

ВЫШЭЙШАЯ МАТЭМАТЫКА
Ў ПЫТАННЯХ, ЗАДАЧАХ
І ПРАКТЫКАВАННЯХ.
ФУНКЦЫІ НЕКАЛЬКІХ ЗМЕННЫХ.
ДЫФЕРЭНЦЫЯЛЬНЫЯ ЎРАЎНЕННІ

Метадычны дапаможнік
для студэнтаў I курса ўсіх спецыяльнасцей

517
B95

Установа адукацыі
«БЕЛАРУСКІ ДЗЯРЖАЎНЫ ТЭХНАЛАГІЧНЫ УНІВЕРСІТЭТ»

**ВЫШЭЙШАЯ МАТЭМАТЫКА
Ў ПЫТАННЯХ, ЗАДАЧАХ
І ПРАКТЫКАВАННЯХ.
ФУНКЦЫІ НЕКАЛЬКІХ ЗМЕННЫХ.
ДЫФЕРЭНЦЫАЛЬНЫЯ ЎРАЎНЕННІ**

**Метадычны дапаможнік
для студэнтаў I курса ўсіх спецыяльнасцей**



Мінск 2004

УДК 517
ББК 22.161.1
В 95

Разгледжаны і рэкамендаваны да выдання рэдакцыйна-
выдавецкай радай універсітэта

Складальнікі:

Л.Ф. Звяровіч, Р.М. Кончыц, В.М. Пыжкова,
І.Ф. Салаўёва, Н.А. Рысюк

Навуковы рэдактар дац. Ж.М. Гарбатовіч

Рэцэнзенты:

дац. кафедры вылічальнай тэхнікі БДТУ, канд. тэхн. навук

Н.М. Пуставалава;

д-р фіз.-мат. навук, праф. кафедры ЧМіП БДУ

П.І. Манастырны

Вышэйшая матэматыка ў пытаннях, задачах і практы-
В 95 **каваннях. Функцыі некалькіх зменных. Дыферэн-**
цыяльныя ўраўненні: Метад. дапаможнік для студэнтаў І курса
ўсіх спецыяльнасцей / Склад. Л.Ф. Звяровіч і інш. – Мн.: БДТУ,
2004. – 68 с.

ISBN 985-434-366-9.

Дапаможнік змяшчае кантрольныя пытанні і практыкаванні, стандартныя і нестандартныя задачы. Можна быць выкарыстаны пры правядзенні практычных заняткаў і для самастойнай работы студэнтаў.

Для студэнтаў І курса ўсіх спецыяльнасцей.

УДК 517
ББК 22.161.1

© Установа адукацыі
«Беларускі дзяржаўны
тэхналагічны універсітэт», 2004

ISBN 985-434-366-9

ПРАДМОВА

Метадычны дапаможнік змяшчае практычныя і тэарэтычныя заданні па раздзелах праграмы курса «Вышэйшая матэматыка» — «Дыферэнцыяльныя ўраўненні» і «Функцыі некалькіх зменных».

Мэта дапаможніка — дасягненне большай эфектыўнасці практычных заняткаў і стымуляванне самастойнай работы студэнтаў.

Дапаможнік складаецца з 2 глаў: «Функцыі некалькіх зменных» і «Дыферэнцыяльныя ўраўненні». Кожная глава змяшчае тэарэтычныя пытанні, задачы і практыкаванні двух ўзроўняў складанасці для аўдыторнай і самастойнай работы, а таксама для самаправеркі.

Задачы і практыкаванні, пазначаныя літарай А (першы ўзровень складанасці), змяшчаюць абавязковы мінімум, які павінен засвоіць кожны студэнт. Літарай Б пазначаны задачы і практыкаванні другога ўзроўню складанасці. Наяўнасць пытанняў да самакантролю дазваляе зрабіць самастойную работу студэнтаў больш асэнсаванай.

Для большасці задач дадзены адказы. Па кожнай тэме прыведзены прыклады рашэнняў тыповых задач, што дазваляе студэнтам самастойна засвоіць тэму.

Метадычны дапаможнік прызначаны для студэнтаў першага курса ўсіх спецыяльнасцей.

Глава 1. ФУНКЦІЇ НЕКАЛЬКИХ ЗМЕННИХ

1.1. Азначення, ліміт, непаруності функцій некальких зменних

Тэарэтычныя пытанні

1. Даць азначэнне і прывесці прыклады функцый: 1) дзвюх, 2) трох, 3) n зменных.
2. Ахарактарызаваць абсяг вызначэння і мноства значэнняў лікавай функцыі: 1) дзвюх, 2) трох, 3) n зменных.
3. Даць азначэнне і прывесці прыклады графіка функцыі дзвюх зменных.
4. Ахарактарызаваць спосабы задання функцыі некальких зменных.
5. Даць азначэнне і прывесці фізічны прыклад: 1) лініі ўзроўню функцыі дзвюх зменных, 2) паверхні ўзроўню функцыі трох зменных.
6. Даць азначэнне ліміту функцыі дзвюх зменных.
7. Даць азначэнне непарунай функцыі дзвюх зменных у пункце M на мностве X .

Заданні для аўдыторнай работы

A

1. Выразіць плошчу S трохвугольніка як функцыю даўжыні дзвюх яго старон x і y , калі яго перыметр $2p$. Знайдзі абсяг вызначэння і мноства значэнняў гэтай функцыі. Пабудаваць абсяг вызначэння функцыі.

2. Знайдзі і пабудаваць абсяг вызначэння функцый:

$$1) z = \frac{25}{\sqrt{x^2 + y^2 - 25}};$$

$$2) z = \sqrt{2+y} \cdot \arcsin x;$$

$$3) u = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}};$$

$$4) u = \ln(9 - x^2 - y^2 - z^2).$$

3. У эканамічнай тэорыі функцыя карыснасці часцей за ўсё мае выгляд $z = \sum_{i=1}^n a_i \ln(x_i - c_i)$, дзе $a_i > 0$, $x_i > c_i > 0$ (a_i , c_i — канстанты). Знайдзі і пабудаваць абсяг вызначэння функцыі, калі $n = 2$.

4. Знайдзі $z(0; 0)$, $z(-1; 1)$, $z(1; y)$, калі $z = x^2 + y^2$. Пабудаваць графік функцыі.

5. Знайські лінії ўзроўню функцыі $z = x^2 + y^2 + 4x$ і пабудаваць тую, што праходзіць праз пункты $M_1(0; 0)$, $M_2(1; 0)$.

6. Знайські лінії ўзроўню функцыі $z = \frac{y}{x^2 + 1}$ і пабудаваць тую, што адпавядае значэнням $z = 1$ і $z = -2$.

7. Знайські паверхні ўзроўню функцыі $u = x^2 + y^2 + 4z^2$ і пабудаваць тую, што праходзіць праз пункт $M(0; 0; 2)$.

8. Знайські ліміты:

1) $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2xy}{4 - \sqrt{xy} + 16}$;

2) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2xy}{4 - \sqrt{xy} + 16}$;

3) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\lg(xy)}{y}$;

4) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (1 + x^2 + y^2)^{1/(x^2 + y^2)}$.

9. Знайські пункты разрыву функцыі $z = \frac{12}{(x+2)^2 + (y-1)^2}$.

10. Даследаваць на непарыўнасць функцыі:

1) $z = \frac{4}{x^2 - y^2}$;

2) $u = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2 - 9}$.

Б

11. Знайські і пабудаваць абсяг вызначэння функцыі $z = \ln(x \ln(y - x))$.

