласціна мае форму трапецыі. Вылічыць велічыню сілы, з якой вада ўздзейнічае на адзін бок пласціны, калі вядома, што верхняя аснова пласціны роўна 70 м, ніжняя аснова – 50 м, вышыня пласціны – 20 м.

156. Знайсці работу, якая патрабуецца для выпампавання вады з катла, які мае форму паўцыліндра з радыусам асновы r і вышынёй H .

*У задачах № 145, 146, 153, 154 маюць на ўвазе, што выпампоўваюць вадкасць на ўзровень верху рэзервуара.

АДКАЗЫ

Глава 1. Навывзначаны інтэграл

1. 1) $2x^3 - 0,6\sqrt{x^5} + 8x + C$; 2) $12\sqrt[4]{x} - \frac{2}{3x^3} + C$; 3) $4\ln|x| - \frac{7}{x} - e^x + C$;

4) $4\ln|x| + 2\sqrt{x} - \frac{8}{\sqrt{x}} + C$; 5) $C - 4\operatorname{ctgx} - \cos x$; 6) $\frac{1}{4}\operatorname{arctgx} \frac{x}{4} + C$;

7) $\frac{1}{3^x \ln 3} - \frac{1}{2^x \ln 2} + C$; 8) $\frac{\arcsin x}{\sqrt{5}} + C$; 9) $\ln|x + \sqrt{3+x^2}| + C$;

10) $\frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{6+x}}{\sqrt{6-x}} \right| + C$.

2. 1) $\frac{1}{2} \sin 2x + C$; 2) $C - 3 \cos \frac{x}{3}$; 3) $C - \frac{1}{3} e^{-3x+2}$; 4) $\frac{1}{4} \operatorname{tg} 4x + C$;

5) $\frac{1}{5} \ln|5x+7| + C$; 6) $C - 2\sqrt{6-x}$; 7) $\frac{1}{33}(3x-1)^{11} + C$; 8) $\frac{1}{3} \operatorname{arctg} 3x + C$.

3. 1) $\operatorname{tg} x - x + C$; 2) $\frac{1}{2}(x + \sin x) + C$; 3) $\ln|x| + 2\operatorname{arctgx} + C$;

4) $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctgx} + C$; 5) $\arcsin \frac{x}{\sqrt{2}} + \ln|x + \sqrt{2+x^2}| + C$; 6) $\frac{1}{6} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{3} + C$;

7) $\frac{1}{3} \arcsin \frac{3x-1}{4} + C$; 8) $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x}{x+4} \right| + C$.

4. 1) $u(x) \cdot v(x) + C$; 2) $\ln|u(x)| + C$.

5. $y = \frac{1}{3} \ln|3x+1| - 3$.

6. 1) $3\sqrt{x} - x^4 + 5x + C$; 2) $\frac{2}{7}\sqrt{x^7} + \frac{1}{3}x^3 + C$; 3) $C - \frac{2}{x} - \frac{5}{2}\sqrt{x^3}$;

4) $6\operatorname{tg} x - \sin x + C$; 5) $\frac{-1}{2x^4} - \frac{3}{11\sqrt{x^{11}}} + C$; 6) $5e^x - 4\ln|x| + C$;

7) $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3} + C$; 8) $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{4+x}{4-x}\right| + C$; 9) $7\arcsin\frac{x}{2} - 3\ln|x + \sqrt{4+x^2}| + C$;

10) $C - \frac{1}{3}\cos(3x+2) + C$; 11) $C - 3\operatorname{ctg}\frac{x}{3}$; 12) $C - \frac{(1-2x)^8}{16}$.

13) 1) $C - x - \operatorname{ctg} x$; 2) $\frac{1}{2}(x - \sin x) + C$; 3) $\operatorname{arctg} x - \frac{1}{x} + C$;

4) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + \frac{18}{7}\sqrt{x^7} + \frac{9}{5}\sqrt{x^5} + \frac{6}{13}\sqrt[6]{x^{13}} + C$; 5) $C - \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$;

6) $\arcsin\frac{x}{2} - \ln|x + \sqrt{4+x^2}| + C$; 7) $\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{3x+1}{2} + C$;

8) $\ln|x+1 + \sqrt{x^2+2x+3}| + C$.

9) 1) $\frac{4}{4+x^2}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}$

10) 1) так; 2) так.

11) 1) $\frac{1}{3}f(3x) + C$; 2) $f(x+1) + C$; 3) $C - \frac{1}{u(x)}$; 4) $\operatorname{arctg} u(x) + C$.

12) $S = 1 + 3\sin t$.

14) 1) $\frac{1}{4}e^{4x} + C$; 2) $\frac{1}{5}\operatorname{tg} 5x + C$; 3) $\operatorname{arctg}(x-2) + C$;

4) $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x}{x+6}\right| + C$; 5) $C - \frac{1}{2}\ln|7-2x|$; 6) $C - 3\cos(\frac{x}{3}-1)$; 7) $C - \frac{1}{\ln 2}2^{3-x}$;

8) $\frac{1}{49}(7x-9)^7 + C$; 9) $\frac{1}{4}\arcsin\frac{4x+1}{3} + C$;

10) $\ln|x-2 + \sqrt{x^2-4x+7}| + C$; 11) $\frac{1}{2}e^{x^2} + C$; 12) $C + \frac{1}{2}\sin x^2$;

13) $\frac{1}{3}\sqrt{4+3x^2} + C$; 14) $C - \frac{3}{8}\ln|9-4x^2|$; 15) $C - \frac{1}{10(1+5x^2)}$;

16) $\frac{1}{2}\ln|x^2 + \sqrt{x^4-3}| + C$; 17) $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{2} + C$;

18) $\frac{1}{15}\operatorname{arctg}\frac{x^3}{5} + C$; 19) $C - \frac{1}{3}\operatorname{ctg} x^3$; 20) $C - \frac{2}{3}\sqrt{9-x^3}$;

21) $\frac{1}{3}\arcsin\frac{x^3}{3} + C$; 22) $\frac{\sin^4 x}{4} + C$; 23) $\frac{1}{3}\ln|3\sin x + 7| + C$;

- 24) $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{2 + \sin x}{2 - \sin x} \right| + C$; 25) $e^{-\cos x} + C$; 26) $\frac{1}{2 \ln 3} 3^{\lg 2x} + C$;
 27) $C + \frac{1}{4} \arcsin^4 x$; 28) $\ln |\operatorname{arctg} x| + C$; 29) $C - \frac{1}{5} \ln |\cos 5x|$;
 30) $\frac{1}{9 \cos^3 (3x-1)} + C$; 31) $\arcsin \frac{e^x}{2} + C$; 32) $\frac{5}{2} \operatorname{arctg} x^2 + \frac{1}{2} \ln |1 + x^4| + C$;
 33) $\frac{1}{\ln 2} \cdot \ln |2^x + \sqrt{4^x + 3}| + C$.
15. 1) $2\sqrt{x} - 4\sqrt{x} + 4 \ln |1 + \sqrt{x}| + C$; 2) $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x+4} - 2}{\sqrt{x+4} + 2} \right| + C$;
 3) $\frac{3}{2} \sqrt[3]{(x+1)^2} - 3\sqrt[3]{x+1} + 3 \ln |1 + \sqrt[3]{x+1}| + C$;
 4) $C - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2x+3} - \frac{3}{(2x+3)^2} + \frac{3}{(2x+3)^3} \right)$;
 5) $\sqrt{1+2x} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{1+2x} + 3\sqrt[3]{1+2x} - 3 \ln |\sqrt[3]{1+2x} + 1| + C$;
 6) $\ln \frac{\sqrt{1+e^x} - 1}{\sqrt{1+e^x} + 1} + C$; 7) $C - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.
16. 1) $C - e^{-x} (3x+7)$; 2) $2x \sin \frac{x}{2} + 4 \cos \frac{x}{2} + C$;
 3) $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - x^2 - 3x \right) \cos 2x + \frac{1}{4} (2x+3) \sin 2x + C$; 4) $\frac{1}{5} x^5 \ln x - \frac{1}{25} x^5 + C$;
 5) $x \arcsin 3x + \frac{1}{3} \sqrt{1-9x^2} + C$; 6) $\frac{1}{2} (x^2 + 1) \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} x + C$;
 7) $2\sqrt{x+1} \arcsin x + 4\sqrt{1-x} + C$.
17. 1) $\frac{7}{8} \ln |4x^2 + 4x + 10| - \frac{17}{12} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{3} + C$;
 2) $19 \arcsin \frac{x-3}{3} - 3\sqrt{6x-x^2} + C$; 3) $\frac{1}{4} \arcsin^2 2x - \frac{5}{4} \sqrt{1-4x^2} + C$;
 4) $\frac{1}{2} \sin 2x - \frac{2}{3} \sqrt{\cos^3 2x} + \frac{1}{2} x - \frac{1}{8} \sin 4x + C$; 5) $\frac{1}{2} \arcsin(\sin^2 x) + C$;
 6) $\frac{1}{4} \ln^2(1+x^2) + C$; 7) $C - \arcsin \frac{1}{x}$; 8) $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1) + C$;
 9) $2 \arcsin \frac{x}{2} + \frac{1}{2} x \sqrt{4-x^2} + C$;
 10) $(x+1) \ln^2(x+1) - 2(x+1) \ln(x+1) + 2x + C$; 11) $\frac{1}{3} (x^3 - 1) e^{x^3} + C$;