12. Даказаць, што $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x+y}{x-y}$ не існуе.

13. Паказаць, што функцыя $z = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & x \neq 0, y \neq 0 \\ 0, & x = 0, y = 0 \end{cases}$ непарыўна

па x і y асабліва, але не з'яўляецца непарыўнай у пункце $O(0; 0)$ па y і x у сукупнасці.

Заданні для самастойнай работы

А

14. Знайські і пабудаваць абсяг вызначэння функцыі:

1) $z = \sqrt{4 - 2x^2 - y^2}$;

2) $z = x\sqrt{1-y} + y\sqrt{1-x}$;

3) $u = \sqrt{1 - x^2 - y^2} + \sqrt{3z - z^2}$;

4) $u = \ln(4 - x^2 - y^2 - z)$.

$u = \ln(x^2 + y^2 + z - 4)$

15. Знайдіть лінії ўзроўню функцыі $z = x^2 + y$ і пабудаваць тыя, што праходзяць праз пункты $M_1(1; 3)$, $M_2(-2; -2)$.

16. Знайдіть паверхню ўзроўню функцыі $u = x + y + z$, якая праходзіць праз пункт $M(-1; 3; 2)$.

17. Знайдіць ліміты

$$1) \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow -1}} \frac{5x + 2y}{1 + \sqrt{7 - xy}};$$

$$2) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(xy)}{xy};$$

$$3) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(xy)}{y};$$

$$4) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 4} - 2}{x^3 + xy^2}.$$

18. Даследаваць на непарыўнасць функцыі:

$$1) z = \frac{2xy}{x^2 - y};$$

$$2) u = \frac{2}{xyz}.$$

Б

19. Даказаць, што $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x^2 + y^4}{x^4 + y^2}$ не існуе.

20. Знайдіць лініі ўзроўню функцыі z :

$$1) z = f(\sqrt{x^2 + y^2});$$

$$2) z + x^2 \ln z - y = 0.$$

21. Даследаваць на непарыўнасць функцыю $f(x; y)$ у пункце $(0; 0)$:

$$1) f(x; y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, & x, y \neq 0 \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}; \quad 2) f(x; y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 + y^2}, & x, y \neq 0 \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}.$$

Заданні для самакантролю

22. Ці могуць лініі ўзроўню $z = f(x; y)$ мець агульныя пункты?

23. Запісаць функцыю $z = f(x; y)$, якая існуе толькі на прамой $y = 1$.

24. Ці існуе $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \sin \ln(x^2 + y^2)$?

25. Паказаць, што пры $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$ функцыя $z = \frac{x}{y - x}$ можа ім-

кнуцца да 2; 3; ∞ .

26. Ці можна пабудаваць графікі функцый:

$$1) z = x^2 + y^2 - 5;$$

$$2) u = x^2 + y^2 + z^2 - 5?$$

1.2. Диферэнцаванне функцыі некалькіх зменных. Дыферэнцыял функцыі

Тэарэтычныя пытанні

1. Даць азначэнне поўнага і частковага прыросту функцыі дзвюх зменных.
2. Даць азначэнне частковай вытворнай функцыі дзвюх зменных.
3. Сфармуляваць правіла знаходжання частковых вытворных.
4. Сфармуляваць геаметрычны сэнс частковай вытворнай.
5. Даць азначэнне поўнага дыферэнцыяла функцыі дзвюх зменных.
6. Ахарактарызаваць сувязь паміж поўным прыростам функцыі дзвюх зменных і яе поўным дыферэнцыялам.
7. Сфармуляваць тэарэму аб дыферэнцаванні складанай функцыі дзвюх зменных.
8. Сфармуляваць правіла знаходжання частковых вытворных няўнай функцыі дзвюх зменных.
9. Даць азначэнне частковых вытворных другога і n -га парадкаў функцыі $z = f(x, y)$.

Заданні для аўдыторнай работы

А

27. Знайсці частковыя вытворныя функцыі дзвюх зменных:

$$1) z = x^2 y - y^2 x + 4x;$$

$$2) z = x^3 e^{y^2};$$

$$3) z = y \sin(x^2 - y^3);$$

$$4) z = \operatorname{tg}^2(xy + 4).$$

28. Знайсці частковыя вытворныя функцыі трох зменных:

$$1) u = 2xy + 3yz + z^3;$$

$$2) u = \sqrt{x^2 - 3y^2 + 4z^2};$$

$$3) u = \ln(z^2 + xy);$$

$$4) u = \left(\frac{y}{x}\right)^z.$$

29. Знайсці $z'_x(3; 2)$, $z'_y(3; 2)$, калі $z = x^2 y - xy^3 + y$.

30. Знайсці поўны прырост і дыферэнцыял функцыі $z = x^2 - xy^2 + y^3$, калі x змяняецца ад 2 да 2,1, а y ад 1 да 0,9.

31. Знайдіть диференціальні функції:

1) $z = \cos(x - y^2)$; 2) $z = \ln(x + y^3)$.

32. Знайдіть $dz(1; 2)$, калі $z = \operatorname{tg}(xy)$.

33. Вилічіть приблизна $\sqrt{(4,02)^2 + (3,01)^2}$.

34. Знайдіть $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, калі $z = u \ln v$, $u = \frac{y}{x}$, $v = x^2 + y^2$.

35. Знайдіть $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, калі $z = \ln(e^x + e^y)$, $y = \sqrt{x^2 + 1}$.

36. Знайдіть $\frac{dz}{dt}$, калі $z = \operatorname{arctg}(xy)$, $x = \sqrt{t}$, $y = \ln t$.

37. Знайдіть $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, калі $z^2 + xy^2 + x^2z^3 = 0$.

38. Знайдіть $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ у пункце $(2; 1; -2)$, калі $z^2 + 3xyz + x^2y^2 = 0$.

39. Показать, што $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, калі $z = x^2 \cos(x - y^2)$.

40. Показать, што функція $u = 5 \sin 2x \cdot \cos 2at$ здавальняє урівненню хістання струны $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Б

41. Знайдіть $f'_x(1; 2)$, $f'_y(1; 2)$, калі $f(x; y) = \int_x^{x^2+y^2} e^t dt$.

42. Показать, што $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, калі $z = \ln(x^2 + y^2 - 2xy)$.

43. Знайдіть диференціальні функції $u = (xy)^z$.

44. Знайдіть dz , калі $z = u^2 + v^2$, $u = \cos(xy)$, $v = xy^2$.

45. Знайдіть d^2z , калі $z = e^{2y} \cos 3x$.

Заданні для самостійної роботи

А

46. Знайдіть частковий витворний функції двох змінних:

1) $z = x^4 + x^2y^2 + y^4 + 3$; 2) $z = \cos^2\left(\frac{x}{y}\right)$;

$$3) z = 5^{x-2y};$$

$$4) z = \arcsin(xy^2).$$

47. Знайдіть частковий витворний функції трох і n змінних:

$$1) u = \ln(x^2 + y^2 + z^2);$$

$$2) u = x^2 + 2^{xy};$$

$$3) u = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n, (c_i - \text{const}).$$

$$48. \text{Знайдіть } z'(2; 3), z''(2; 3), \text{ калі } z = \arctg(xy).$$

49. Знайдіть поуні прирост і диференціаль функції $z = x^2 - y^2 + 1$, калі x змняється ад 3 да 3,01, а y ад 2 да 2,02.

$$50. \text{Знайдіть диференціаль функції } z = \sin^2(x - y) + xy^2.$$

$$51. \text{Знайдіть } dz(2; -1), \text{ калі } z = 2^{x-y^2}.$$

$$52. \text{Вилічыць прыблізна } \sqrt[3]{(5,01)^3} + 2,03.$$

$$53. \text{Знайдіть } \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \text{ калі } z = \ln(u^2 - v^2), u = xy^2, v = \tg(x - y).$$

$$54. \text{Знайдіть } \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \text{ калі } z = \arcsin \frac{x}{y}, y = e^{\sqrt{x}}.$$

$$55. \text{Знайдіть } \frac{dz}{dt}, \text{ калі } z = \sin(x + y^2), x = t^3, y = t \ln t.$$

$$56. \text{Знайдіть } \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \text{ калі}$$

$$1) z^2 - \cos(x - y^2) = 0;$$

$$2) x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y = 0.$$

$$57. \text{Паказаць, што } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \text{ калі}$$

$$1) z = x^y;$$

$$2) z = e^x(xy + \sin y).$$

58. Паказаць, што функція $f(x, y) = \arctg \frac{x}{y}$ здавальняе ураўненню Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

Б

$$59. \text{Знайдіть } f'_x(2; 5), f'_y(2; 5), \text{ калі } f(x, y) = \int_x^{x+y} t dt.$$

$$60. \text{Знайдіть } dz(-1; 1), \text{ калі } z = \int_{x^2+y^2}^{+\infty} e^{-t} dt.$$

61. Прамавугольны паралелепіпед мае вымярэнні $a = 4$ м, $b = 6$ м і $c = 12$ м. Знайдзі прыблізна змяненне даўжыні яго дыяганалі, калі a павялічыцца на 2 см, b — на 3 см, а c зменшыцца на 6 см.

62. Паказаць, што функцыя $z = y \cdot \phi(\cos(x - y))$ здавальняе ўраўненню $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y}$.

63. Паказаць, што калі $x^2 y^2 + x^2 + y^2 = 1$, то $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0$.

64. Паказаць, што функцыя $u = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{\frac{(x-1)^2}{4a^2 t}}$ здавальняе ўраўненню цеплаправоднасці $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Заданні для самакантролю

65. Ці можна паставіць знак раўнання паміж поўным прыростам Δz функцыі $z = f(x; y)$ і сумай яе частковых прыростаў $\Delta z_x + \Delta z_y$?

66. У якіх пунктах $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, калі $z = f(x; y)$?

67. Колькі вытворных другога парадку і якія мае функцыя $z = f(x; y)$?

68. Ці адрозніваецца выраз $d^2 z$ для $z = f(x; y)$ і складанай функцыі дзвюх зменных?

1.3. Датычная плоскасць і нармаль да паверхні. Вытворная па напрамку. Градыент. Частковая эластычнасць

Тэарэтычныя пытанні

1. Даць азначэнне датычнай плоскасці і запісаць яе ўраўненне.
2. Даць азначэнне нармалі да паверхні і запісаць яе ўраўненне.
3. Даць азначэнне вытворнай па напрамку.
4. Запісаць формулу для вылічэння вытворных па напрамку.
5. Даць азначэнне градыента і сфармуляваць яго ўласцівасці.
6. Даць азначэнне частковай эластычнасці.

А

69. Знайсці ўраўненні датычнай плоскасці і нармалі да паверхні ў пункце M_0 :

1) $z = 5 - x^2 - 2y^2$, $M_0(2; 1; -1)$;

2) $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$, $M_0(1; 2; -1)$.

70. Паказаць, што паверхні $x + 2y - \ln z + 4 = 0$ і $x^2 - xy - 8x + z + 5 = 0$ у пункце $M_0(2; -3; 1)$ датыкаюцца адна да другой (маюць агульную датычную плоскасць).

71. Знайсці вытворную функцыі $z = x^2 + y^3$ у пункце $M_0(2; 1)$ па напрамку вектара $\vec{M}_0M_1$, калі $M_1(4; 3)$.

72. Знайсці скорасць і напрамак найхутчэйшага ўзрастання функцыі $z = x^2y + xy^2 + 2$ у пункце $M_0(1; 2)$.

73. Знайсці вытворную функцыі $u = xy^2z^3$ у пункце $M(2; 3; 1)$ па напрамку вектара $\vec{l} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$.

74. Знайсці вытворную функцыі $u = x^2 - 3yz + 5$ у пункце $N(1; 2; -1)$ у тым напрамку, які ўтварае роўныя вострыя вуглы з восямі каардынат.

75. Знайсці $\text{grad } u$ у пункце A :

1) $u = x^3 + y^3 - 3xy$, $A(1; -1)$; 2) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $A(-1; -2; 2)$.

76. Знайсці адзінкавы вектар нармалі да паверхні ўзроўню функцыі $u = x^2 + 2xy - 4yz$ у пункце $M(1; 1; -1)$ накіраваны ў бок узрастання функцыі.

77. Знайсці частковыя эластычнасці функцыі $z = \frac{x^a}{a} + \frac{y^b}{b}$ ($a, b - \text{const} \neq 0$).

Б

78. Паказаць, што датычная плоскасць да паверхні $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ абсякае на каардынатных восях адрэзкі, сума якіх роўна a .

79. Знайсці вугал паміж градыентамі функцый $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ і $z = x - 3y + \sqrt{3xy}$ у пункце $(3; 4)$.

80. Знайдіть вивірну функцію $z = \ln(x + y)$ у пункце (1; 2) на парабале $y^2 = 4x$ па напрамку гэтай парабалы.

81. Паказаць, што ў вивірчай функцыі Коба – Дугласа $z = b_0 x^{b_1} y^{b_2}$ частковыя эластычнасці роўны $E_x(z) = b_1$, $E_y(z) = b_2$.

Заданні для самастойнай работы

А

82. Знайдзі ўраўненні датычнай плоскасці і нармалі да паверхні ў пункце M_0 :

$$1) z = 2 + x^2 + y^2, M_0(0; 0; 2); \quad 2) \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{8} = 0, M_0(4; 3; 4).$$

83. Знайдзі вивірну функцыю $z = x^2 y^3$ у пункце $M_1(1; 3)$ па напрамку вектара $\overline{M_1 M_2}$, калі $M_2(2; 4)$.

84. Знайдзі скорасць і напрамак найхутчэйшага ўзрастання функцыі $z = x^3 y + xy^2 + 4$ у пункце (2; 3).

85. Знайдзі $\text{grad } \varphi$ і паверхні ўзроўню функцыі $\varphi = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

86. Знайдзі частковыя эластычнасці функцыі карыснасці $z = a \ln(x - a_1) + b \ln(y - b_1)$.

Б

87. Знайдзі вугал паміж градыентамі функцыі $u = x^2 + 2y^2 - z^2$ у пунктах $M_1(2; 3; -1)$ і $M_2(1; -1; 2)$.

88. Знайдзі вивірну функцыю $u = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + z$ у пункце $M(2; 1; 1)$ па напрамку прамой $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{2}$.

89. Паказаць, што паверхні $x^2 + y^2 + z^2 = ax$ і $x^2 + y^2 + z^2 = by$ артаганальныя паміж сабою.

Рашэнне тыпавых задач

Задача 1. Знайдзі ўраўненні датычнай плоскасці і нармалі ў пункце $M_0(2; 1; -1)$ да паверхні ўзроўню функцыі $u = x^2 - y^2 + z^2 - 3xy - 6yz$, якая праходзіць праз гэты пункт.