- 12) $0,1e^{-x}(3\sin 3x - \cos 3x) + C$; 13) $C - \frac{\sqrt{x^2+16}}{16x}$;
- 14) $2\sqrt{1+\ln x} + 2\ln|\sqrt{1+\ln x} - 1| - \ln|\ln|x|| + C$.
18. 1) $\frac{1}{6}\arctg \frac{2x+1}{3} + C$; 2) $\frac{1}{5}\arcsin \frac{5x-1}{2} + C$; 3) $\frac{1}{2}\sin(3+x^2) + C$;
- 4) $\frac{1}{9}\sin^3 3x + C$; 5) $8\lg \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\lg^4 \frac{x}{2} + C$; 6) $C - \frac{1}{2}e^{\sqrt{3-4x}}$;
- 7) $0,1\ln|1+5x^2| + C$; 8) $C - \frac{2}{3}\sqrt{7-x^3}$; 9) $2\ln|x| + \frac{3}{2}\ln^2|x| + C$;
- 10) $C - \frac{1}{\ln 2} \cdot 2^x$; 12) $\frac{1}{2}\arcsin^2 x + C$.
19. 1) $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - 2\sqrt{x+1} + C$; 2) $\frac{1}{15}\sqrt[3]{(1-3x)^5} - \frac{1}{6}\sqrt[3]{(1-3x)^2} + C$;
- 3) $2\sqrt{x} - 6\sqrt[3]{x} + 24\sqrt[6]{x} - 48\ln|\sqrt[6]{x} + 2| + C$; 4) $0,4\sqrt{(3-x)^5} - 2\sqrt{(3-x)^3} + C$;
- 5) $C - \frac{1}{3(2x-1)^3} - \frac{5}{8(2x-1)^4}$; 6) $\frac{2}{3}\sqrt{(e^x+1)^3} - 2\sqrt{e^x+1} + C$.
20. 1) $(5-4x)e^x + C$; 2) $(3x+2)\sin x + 3\cos x + C$;
- 3) $(x+3)\ln(x+3) - x + C$; 4) $(54-3x^2)\cos \frac{x}{3} + 18x\sin \frac{x}{3} + C$;
- 5) $x\arccos 2x - \frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2} + C$; 6) $\frac{1}{2}(1+x^2)\arctg x - \frac{1}{2}x + C$.
21. 1) $\frac{6}{5}(\sqrt[5]{x^5} + 2\sqrt[12]{x^5} + 2\ln|\sqrt[12]{x^5} - 1| + C$;
- 2) $2\arcsin \frac{x-2}{2} - \sqrt{4x-x^2} + C$; 3) $C - \frac{1}{2}\sqrt{\cos 2x}$; 4) $C - \frac{1}{2}\ln|4 - \ln^2 x|$;
- 5) $(x+1)\arctg \sqrt{x} - \sqrt{x} + C$; 6) $C - \frac{1}{4}x\cos 2x + \frac{1}{8}\sin 2x$;
- 7) $C - \ln|e^{-x} + \sqrt{1+e^{-2x}}| + C$; 8) $\frac{9}{2}\arcsin \frac{x}{3} - \frac{1}{2}x\sqrt{9-x^2}$; 9) $\frac{x}{4\sqrt{4+x^2}} + C$;
- 10) $\frac{x}{2}(\cos \ln x + \sin \ln x) + C$.
23. 1) $2x$; 2) $-\frac{5}{x^2}$; 3) $\frac{3}{\cos^2 x}$.
24. 1) $5-2x^3$; 2) $1+\lg x$; 3) $3+\ln x$; 4) $\sqrt{x}$.
26. 1) $x-1=t^2$; 2) $x=t^6$; 3) $3x+1=t$; 4) $x=\sin t$, аёо $x=\cos t$.
27. 1) $2\ln|\sin \sqrt{x}| + C$; 2) $\frac{1}{2}\ln|\ln^2 x + 4| + C$; 3) $\ln|\sqrt{1+x^2} - 1| - \ln|x| + C$.
29. 1) $u = x^2 - 6x$; $dv = \sin 3x dx$; 2) $u = \ln^2 x$, $dv = dx$;

$$3) u = \arccos 2x, dv = xdx; 4) u = \arcsin \sqrt{x}, dv = \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$

$$30. \frac{x\sqrt{9-x^2}}{2} + \frac{9}{2} \arcsin \frac{x}{3} + C.$$

$$31. 2) 7 - \frac{35}{x+5}; 4) 3 - \frac{13}{x^2+4}; 5) x+2 + \frac{4}{x-2}; 6) 2x^3 - 2x^2 - 1 + \frac{x+1}{x^2+x+4}.$$

$$32. 1) C - \frac{1}{4(1+2x)^2}; 2) C - \frac{1}{3} \ln|7-3x|; 3) \ln|x^2+3x+7| + C;$$

$$4) \ln|x^2+4x+13| - \frac{11}{3} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{3} + C.$$

$$33. 2) \frac{A}{x} + \frac{B}{x-4} + \frac{C}{(x-4)^2} + \frac{D}{(x-4)^3}; 3) \frac{A}{x-1} + \frac{Mx+N}{x^2+x+1};$$

$$4) \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-4} + \frac{Cx+D}{x^2-5x+7}; 5) \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{Mx+N}{x^2+9};$$

$$6) \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+4} + \frac{Mx+N}{(x^2+4)^2};$$

$$7) \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} + \frac{Mx+N}{x^2+4} + \frac{Dx+E}{x^2+2x+4}.$$

$$34. B = -\frac{4}{3}, C = -\frac{13}{6}.$$

$$35. A = 2, B = -1, C = 4.$$

$$36. A = 0, B = -1, C = 1, D = 1.$$

$$37. 1) \frac{3}{x-2} - \frac{2}{x} - \frac{x+1}{x^2+1}; 2) \frac{x-1}{x^2+1} - \frac{1}{(x-1)^2}.$$

$$38. 1) \ln|x-1| + \frac{5}{3} \ln|3x+2| + C; 2) \frac{10}{3} \ln|x-1| + \frac{2}{3} \ln|x+2| - 4 \ln|x| + C;$$