Рашэнне. Ураўненне паверхні ўзроўню функцыі $u = F(x; y; z)$ мае выгляд $F(x; y; z) = C$, дзе $C = F(M_0)$.

Такім чынам, у нашым выпадку $x^2 - y^2 + z^2 - 3xy - 6yz = 4$, таму што $F(2; 1; -1) = 4$.

Ураўненне датычнай плоскасці і нармалі да паверхні $F(x; y; z) = C$ у пункце M_0 мае выгляд

$$F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0;$$

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)}.$$

Вылічым частковыя вытворныя функцыі $F(x; y; z)$ у пункце M_0 :

$$F'_x(M_0) = 2x - 3y|_{M_0} = 1; \quad F'_y(M_0) = -2y - 3x - 6z|_{M_0} = -2;$$

$$F'_z(M_0) = 2z - 6y|_{M_0} = -8.$$

Тады ўраўненне датычнай плоскасці мае выгляд

$$1(x - 2) - 2(y - 1) - 8(z + 1) = 0, \text{ або } x - 2y - 8z - 8 = 0.$$

Ураўненне нармалі мае выгляд $\frac{x - 2}{1} = \frac{y - 1}{-2} = \frac{z + 1}{-8}$.

Адказ: $x - 2y - 8z - 8 = 0, \frac{x - 2}{1} = \frac{y - 1}{-2} = \frac{z + 1}{-8}.$

Задача 2. Для функцыі $u = x^2z + x\sqrt{y} - yz$ у пункце $M_0(0; 4; -1)$ знайсці: 1) скорасць і напрамак найхутчэйшага ўзрастання функцыі;

2) вытворную па напрамку вектара $\vec{l}_1 = \overline{M_0M_1}$, дзе $M_1(-2; 2; 0)$;

3) вытворную па напрамку вектара $\vec{l}_2$, які ўтварае роўныя тупыя вуглы з восьмі каардынат.

Рашэнне. 1) напрамак найхутчэйшага ўзрастання функцыі ў пункце M_0 задае вектар $\text{grad } u(M_0) = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right\}$, скорасць гэтага ўзрастання будзе роўная $|\text{grad } u(M_0)|$. Вылічым частковыя вытворныя дадзенай функцыі ў пункце M_0 :

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{M_0} = 2xz + \sqrt{y} \Big|_{M_0} = 2;$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{M_0} = \frac{x}{2y} - z \Big|_{M_0} = 1; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{M_0} = x^2 - y \Big|_{M_0} = -4.$$

Такім чином, напрамак найхутчэйшага ўзрастання функцыі — гэта вектар $\text{grad } u = \{2; 1; 4\}$, а скорасць гэтага ўзрастання роўная $|\text{grad } u| = \sqrt{4+1+16} = \sqrt{21} \approx 4,6$.

2) вытворную $\frac{\partial u}{\partial l}$ функцыі $u = u(x; y; z)$ па напрамку $\vec{l}$ можна вылічыць па формуле

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma,$$

дзе $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ — накіравальныя косінусы вектара $\vec{l}$, роўныя

$$\cos \alpha = \frac{x}{|\vec{l}|}, \quad \cos \beta = \frac{y}{|\vec{l}|}, \quad \cos \gamma = \frac{z}{|\vec{l}|}, \quad \vec{l} = \{x; y; z\}, \quad |\vec{l}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

У гэтым выпадку $\vec{l} = \vec{l}_1 = \overline{M_0 M_1} = \{-2; -2; 1\}$, тады $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$,

$\cos \beta = -\frac{2}{3}$, $\cos \gamma = \frac{1}{3}$. Значэнні частковых вытворных знойдзены ў п. 1.

Такім чынам, будзем мець $\frac{\partial u}{\partial l_1} = 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + 1 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) - 4 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{10}{3}$.

3) каб знайсці накіравальныя косінусы вектара $\vec{l}_2$, выкарастаем іх уласцівасць: $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$. Так як $\cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma$, атрымаем $3 \cos^2 \alpha = 1$; $\cos^2 \alpha = \frac{1}{3}$; $\cos \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$. Паколькі вуглы

α, β, γ — тупыя, маем $\cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Тады

$$\frac{\partial u}{\partial l_2} = 2 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 1 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - 4 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Адказ: 1) $\{2; 1; 4\}$, $|\text{grad } u| = \sqrt{21}$; 2) $-\frac{10}{3}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Заданні для самакантролю

90. Што характарызуе $\frac{\partial z(M)}{\partial l}$?

91. Які напрамак показує $\text{grad } z(M)$?

92. Показати, що $\frac{\partial u}{\partial l} = (\text{grad } u, \vec{l}^0)$.

93. Лінії ўзроўню вытворчай функцыі называюцца ізаквантамі. Пабудавать ізакванты вытворчай функцыі Коба – Дугласа $z = b_0 x^{b_1} y^{b_2}$ пры частковых эластычнасцях роўных адзінцы.

1.4. Формула Тэйлара. Экстрэмум функцыі дзвюх зменных

Тэарэтычныя пытанні

1. Запісаць формулу Тэйлара для функцыі дзвюх зменных.
2. Даць азначэнне пункта лакальнага экстрэмуму функцыі дзвюх зменных.
3. Сфармуляваць неабходную ўмову існавання лакальнага экстрэмуму функцыі дзвюх зменных.
4. Сфармуляваць дастатковыя ўмовы існавання лакальнага экстрэмуму функцыі дзвюх зменных.
5. Сфармуляваць правіла знаходжання лакальнага экстрэмуму функцыі дзвюх зменных.
6. Даць азначэнне пункта ўмоўнага экстрэмуму.
7. Сфармуляваць правіла знаходжання ўмоўнага экстрэмуму.
8. Даць азначэнне глабальнага экстрэмуму функцыі дзвюх зменных.
9. Сфармуляваць алгарытм знаходжання глабальнага экстрэмуму функцыі дзвюх зменных.

Заданні для аўдыторнай работы

A

94. Раскладзі па формуле Тэйлара ў наваколіі пункта (1;1) да членаў другога парадку ўключна функцыю $f(x; y) = \frac{y}{x}$.

95. Знайдзі лакальныя экстрэмуму функцыі:

1) $z = x^2 + y^2 - 10x - 12y$;

2) $z = (3x + 6)y^2 - x^3 + 3x$.

96. Гадавыя расходы прадпрыемства N можна задаць функцыяй $f(x; y) = a + b_1x + b_2y + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{y}$, дзе $a, b_1, b_2, c_1, c_2 - const$. Пры якіх x, y расходы прадпрыемства будуць найменшымі?

97. Сярод прамавугольных паралелепіпедаў, сума даўжынь кантаў якіх 36 см, знайсьці паралелепіпед з найбольшым аб'ёмам.

98. Знайсьці ўмоўныя экстрэмы функцыі:

$$1) z = xy^2, \text{ калі } x + 2y = 1; \quad 2) z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \text{ калі } \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{2}{a^2}.$$

99. Знайсьці найбольшае і найменшае значэнні функцыі $z = f(x; y)$ у абсягу D :

$$1) z = x - 2y + 5; D: x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1;$$

$$2) z = x^2 + y^2; D: x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0;$$

$$3) z = x^3 + y^3 - 3xy; D: 0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 2.$$

100. Знайсьці глабальныя экстрэмы функцыі $z = x + \sqrt{y}$ у трохвугольніку з вяршынямі ў пунктах $O(0; 0)$, $A(0; 2)$, $B(2; 0)$.

Б

101. Выкарыстоўваючы формулу Тэйлара да членаў другога парадку, вылічыць прыблізна $(0,95)^{2,02}$.