$$3) \frac{x^2}{8} + \frac{9}{32} \ln|2x+1| - \frac{7}{32} \ln|2x-1| + C; 4) 4 \ln \left| \frac{x}{x+2} \right| + \frac{1}{x^2} + C;$$

$$5) \frac{1}{2} \ln|x^2-1| + \frac{1}{x+1} + C; 6) \frac{3}{2} \ln|x^2+1| - \ln|x| + \operatorname{arctg} x + C;$$

$$7) \frac{1}{5} \ln|x| - \frac{1}{10} \ln|x^2+4x+5| - \frac{2}{5} \operatorname{arctg}(x+2) + C;$$

$$8) x + \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{6} \ln|x^2+x+1| - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

$$39. 1) \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x}{x-2} \right| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2(x-2)} + C;$$

$$2) \frac{x^2}{2} + x + \ln \frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+1}} - \operatorname{arctg} x + C; 3) \frac{1}{4} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2+1} - \frac{1}{2(x+1)} + C;$$

- 4) $\frac{5}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} - \frac{4}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C$; 5) $\frac{1}{18} \frac{x}{x^2+9} + \frac{1}{54} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + C$;
 6) $\frac{4}{27} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} - \frac{3}{2(x^2+9)} - \frac{5x}{9(x^2+9)} + C$.
 40. 1) $x+4+\frac{4}{x-0}$; 2) $x^2+2x+4+\frac{8}{x-2}$;
 3) $2x^3-2x^2+2x-2+\frac{3x+1}{x^2+x}$.
 41. 1) $\frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$; 2) $\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} + \frac{Mx+N}{x^2+4}$;
 3) $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{Mx+N}{x^2-x+2}$; 4) $\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{4x^2+4x+5} + \frac{Mx+N}{(4x^2+4x+5)^2}$.
 42. 1) $\frac{3}{2} \ln|x^2-4x+5| + 4 \operatorname{arctg}(x-2) + C$;
 2) $\frac{1}{10} \ln|2x+1| + \frac{2}{5} \ln|x-2| + C$; 3) $4 \ln|x-1| - 7 \ln|x+3| + 5 \ln|x-4| + C$;
 4) $4 \ln|x| - 3 \ln|x-1| - \frac{9}{x-1} + C$; 5) $x - \ln|x| + 2 \ln|x-1| + \frac{1}{x} + C$;
 6) $\ln|x| - \frac{1}{2} \ln|x^2+1| + C$; 7) $\frac{1}{3} \ln \frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$;
 8) $\ln|x+1| - \frac{15}{16} \ln|x| - \frac{1}{16} \ln|x+4| - \frac{3}{4x} + C$.
 43. 1) $\frac{x^2}{2} + 2x + \frac{1}{8} \ln|x+1| + \frac{31}{8} \ln|x-1| - \frac{9}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x-1)^2} + C$;
 2) $\frac{1}{2} \ln \frac{x^2+1}{x^2+2} + 3 \operatorname{arctg} x - \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C$; 3) $\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C$;
 4) $\frac{1}{2} \ln(1+x^2) - \frac{1+x}{2(1+x^2)} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C$.
 44. 1), 4) - правильные дроби.
 45. 1), 2), 4) - прасцейшыя дроби.
 46. 1) $k=1$; 2) $k=0$; 3) $k=2$; 4) $k=m-n$.
 47. 1) $\frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2} = 2x + \frac{1}{x^4+3x^2}$;
 2) $\frac{x^3+12x-4}{x^2(x^2+4)} = \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{2x-1}{x^2+4}$.
 48. 1) $(x+3)^2+1$; 2) $(x-\frac{3}{2})^2-\frac{5}{4}$; 3) $(2x+1)^2+9$; 4) $3(x+\frac{1}{3})^2+\frac{11}{3}$.

49. 1) $3 \ln|x^2 - x + 2| + \frac{16}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{7}} + C$;
 2) $\frac{13}{3} \ln|x-2| + \frac{8}{3} \ln|x+1| + C$; 3) $\frac{31}{27} \ln \left| \frac{x-2}{x+1} \right| - \frac{13}{9(x-2)} - \frac{1}{9(x+1)} + C$;
 4) $\frac{1}{8} \ln \frac{x^2}{x^2+4} + C$.
51. 1) $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C$; 2) $\frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{5 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 4}{3} + C$; 3) $3 \left| \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 \right| + C$;
 4) $C - 2 \ln|3 - \sin x| + \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} \frac{3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1}{2\sqrt{2}}$.
52. 1) $C - \frac{1}{5} \cos^5 x$; 2) $\frac{1}{1 + \cos x} + C$; 3) $\sin x + \frac{3}{4} \ln \left| \frac{2 - \sin x}{2 + \sin x} \right| + C$;
 4) $\frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + C$; 5) $C + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}(\sqrt{3} \operatorname{tg} x) + C$; 6) $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{2 + \operatorname{tg} x}{2 - \operatorname{tg} x} \right| + C$.
53. 1) $0.1 \sin^5 2x + C$; 2) $\frac{1}{5} \cos^5 x - \frac{1}{3} \cos^3 x + C$;
 3) $\sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5 x + C$; 4) $\frac{1}{2} x + \frac{1}{12} \sin 6x + C$;
 5) $\frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C$; 6) $C - \frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 x - \ln|\sin x|$;
 7) $C - \frac{1}{10} \cos 5x - \frac{1}{14} \cos 7x$; 8) $\frac{1}{6} \sin 3x - \frac{1}{14} \sin 7x + C$.
54. 1) $\frac{1}{16} (x - \frac{3}{4} \sin \frac{4x}{3} + \sin^3 \frac{2x}{3}) + C$; 2) $\frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| - \frac{\cos x}{2 \sin^2 x} + C$;
 3) $\frac{2}{5} x - \frac{1}{5} \ln|\operatorname{ctg} x + 2| - \frac{1}{5} \ln|\sin x| + C$; 4) $\operatorname{tg} x - 2 \operatorname{ctg} x - \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x + C$;
 5) $\frac{1}{6} \ln|\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{ctg} x + 1| - \frac{1}{3} \ln|\operatorname{ctg} x + 1| - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{ctg} x - 1}{\sqrt{3}} + C$;
 6) $-\frac{1}{a(\operatorname{tg} x + b)} + C$; 7) $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin x + 1}{\cos x} \right| - \frac{1}{2 \sin x} + C$;
 8) $C - x + 2 \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| - 2 \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 \right|$.
55. 1) $\frac{1}{2} \operatorname{arctg}(2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}) + C$; 2) $\frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{5 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 4}{3} + C$;

- 3) $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 + \sqrt{2}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 - \sqrt{2}} \right| + C$; 4) $\ln|2 + \cos x| + \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + C$.
56. 1) $\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$; 2) $\frac{1}{2(1 - \sin x)^2} + C$;
 3) $\frac{1}{4 \cos^4 x} - \frac{1}{2 \cos^2 x} + C$; 4) $\operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C$; 5) $C - \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x - \frac{1}{5} \operatorname{ctg}^5 x$;
 6) $\frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x + C$.
57. 1) $\frac{1}{2} x - \frac{3}{4} \sin \frac{2x}{3} + C$; 2) $\frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x + C$;
 3) $\frac{3x}{8} + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C$; 4) $C - \cos x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \frac{1}{5} \cos^5 x$;
 5) $\frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{8} \cos 4x + C$; 6) $\frac{1}{6} \sin 3x + \frac{1}{14} \sin 7x + C$.
58. 1) $\frac{2}{3} \sin^3 \frac{x}{2} - \frac{4}{5} \sin^5 \frac{x}{2} + \frac{2}{7} \sin^7 \frac{x}{2} + C$;
 2) $\frac{5}{16} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{3}{64} \sin 4x - \frac{1}{48} \sin^3 2x + C$;
 3) $C - \frac{1}{8} \cos 2x - \frac{1}{16} \cos 4x + \frac{1}{24} \cos 6x + C$; 4) $\frac{2}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1} - \frac{4}{3(\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1)^2} + C$;
- 5) $\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} + \sin 2x}{\sqrt{2} - \sin 2x} \right| + C$; 6) $\frac{1}{4} \ln|3 \operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x - 2| + C$.
59. 1), 2), 4).
 60. 1), 3).
 61. 1), 3).
 62. 2), 3).
63. 1) $\frac{3}{8} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C$; 2) $\sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1}{\sqrt{2}} + C$;
 65. 1) $\ln|x + 3 + \sqrt{x^2 + 6x + 5}| + C$; 2) $\arcsin(x - 1) + C$;
 3) $3\sqrt{x^2 + 2x + 2} - 2 \ln|x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}| + C$;
 4) $x + 3 - 2\sqrt{x + 3} + 2 \ln|\sqrt{x + 3} + 1| + C$;
 5) $\frac{3}{5} (-\frac{1}{2} \sqrt{(5x - 3)^2 + 3} + \sqrt{(5x - 3) + 1}) + C$;

6) $2\sqrt{x} - 8\sqrt[4]{x} + 16\ln|\sqrt[4]{x} + 2| + C;$

7) $-\frac{2}{3(\sqrt{x}-3)^3} - \frac{3}{(\sqrt{x}-3)^4} - \frac{18}{5(\sqrt{x}-3)^5} + C;$

8) $\sqrt{3+2x} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{3+2x} + 3\sqrt[4]{3+2x} - 3\ln|\sqrt[4]{3+2x} + 1| + C;$

9) $C - \arcsin x - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x};$ 10) $C - \frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}.$

66. 1) $\frac{3}{7}(4\sqrt[4]{x}-3)\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^4} + C;$

2) $\arcsin \frac{2x-1}{2} + \frac{1}{4}(2x-1)\sqrt{3+4x-4x^2} + C;$

3) $\frac{81}{8}\arcsin \frac{x}{3} - \frac{1}{8}\sqrt{9-x^2}(9x-2x^3) + C;$ 4) $\frac{\sqrt{x^2-4}}{4x} + C;$

5) $\arcsin \sqrt{1-x} + \sqrt{1-x}(\sqrt{x}-2) + C;$ 6) $2\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C.$

67. 1) $\ln|x-2+\sqrt{x^2-4x+9}| + C;$

2) $5\sqrt{x^2+x+1} - \frac{11}{12}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right| + C;$