102. Знайсьці экстрэмы функцыі z :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0.$$

103. На плоскасці Oxy знайсьці пункт $M(x; y)$ такі, што сума квадратаў адлегласці M ад прамых $x = 0$, $y = 0$, $x + 2y - 16 = 0$ будзе найменшай.

104. Знайсьці экстрэмы функцыі трох зменных

$$u = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z.$$

105. Знайсьці ўмоўныя экстрэмы функцыі $u = xy^2z^3$ пры $x + y + z = 12$ ($x > 0; y > 0; z > 0$).

Заданні для самастойнай работы

А

106. Раскладзі па формуле Тэйлара ў наваколлі пункта $(1; -1)$ да членаў другога парадку ўключна функцыю $f(x; y) = e^{x+y}$.

107. Знайсьці лакальныя экстрэмы функцыі:

1) $z = (y - x)^2 + (y + 2)^2$; *мож злість* 2) $z = x^3 + 3xy^2 - 27x - 6y^2$.

108. Знайдіть умовні екстремуми функції $z = 2x + y$, калі $x^2 + y^2 = 1$.

109. Раскласці дадатны лік a на тры дадатныя складнікі так, каб іх здабытак быў найбольшым.

110. Знайдіть найбольшае і найменшае значэнні функцыі $z = f(x; y)$ у абсягу D :

1) $z = x - 2y + 5$; $D: x \leq 0, y \geq 0, y - x \leq 1$;

2) $z = x^2 - y^2$; $D: x^2 + y^2 \leq 4$.

Б

111. Паказаць, што

$$\sqrt{\frac{(1+\alpha)^2 + (1+\beta)^2}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2}(\alpha + \beta) + \frac{1}{8}(\alpha^2 - 3\alpha\beta + \beta^2),$$

калі $|\alpha|$ і $|\beta|$ малыя.

112. На плоскасці $3x - 2z = 0$ знайдіть пункт M такі, што сума квадратаў адлегласці M ад пунктаў $A(1; 1; 1)$ і $B(2; 3; 4)$ будзе найменшай.

113. Знайдіть умовныя экстремумы функцыі $u = x - 2y + 2z$ пры $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Рашэнне тыпавых задач

Задача 1. Раскласці па формуле Тэйлара ў наваколлі пункта $(1; 2)$

да членаў другога парадку ўключна функцыю $f(x; y) = \frac{x}{y}$.

Рашэнне. Запішам формулу Тэйлара з астаткавым членам у форме Піана:

$$\begin{aligned} f(x; y) &= f(x_0; y_0) + \frac{1}{1!} (f'_x(x_0; y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0; y_0)(y - y_0)) + \\ &+ \frac{1}{2!} (f''_{xx}(x_0; y_0)(x - x_0)^2 + f''_{xy}(x_0; y_0)(x - x_0)(y - y_0) + f''_{yy}(x_0; y_0)(y - y_0)^2) + \\ &+ \dots + \frac{1}{n!} \left((x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(x_0; y_0) + o(\rho^n), \end{aligned}$$

дзе $\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$.

Знайдем частковия вытворныя першага і другога парадкаў:

$$f'_x(x; y) = \frac{1}{y}; \quad f'_y(x; y) = -\frac{x}{y^2}; \quad f''_{xx}(x; y) = 0; \quad f''_{xy}(x; y) = -\frac{1}{y^2}; \quad f''_{yy}(x; y) = \frac{2x}{y^3}.$$

У пункце $(1; 2)$ маем: $f(1; 2) = \frac{1}{2}$; $f'_x(1; 2) = \frac{1}{2}$; $f'_y(1; 2) = -\frac{1}{4}$; $f''_{xx}(1; 2) = 0$;

$$f''_{xy}(1; 2) = -\frac{1}{4}; \quad f''_{yy}(1; 2) = \frac{1}{4}.$$

Формула Тэйлара мае выгляд

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(y-2) \right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}(x-1)(y-2) + \frac{1}{4}(y-2)^2 \right) + o((x-1)^2 + (y-2)^2).$$

Адказ:

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(y-2) \right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}(x-1)(y-2) + \frac{1}{4}(y-2)^2 \right) + o((x-1)^2 + (y-2)^2).$$

Задача 2. Знайсці лакальныя экстрэмы функцыі
 $f(x; y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.

Рашэнне. Знайдзем стацыянарныя пункты функцыі:

$$f'_x(x; y) = 2x + y - 3; \quad f'_y(x; y) = -x + 2y - 6 \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x + 2y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases}$$

Пункт $A(0; 3)$ можа быць пунктам лакальнага экстрэмуму функцыі. Праверым дастатковыя ўмовы існавання лакальнага экстрэмуму функцыі:

$$\begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0; y_0) & f''_{xy}(x_0; y_0) \\ f''_{xy}(x_0; y_0) & f''_{yy}(x_0; y_0) \end{vmatrix} > 0; \quad f''_{xx}(0; 3) = 2; \quad f''_{xy}(0; 3) = 1; \quad f''_{yy}(0; 3) = 2.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0.$$

Так як $f''_{xx}(0; 3) > 0$ і $f''_{yy}(0; 3) > 0$, у пункце $A(0; 3)$ функцыя мае лакальны мінімум: $f(0; 3) = -9 \Rightarrow \min f(x; y) = f(0; 3) = -9$.

Адказ: $\min f(x; y) = f(0; 3) = -9$.

Задача 3. Знайсті найбільше і найменше значення функції $f(x; y) = xy$ у абсягу $D: x^2 + y^2 \leq 1$.

Рашенне: Найбільше і найменше значення функція можа мець у стацыянарных пунктах ці на граніцы абсягу. Знайдзем стацыянарныя пункты функцыі: $f'_x(x; y) = y$, $f'_y(x; y) = x \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$. $O(0; 0)$ — стацыянарны пункт функцыі. Значэнні функцыі на граніцы $x^2 + y^2 = 1$, $y = \pm\sqrt{1-x^2}$:

$$f(x) = \pm x\sqrt{1-x^2}, \quad f'_x(x) = \pm \left(\sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \right) = \pm \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}; \quad x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}.$$

Знайдзем значэнні функцыі ў пунктах $O(0; 0)$, $A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $B\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $C\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ і $D\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

$$f(0; 0) = 0; \quad f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}; \quad f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2};$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2}; \quad f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}.$$

Такім чынам, найбольшае значэнне функцыі $f(x; y) = xy$ мае ў пунктах A і D , а найменшае — ў пунктах B і C :

$$\max_{x^2+y^2 \leq 1} f(x; y) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2};$$

$$\min_{x^2+y^2 \leq 1} f(x; y) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Адказ: $\max_{x^2+y^2 \leq 1} f(x; y) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2};$

$$\min_{x^2+y^2 \leq 1} f(x; y) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Заданні для самокантролю

114. Запісаць формулу Макларэна для функцыі $z = f(x; y)$.

115. Ці можна запісаць формулу Макларэна для функцыі карыснасці $z = a_1 \ln(x - c_1) + a_2 \ln(y - c_2)$, калі $a_1, a_2 > 0$, $x > c_1 > 0$, $y > c_2 > 0$?

116. Запісаць функцыю Лагранжа для $z = f(x; y)$ пры ўраўненні сувязі $\varphi(x; y) = 0$ і неабходных ўмовы ўмоўнага экстрэмуму.

117. Ці можа быць глабальны максімум функцыі $z = f(x; y)$ большы, чым лакальны максімум гэтай функцыі?