3) $\frac{1}{6}\sqrt{(2x+1)^3} + \frac{1}{4}\sqrt{2x+1}(4-\sqrt{2x+1}) - \ln|1+\sqrt{2x+1}| + C;$

4) $\frac{1}{(1+\sqrt{x})^2} - \frac{2}{1+\sqrt{x}} + C;$ 5) $3\sqrt[3]{x} - 12\sqrt[4]{x} + 24\ln|\sqrt[4]{x} + 2| + C;$

6) $\frac{2}{9}(2+\sqrt{x})^9 - (2+\sqrt{x})^8 + \frac{8}{7}(2+\sqrt{x})^7 + C;$

7) $\frac{1}{2}\ln|\sqrt{4+x^2}-2| - \frac{1}{2}\ln|x| + C;$ 8) $C - \frac{\sqrt{16-x^2}}{16x}.$

68. 1) $C - \frac{x}{4\sqrt{x^2-4}};$ 2) $2\arcsin \frac{x+1}{2} + \frac{x+1}{2}\sqrt{3-2x-x^2} + C;$

3) $\ln|1-\sqrt{1-x^2}| - \ln|x| + 2\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C;$ 4) $\frac{1}{40}\sqrt[3]{(1+x^3)^5}(5x^3-3) + C.$

Глава 2. Вывзначаны інтэграл

1. Мінус.

2. Мінус.

3. Плюс.

4. Плюс.

5. Плюс.

6. Плюс.

7. Другі.

8. Першы.

9. Першы.

10. Другі.

11. $2\sqrt{7} < y < 6.$

12. $2\sqrt[3]{25} < y < 6.$

13. $2\sqrt[3]{30} < y < 4.$

14. Плюс.

15. Плюс.

16. Плюс.

17. Плюс.

21. Першы.

$$25. \frac{2\pi}{13} < y < \frac{2\pi}{7}$$

$$29. \operatorname{arctg} 3 - \frac{\pi}{4}$$

$$33. \frac{\pi}{6 \ln 3}$$

$$37. -2\pi$$

$$41. 4 - 2 \ln 3$$

$$45. 1 - \frac{2}{e}$$

$$52. \frac{1}{5}$$

$$56. 4$$

$$60. \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

$$64. \frac{\pi}{2} + \ln 2 - 2$$

$$68. \frac{\sqrt{3}\pi - 3 \ln 2}{27}$$

$$71. \frac{1}{2}(\sqrt{2}e \sin(1 - \frac{\pi}{4}) + 1)$$

$$73. 0$$

$$77. 2$$

$$81. 3$$

$$85. \frac{1}{12}$$

$$89. \frac{\pi}{2}$$

93. Разбежны.

18. Минус.

22. Роўныя.

$$26. 11$$

$$30. \frac{2}{3}$$

$$34. 2$$

$$38. \frac{7}{3} - \ln 2$$

$$42. e^e - e$$

$$46. e - 2$$

$$53. \frac{3}{2}$$

$$57. 23 \frac{1}{10}$$

$$61. -\frac{\pi}{2}$$

$$65. \frac{e-2}{3e}$$

$$69. 2\pi$$

$$74. 0$$

$$78. -1$$

82. Разбежны.

86. Разбежны.

90. Разбежны.

94. Разбежны.

19. Минус.

$$23. 4\sqrt{3} < y < 8$$

$$27. 2(2\sqrt{2} - 1)$$

$$31. \frac{1}{2}$$

$$35. \frac{3}{8}\pi$$

$$39. \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$$

$$43. \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 1$$

$$47. \frac{e^2 + 1}{2}$$

$$54. 1 - \frac{\pi}{4}$$

$$58. \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} - \operatorname{arctg} 2$$

$$62. \frac{1}{2} - \frac{1}{e}$$

$$66. \frac{\pi}{2} - 1$$

$$70. \frac{4}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} - \frac{\pi}{3}$$

$$72. \frac{1}{2}(\sqrt{2}e \cos(1 - \frac{\pi}{4}) - 1)$$

$$75. 0$$

$$79. -\frac{\pi^2}{4}$$

83. Разбежны.

$$87. \frac{\pi}{24}$$

91. Разбежны.

$$95. 14 \frac{4}{7}$$

20. Першы.

$$24. \frac{2}{3} < y < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$28. \frac{1}{4}$$

$$32. \frac{1}{2}(\ln 4 - \frac{\pi^2}{9})$$

$$36. 64\pi$$

$$40. 0,68$$

$$44. \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{1}{7}$$

$$51. \frac{2\sqrt{2} - 1}{9}$$

$$55. 2 \ln \frac{3e}{5}$$

$$59. 9 + 4 \ln 2$$

$$63. 2 - \frac{5}{e}$$

$$67. \frac{4}{9}(2e^3 + 1)$$

$$76. 2 + 8 \ln \frac{4}{5}$$

$$80. \ln n!$$

$$84. \frac{1}{2}$$

88. Разбежны.

$$92. 1$$

$$96. \frac{\pi}{2} + \ln(2 + \sqrt{3})$$

97. Разбежны.

98. 2.

99. $1 - \ln 2$.

100. $\frac{\pi}{2}$.

101. $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} \right|$

102. π .

103. $-\frac{1}{4}$.

104. $\frac{1}{e}$.

105. Збежны.

106. Збежны.

107. Разбежны.

108. Збежны.

109. Збежны.

110. Разбежны.

111. Збежны.

112. Збежны.

113. $\frac{1}{2}$.

114. $\frac{\pi}{8}$.

115. Разбежны.

116. $-\frac{\pi^2}{8}$.

117. Разбежны.

118. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

119. Разбежны.

120. $\frac{1}{\ln 2}$.

121. Разбежны.

122. Разбежны.

123. $\frac{4}{3}$.

124. $\frac{10}{7}$.

125. Разбежны.

126. $\frac{\ln 2}{2}$.

127. $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

128. Разбежны.

129. Разбежны.

130. π .

131. -1 .

132. Разбежны.

133. Збежны.

134. Збежны.

135. Разбежны.

136. Збежны.

137. Збежны.

138. Збежны.

Глава 3, Прымяненне вызначанага інтэграла

1. $\frac{4}{3}$.

2. $\frac{32}{3}$.

3. $\frac{32}{15}$.

4. $\frac{9}{2}$.

5. 18.

6. $69\frac{1}{3}$.

7. $\frac{1}{\ln 2} - 1$.

8. $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3\pi^2}{32}$.

9. π^2 .

10. $21\frac{1}{3}$.

11. 2.

12. $\frac{3\pi}{2}$.

13. 12π .

14. 5 π .

15. $\frac{\pi}{3}$.

16. $\frac{75\pi}{4}$.

17. $\frac{25\pi}{4}$.

18. $\frac{3\pi^2}{2}$.

19. $\frac{\pi}{3}$.

20. $\log_4 e - \frac{1}{4}$.

21. $\frac{8}{3}$.

22. $2a^2(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6})$.

23. $\frac{\pi^2}{4}$.

24. $a^2(\frac{\pi}{4} + 2)$.

25. 2.

26. $\frac{3}{4}(\pi - \sqrt{3})$.

27. $\frac{72\sqrt{3}}{5}$.

28. $\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$.

29. $\frac{8}{15}$.

30. $\frac{a^2}{2}$.

31. $\frac{4a^2}{3}$.

32. $\frac{8}{3}ab$.

33. $\frac{8}{15}$.

34. $a = \frac{4}{3}$.

35. $\ln 3$.

36. $\frac{125}{48}$.

37. $\frac{9}{2}$. 38. $\frac{9}{2}$. 39. $\frac{32}{3}$. 40. 3.
41. $21\frac{1}{3}$. 42. $\frac{125}{6}$. 43. $\frac{35}{2} - 6 \ln 6$. 44. 64.
45. $\frac{4}{3}$. 46. $\frac{4}{\ln 2} - 2$. 47. 1. 48. $\frac{1}{2}$.
49. $3\pi^2$. 50. 4π . 51. $\frac{3}{8}\pi ab$. 52. 2π .
53. $\frac{27}{8}\pi$. 54. $\frac{19}{2}\pi$. 55. $\frac{4}{3}\pi$. 56. 5,5.
57. $\frac{3}{2}\pi + 3$. 58. $\frac{\pi^2}{8}$. 59. $a^2(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2})$. 60. 6π .
61. $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$. 62. $\frac{1}{12}$. 63. $\frac{8\sqrt{3}}{5}$. 64. $\frac{8}{15}$.
65. $\frac{\pi ab}{4}$. 66. $\frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3}$. 67. $\frac{5}{32}\pi^2$. 68. $a = 0$.
69. $a = 1$. 70. 9. 71. $\frac{91}{30}$. 72. $1 - \ln \frac{3}{2}$.
73. $\frac{(40\sqrt{40} - 13\sqrt{13})^2}{27}$. 74. $2(e - \frac{1}{e})$. 75. $2\sqrt{3}$. 76. $2\sqrt{3}$.
77. 5π . 78. $8a^2$. 79. $\frac{\sqrt{101}}{5}(e^{15\pi} - 1)$. 80. $\frac{\pi}{2}$.
81. $\frac{56}{3}\pi^2$. 82. $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi + \frac{26}{27}\sqrt{13} - \frac{16}{27}$. 83. 4.
84. $\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}$. 85. $\frac{64}{3}\pi^2$. 86. $\frac{128}{5}\pi$. 87. $\frac{335}{27}$.
88. $\ln 3$. 89. $\frac{1}{4}(e^2 + 1)$. 90. $\sqrt{2}(\pi - 1)$. 91. 24.
92. 2π . 93. 24. 94. 95. $4\sqrt{3}$.
96. При $t = \frac{2\pi}{3}$. 97. $\frac{3}{2}\pi$. 98. t_0 . 99. $\frac{62\pi}{3}$.
100. $6\pi^3 a^3$. 101. 8π . 102. $\frac{104}{3}\pi$. 103. $\frac{2\pi}{5}$.