118. Знайсці ўраўненне датычнай плоскасці да паверхні $z = f(x; y)$ у пункце лакальнага экстрэмуму, калі $f(x; y)$ мае вытворныя ў гэтым пункце.

Глава 2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ УРАВНЕННЯ

Тестові питання

1. Дати означення диференціального рівняння.
2. Дати означення порядку рівняння.
3. Дати означення диференціального рівняння першого порядку.
4. Дати означення агульного рішення диференціального рівняння першого порядку.
5. Дати означення часткового рішення диференціального рівняння першого порядку.
6. Сформулювати задачу Коші для диференціального рівняння першого порядку і розтлумачити її геометричний зміст.
7. Перелічити типи диференціальних рівнянь першого порядку.
8. Дати означення диференціального рівняння першого порядку з розділяльними змінними, записати його загальний вигляд і розповісти про методи рішення.
9. Дати означення однорідного диференціального рівняння першого порядку, записати його загальний вигляд і розповісти про методи рішення.
10. Дати означення лінійного диференціального рівняння і рівняння Бернуллі, записати загальний вигляд кожного з них і розповісти про методи рішення цих рівнянь.

2.1. Диференціальні рівняння першого порядку

2.1.1. Диференціальні рівняння з розділяльними змінними

Завдання для аудиторної роботи

А

1. Знайти загальне або часткове рішення диференціальних рівнянь першого порядку з розділяльними змінними:

1) $x dx - 2y dy = 0$;

2) $\ln(\cos x) dx + x \operatorname{tg} y dy = 0$;

3) $y e^{2x} dx + (1 + e^{2x}) dy = 0$;

4) $(x - 2) dx + y dy = 0$;

5) $\frac{y y'}{x} + e^y = 0$, $y(1) = 0$;

6) $e^{1+x^2} \operatorname{tg} y dx - \frac{e^{2x}}{x-1} dy = 0$, $y(1) = \frac{\pi}{2}$;

$$7) y' = 2^{x-y}; y(-3) = -5; \quad 8) \frac{y}{y'} = \ln y, y(2) = 1;$$

$$9) \frac{xdy}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{ydx}{\sqrt{1-x^2}} = 0; \quad 10) y y' = -\frac{2x}{\cos y};$$

$$11) y' + \sin(x+y) = \sin(x-y); 12) y' = e^{x+y} + e^{x-y}, y(0) = 0.$$

Б

2. Знайдіть агульне або часткове рішення диференціальних рівнянь першого порядку з розділяльними змінними:

$$1) (1 + e^x) y y' = e^x, y(0) = 0;$$

$$2) x^2(2y y' - 1) = 1;$$

$$3) y - y' = y^2 + xy';$$

$$4) y' + \cos(x+y) = \cos(x-y);$$

$$5) y^2 dx + x^2 dy = xy(xdy - ydx);$$

$$6) xy dx - (1 + x^2) dy = y \sqrt{1 + x^2} dx.$$

3. Виясно, що темп приросту $T = \frac{y'(t)}{y(t)}$ національного доходу пропорційно експоненційному росту споживання $c(t)$. Визначте функцію $y = y(t)$, яка характеризує змінне національного доходу, калі виконуються наступні умови: ріст споживання $c(t) = e^{0,125t}$, $\frac{B}{\alpha_0} = 2,7$, $y(0) = e$.

4. Хуткасть абсциснування абстачування y виніку його зносу пропорційна y кожній момент часу його фактичному кошту. Початковий кошт абстачування родини A_0 . Знайдіть, скільки буде каштавати абстачування A праз t гадоу.

5. Знайдіть лінію, яка проходить праз пункт $A(2; 3)$ і володає той уласцівасцю, що адрезак ye адвольній дотичній, які знаходяться між координатними осями, ділять парову y пункт дотыку.

Заданні для самастойнай работы

А

6. Знайдіть агульне або часткове рішення диференціальних рівнянь першого порядку з розділяльними змінними:

$$1) y' = \frac{y+1}{x};$$

$$2) x \sqrt{1+y^2} + y \sqrt{1+x^2} \cdot y' = 0;$$

$$3) y y' = \frac{1-2x}{y};$$

$$4) x y' + y - y^2 = 0;$$

$$5) x + xy + y'(y + xy) = 0;$$

$$6) (2xy^2 + x)dx + (3y - x^2y)dy = 0;$$

$$7) e^{-s} \left(1 + \frac{ds}{dt} \right) = 1;$$

$$8) (\sqrt{x} y - \sqrt{x}) dy + y dx = 0$$

$$9) y' = \frac{1 + y^2}{1 + x^2}, y(0) = 1;$$

$$10) y' \sin x = y \ln y, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e;$$

$$11) y' = \frac{1 + y^2}{xy(1 + x^2)}.$$

$$12) \sin x \sin y dx + \cos x \cos y dy = 0;$$

Б

7. Знайдіть загальне або часткове рішення диференціальних рівнянь першого порядку з розділюваними змінними:

$$1) e^{-y} \left(1 + \frac{dy}{dx} \right) = 1;$$

$$2) y' + \sin \frac{x+y}{2} = \sin \frac{x-y}{2};$$

$$3) 3e^x \sin y dx = (e^x - 1) \frac{dy}{\cos y};$$

$$4) y - xy' = a(1 + x^2 y'), y(1) = 1.$$

8. Відомо, що темп приросту $T = \frac{y'(t)}{y(t)}$ національного доходу пропорційно експоненційному росту споживання $c(t)$. Визначте функцію $y = y(t)$, яка характеризує змінення національного доходу, калі виконуються наступні умови: рост споживання $c(t) = e^{0,21t}$, $\frac{B}{\alpha_0} = 2,5$, $y(0) = e$.

9. Хуткасть охолодження ціла пропорційна різниці між температурами ціла і навоколиного асєродзя. Лічым, што коефіцієнт пропорційності лінійна залежить ад часу: $x = x_0(1 + \alpha t)$. Знайдіть залежність між температурой ціла Q і часам t , калі відомо, што при $t = 0$ і $Q = Q_0$ температура навоколиного асєродзя роуна Q_1 .

10. Попыт на тавар азначаецца суадносінамі $D = 100 - 2p - 2 \frac{dp}{dt}$, а прапанаванне змяняецца па закону $S = 60 + 20 \frac{dp}{dt}$, дзе p — цана тавару, t — час у нядзелях. Трэба вызначыць, па якому закону будзе змяняцца раўнаважная цана (пры якой попыт будзе роўны з прапанаваннем), калі ў пачатковы момант часу яна складала 21 у.а.

Рашэнне тыпавых задач

Задача 1. Рашыць ураўненне $y' = 2x(y-1)^2$.

Рашэнне. Раздзелім зменныя: $\frac{dy}{(y-1)^2} = 2x dx$. Возьмем інтэгралы

ад абедзвюх частак і атрымаем $-\frac{1}{y-1} = x^2 + C$, дзе C — адвольная пастаянная. Адгэтуль следуе, што рашэннямі зададзенага ўраўнення з'яўляюцца функцыі $y = -\frac{1}{x^2 + C} + 1$.

Функцыя $y = 1$ з'яўляецца рашэннем ураўнення, але яна не ўваходзіць у атрыманае мноства рашэнняў, так як тоеснасць $-\frac{1}{x^2 + C} + 1 = 1$ не выконваецца ні пры якіх значэннях C .

Такім чынам, рашэннямі зададзенага ўраўнення з'яўляюцца функцыі $y = -\frac{1}{x^2 + C} + 1$, $y = 1$.

Адказ: $y = -\frac{1}{x^2 + C} + 1$, $y = 1$.

Задача 2. Вядома, што тэмп прыросту $T = \frac{y'(t)}{y(t)}$ нацыянальнага даходу прапарцыянальны экспаненцыяльнаму росту спажывання $c(t)$. Вызначыць функцыю $y = y(t)$, якая характарызуе змяненне нацыянальнага даходу, калі выконваюцца наступныя ўмовы: рост спажывання $c(t) = e^{0,057t}$, $\frac{B}{\alpha_0} = 3,5$, $y(0) = e$.

Рашэнне. Пры нязменнай норме вытворчага накаплення α_0 і пры нязменным значэнні капіталаёмкасці нацыянальнага даходу B , згодна ўмовам задачы, саставім ураўненне: $\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{B}{\alpha_0} c(t)$, або

$\frac{y'(t)}{y(t)} = 3,5e^{0,057t}$, якое з'яўляецца дыферэнцыяльным ураўненнем з раз-

дзяляльнымі зменнымі. Падзелім зменныя: $\frac{dy}{y} = 3,5e^{0,057t} dt$.

Праінтэгруем абедзве часткі гэтага ўраўнення і атрымаем агульнае рашэнне ў выглядзе $\ln y = 61,404e^{0,057t} + \ln C$ або $y = Ce^{61,404e^{0,057t}}$

Рашым задачу Кашы. Для гэтага будзем карыстацца пачатковымі ўмовамі $y = e$ пры $t = 0$: $e = Ce^{61,404}$, адкуль $C = e^{-60,404}$.

Тады функцыя змянення нацыянальнага даходу мае выгляд:

$$y = e^{61,404e^{0,057t} - 60,404}$$

Адказ: $y = e^{61,404e^{0,057t} - 60,404}$

2.1.2. Аднародныя дыферэнцыяльныя ўраўненні

Заданні для аўдыторнай работы

А

11. Знайсці агульнае або частковае рашэнне аднародных дыферэнцыяльных ураўненняў першага парадку:

1) $y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}$;

2) $(y^2 - 3x^2)dy + 2xy dx = 0$, $y(0) = 1$;

3) $y - x y' = x + y y'$;

4) $y^2 - 4xy + 4x^2 y' = 0$;

5) $x y' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$;

6) $x dx + (y - 2x)dy = 0$;

7) $y y' = 2y - x$;

8) $\frac{x y' - y}{x} = \operatorname{tg} \frac{y}{x}$, $y(1) = \frac{\pi}{2}$;

9) $xy' - y = \frac{x}{\operatorname{arctg} \frac{y}{x}}$;

10) $(2\sqrt{xy} - y)dx + xdy = 0$.

Б

12. Знайсці агульнае або частковае рашэнне аднародных дыферэнцыяльных ураўненняў першага парадку:

1) $\frac{y - x y'}{x + y y'} = 2$, $y|_{x=1} = 1$;

2) $x^2 y' = y(x + y)$;

3) $ydy + (x - 2y)dx = 0$;

4) $y y' + x = \frac{x^2 + y^2}{2x}$;

5) $x dx = \cos \frac{y}{x} (y dx - x dy)$;

6) $y = x(y' - \sqrt{e^y})$.

13. Вызначыць функцыю змянення кошту тавару ў залежнасці ад яго колькасці, калі дынамічная функцыя прапанавання тавару будзе

мець вигляд $F\left(x_i; p_i; \frac{dp_i}{dt}\right) = \frac{x_i}{p_i} \frac{dp_i}{dt}$ і буде прапарцыянальна хуткасці змянення запасу тавару з каэфіцыентамі прапарцыянальнасці, роўнымі па велічыне $1 + \ln p_i - \ln x_i$ пры ўмовах, што $p(1) = \frac{1}{e}$.

14. Знайсці крывую, якая праходзіць праз пункт $A(0; 2)$ і разам з воссю OY , датычнай да крывой у адвольным яе пункце, і радыусам-вектарам пункту датыку стварае раўнабедраны трохвугольнік. Прычым асновай яго будзе адрэзак датычнай ад пункту датыку да восі OY .

Заданні для самастойнай работы

А

15. Знайсці агульнае або частковае рашэнне аднародных дыферэнцыяльных ураўненняў першага парадку:

$$1) y' = 4 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2, \quad y(1) = 2; \quad 2) xy' \sin\left(\frac{y}{x}\right) + x = y \sin\left(\frac{y}{x}\right);$$

$$3) x y' = x e^{\frac{y}{x}} + y, \quad y(1) = 0; \quad 4) x y' \ln\left(\frac{y}{x}\right) = x + y \ln\left(\frac{y}{x}\right);$$

$$5) y' = \frac{y}{x} + \cos \frac{y}{x}; \quad 6) x^3 y' = y(y^2 + x^2);$$

$$7) y' = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}; \quad 8) y \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2x \frac{dy}{dx} - y = 0, \quad y(0) = \sqrt{5};$$

$$9) y' = \frac{y^2 - 2xy - x^2}{y^2 + 2xy - x^2}, \quad y(1) = -1.$$

Б

16. Знайсці агульнае або частковае рашэнне аднародных дыферэнцыяльных ураўненняў першага парадку:

$$1) y - x y' = \frac{x}{\cos \frac{y}{x}}, \quad y|_{x=1} = \pi; \quad 2) 2x^2 y' - 4xy - y^2 = 0;$$

$$3) y dx - \left(x - y \operatorname{tg} \frac{x}{y}\right) dy = 0; \quad 4) (x^2 + y^2 + xy) dx = x^2 dy.$$

17. Няхай дынамічная функцыя прапанавання тавару мае выгляд $F\left(x_i; p_i; \frac{dp_i}{dt}\right) = \frac{x_i}{p_i - \sqrt{x_i p_i}} \frac{dp_i}{dt}$, дзе x_i — запас тавару; p_i — цана тавару; $\frac{dp_i}{dt}$ — велічыня, якая характарызуе змяненне цаны. Азначыць, як зменіцца цана тавару ў залежнасці ад яго колькасці, калі дынамічная функцыя прапанавання тавару будзе прапарцыянальна хуткасці змянення запasu тавару з каэфіцыентамі прапарцыянальнасці, роўнымі па велічыне $1 + \ln p_i - \ln x_i$, пры ўмовах, што $p(2) = \frac{1}{e^2}$.

18. Знайсці лінію, у якой квадрат даўжыні адрэзка, які адсякае адвольная датычная ад восі ардынат, будзе роўным здабытку каардынат любога пункту дотыку.

19. Запісаць ўраўненне лініі, якая праходзіць праз пункт $A(1; 0)$, калі вядома, што адрэзак, адсечаны датычнай у любым пункце гэтай лініі на восі OY , будзе роўным адрэзку ад пункту дотыку да пачатку каардынат.

Рашэнне тыпавых задач

Задача 1. Рашыць ураўненне $2x^2 y' = x^2 + y^2$.

Рашэнне. Зададзенае ўраўненне — аднароднае. Заменім $y = ux$, $y = u'x + u$. Атрымаем $2x^2(u'x + u) = x^2 + u^2 x^2$, або $2u'x + 2u = 1 + u^2$.