104. $\frac{\pi^2}{12}$. 105. $\pi(40 \ln 2 - \frac{3}{2})$. 106. $\frac{64}{5} \pi$. 107. $\frac{16}{5} \pi(5\pi + 8)$.
108. $\pi(e-1)$. 109. $\frac{\pi}{6}$. 110. $4\pi a^3 \sqrt{3}$. 111. $\frac{512}{15} \pi$.
112. $\frac{29}{3} \pi$. 113. 16π . 114. $\frac{3\pi^2 ba^2}{16}$. 115. $4\pi^2 a$.
116. $\frac{8\pi}{3}$. 117. $72\pi^2$. 118. $\pi(\frac{32\sqrt{2}}{3} - \frac{28}{3})$.
119. $\frac{272}{75} \pi + 2\pi^2 + 4\pi \arcsin \frac{3}{5}$. 120. $\frac{16}{15} \pi$. 121. $\pi(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2})$.
122. $\frac{19}{48} \pi$. 123. $\frac{5}{6} \pi$. 124. $\frac{11}{4} \pi$. 125. 12π .
126. $\frac{416}{15} \pi$. 127. $\frac{64}{5} \pi$. 128. $\frac{36}{5} \pi$. 129. $\frac{3}{2} \pi$.
130. $\frac{14}{3} \pi - \pi \ln 4$. 131. $\pi\sqrt{2}$. 132. $v_1 = \pi\sqrt{2}(2\sqrt{6} - \frac{11}{3})$, $v_2 = \pi\sqrt{2}(2\sqrt{6} + \frac{11}{3})$.
133. $\frac{\pi h}{4} (\frac{(D-d)^2}{10} + \frac{dD}{9} + \frac{7D^2}{18})$. 134. $\pi(\frac{\pi^2}{4} - 2)$. 135. $12\pi^2$.
136. $\pi R^2 (\frac{8}{3} - \frac{5}{3} R - \frac{\pi R}{4})$. 137. $\frac{2}{3} \pi R^3 + \frac{1}{3} R^2 h$. 138. $\frac{32\pi^2 b}{105}$.
139. а) $\frac{6\pi}{7}$, б) $\frac{3\pi}{4}$. 140. 22,5 м. 141. $\frac{8}{3}$ кг. 142. 78,4 м.
143. 1,764 Дж. 144. $10(200 - \ln 200)$. 145. 2446080 π Дж.
146. $\frac{\pi \gamma R^2 H^2}{2} = 635040 \pi$ Дж. 147. $\frac{5}{4} d \cdot 0,000085 \approx 1,029$ Н.
148. 18,816 кН. 149. 30 м. 150. $\frac{gT^2}{2}$. 151. 270 кг.
152. 0,1125 Дж. 153. $\frac{\pi R^4}{4} = 997,64$ Дж.
155. 111066,34 кН. 156. $2\rho g r^3 H/3$ Дж.

ЗМЕСТ

УВОДЗІНЫ	3
Глава 1. НЯВЫЗНАЧАНЫ ІНТЭГРАЛ	4
1.1. Паняцце нявызначанага інтэграла і яго ўласцівасці	4
1.2. Асноўныя метады інтэгравання	7
1.3. Інтэграванне рацыянальных функцый (дробаў)	12
1.4. Інтэграванне функцый, якія рацыянальна залежаць ад трыганаметрычных	17
1.5. Інтэграванне ірацыянальных функцый	20
Глава 2. ВЫЗНАЧАНЫ ІНТЭГРАЛ	22
2.1. Інтэгральная сума. Вызначаны інтэграл, яго ўласцівасці	22
2.2. Формула Ньютана-Лейбніца. Замена зменнай y вызначаным інтэграле. Інтэграванне па частках	24
2.3. Няўласныя інтэгралы	27
Глава 3. ПРЫМЯНЕННЕ ВЫЗНАЧАНАГА ІНТЭГРАЛА	30
3.1. Плошча плоскай фігуры	30
3.2. Даўжыня дугі крывой. Плошча паверхні вярчэння	32
3.3. Аб'ём цела	34
3.4. Прымяненне вызначанага інтэграла да рашэння фізічных задач	38
Адказы	40

**ВЫШЭЙШАЯ МАТЭМАТЫКА
Ў ПЫТАННЯХ, ЗАДАЧАХ І ПРАКТЫКАВАННЯХ.
НЯВЫЗНАЧАНЫЯ І ВЫЗНАЧАНЫЯ ІНТЭГРАЛЫ**

**Складальнікі: Звяровіч Людміла Феліксаўна,
Зотава Марыя Андрэеўна,
Кончыц Раіса Міхайлаўна,
Рысюк Ніна Антонаўна,
Семянкова Аляксандра Сяргееўна,
Шынкевіч Алена Аляксееўна.**

Рэдактар М.П. Мурашка. Карэктар Н.В. Гвасалія.

Падпісана да друку 27.03.2002. Фармат 60×84 $\frac{1}{16}$.

Друк афсетны. Ум. друк. арк. 3,6. Ум. фарба-адбіт. 3,6.

Ул.-выд. арк. 3,1.

Тыраж 1000 экз. Заказ /84/.

Установа адукацыі

“Беларускі дзяржаўны тэхналагічны ўніверсітэт”.

Ліцэнзія ЛВ №276 ад 15.04.98. 220050. Мінск, Свярдлова, 13а.

**Адрукавана на ратапрынце Беларускага дзяржаўнага
тэхналагічнага ўніверсітэта. 220050. Мінск, Свярдлова, 13.**