Раздзелім зменныя: $\frac{du}{u^2 - 2u + 1} = \frac{dx}{x}$. Возьмем інтэгралы ад абедзвюх частак і атрымаем $-\frac{1}{u-1} = \frac{1}{2} \ln|x| + \ln C$. Замест u падставім $\frac{y}{x}$. Такім чынам, агульнае рашэнне зададзенага ўраўнення

$$\text{мае выгляд } y = x - \frac{x}{\ln(C\sqrt{|x|})}.$$

$$\text{Адказ: } y = x - \frac{x}{\ln(C\sqrt{|x|})}.$$

Задача 2. Вядома, што дынамічная функцыя прапанавання тавару мае выгляд

$$F\left(x_i; p_i; \frac{dp_i}{dt}\right) = \frac{x_i}{p_i - \sqrt{x_i p_i}} \frac{dp_i}{dt},$$

дзе x_i — запас товару; p_i — ціна товару; $\frac{dp_i}{dt}$ — величина, яка характеризує змінення ціни.

Визначимо, як змінюється ціна товару у залежності від його кількості, коли динамічна функція пропонування товару роуна хуткості змінювання запасу товару.

Розв'язок. Згідно з умовами задачі складемо наступне рівняння:

$$\frac{x_i}{p_i - \sqrt{x_i p_i}} \frac{dp_i}{dt} = \frac{dx_i}{dt}.$$

Це рівняння з'являється одностороннім. Запишемо його у вигляді

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{dx_i}{dt} \frac{p_i - \sqrt{x_i p_i}}{x_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = \frac{p_i}{x_i} - \sqrt{\frac{p_i}{x_i}}.$$

Позначимо, що $\frac{p_i}{x_i} = u$, тоді $p_i = ux_i$ і $p'_i = u'x_i + u$.

Підставимо значення p_i і p'_i у диференціальне рівняння і отримаємо $u'x_i + u = u - \sqrt{u}$; $x_i du = -\sqrt{u} dx_i$.

Поділимо обидві частки рівняння на здабуток функцій $x_i \sqrt{u}$ і отримаємо $\frac{du}{\sqrt{u}} = -\frac{dx_i}{x_i}$.

Інтегруємо його і знайдемо загальне рішення $u = \frac{1}{4} \ln^2 \left| \frac{C}{x_i} \right|$, з допомогою якого отримаємо функцію змінювання ціни ад кількості

товару $p_i = \frac{x_i}{4} \ln^2 \left| \frac{C}{x_i} \right|$.

Висновок: $p_i = \frac{x_i}{4} \ln^2 \left| \frac{C}{x_i} \right|$.

2.1.3. Лінейныя дыферэнцыяльныя ўраўненні

Заданні для аўдыторнай работы

А

20. Знайдзі агульнае або частковае рашэнне лінейных дыферэнцыяльных ураўненняў першага парадку:

1) $y' \sin x - y \cos x = 1$;

2) $y' - \frac{y}{x} = -x^2$;

3) $y' + y = x$;

4) $x y' - 2y = x^3 + x$;

5) $y' \ln x - \frac{y}{x} = x - \ln x$;

6) $y' + 2xy = x e^{-x^2}$;

7) $y' + 2y = e^{3x}$;

8) $x y' \ln x = y + \ln x$;

9) $y' - 2y = e^{-x}$, $y(0) = -1$;

10) $x y' - 2y = x$, $y(1) = 1$.

Б

21. Знайдзі агульнае або частковае рашэнне лінейных дыферэнцыяльных ураўненняў першага парадку:

1) $x' + \frac{5x}{y} = \frac{4}{y^2}$;

2) $x' - \frac{x}{2y} = -\frac{1}{2x}$;

3) $x dy + 4y dx + x^2 dx = 0$;

4) $x(x+1)(y'-1) = y$;

5) $e^{-y} dx - (x e^{-y} + 2y) dy = 0$, $y(5) = 0$; 6) $\cos y dx = (x + 2y \cos y) \sin y dy$.

22. Функцыя прапанавання прамысловай прадукцыі прадпрыемства, якая з'яўляецца функцыяй цаны мінулага года, мае выгляд $S = 3p - 8(t-1) + 2 \frac{dp}{dt}$. Попыт на дадзены тавар вызначаецца коштам прамысловай прадукцыі гэтага года. Тады функцыя попыту мае выгляд $q = -p + 7t - \frac{dp}{dt}$. Вызначыць цану раўнавагі на тавар.

23. Знайдзі функцыю, якая характарызуе змяненне нацыянальнага даходу $y = y(t)$, калі вядома, што велічыня спажывання зададзена функцыяй $c = 4t$, каэфіцыент капіталаёмкасці прыросту даходу $B = \frac{1}{4}$, $y(0) = 4$.

Заданні для самастойнай работы

А

24. Знайсці агульнае або частковае рашэнне лінейных дыферэнцыяльных ураўненняў першага парадку:

- | | |
|------------------------------------|---|
| 1) $y' + y = \cos x$; | 2) $y' - 6y = 2x e^{6x}$, $y(1) = e^6$; |
| 3) $y'(x + y^2) = y$; | 4) $y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$, $y(0) = 0$; |
| 5) $y' - xy = x^3$; | 6) $y'(1 - x^2) = xy + 1$, $y\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2}{3}\pi$; |
| 7) $x^2 y' = 4xy + 5$; | 8) $x dy + 4y dx + x^2 dx = 0$; |
| 9) $y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1$. | |

Б

25. Знайсці агульнае або частковае рашэнне лінейных дыферэнцыяльных ураўненняў першага парадку:

- | | |
|--|----------------------------------|
| 1) $x y' + x^2 + xy - y = 0$; | 2) $2y dx + (y^2 - 6x) dy = 0$; |
| 3) $(3x - y - 2) dx + (x - 1) dy = 0$; | |
| 4) $t(1 + t^2) dx = (x + xt^2 - t^2) dt$, $x(1) = -\frac{\pi}{4}$. | |

26. Знайсці функцыю, якая характарызуе змяненне нацыянальнага даходу $y = y(t)$, калі вядома, што велічыня спажывання зададзена функцыяй $c = 6t$, каэфіцыент капіталаёмкасці прыросту даходу $B = \frac{1}{6}$, $y(0) = 6$.

27. Пункт масай m , рухаецца прамалінейна. На яго дзейнічае сіла, прапарцыянальная часу (каэфіцыент прапарцыянальнасці будзе роўным k_1), які прайшоў ад таго моманту, калі хуткасць пункта была роўна нулю. Акрамя таго, на пункт дзейнічае сіла супраціўлення навакольнага асяроддзя, прапарцыянальная хуткасці (каэфіцыент прапарцыянальнасці будзе роўным k). Знайсці залежнасць хуткасці ад часу.

28. З вышыні падае цела масай m з першапачатковай хуткасцю $v(0) = 0$. Знайсці хуткасць цела $v = v(t)$ у любы момант часу t , калі на яго, акрамя сілы цягі $p = mg$, дзейнічае сіла супраціўлення паветру,

якая прапарцыянальна хуткасці $v(t)$ з каэфіцыентам прапарцыянальнасці, роўным $\frac{3}{2}$.

Рашэнне тыпавых задач

Задача 1. Знайсці агульнае рашэнне лінейнага дыферэнцыяльнага ўраўнення першага парадку: $y' - \frac{2}{x}y = x$.

Рашэнне. Няхай $y = uv$. Тады $y' = u'v + uv'$. Значэнні y і y' падставім у зададзенае ўраўненне: $u'v + uv' - \frac{2}{x}uv = x$.

Згруппуем складнікі, якія маюць u і атрымаем

$$u'v + u\left(v' - \frac{2}{x}v\right) = x.$$

Возьмем функцыю v такім чынам, каб сумножнік пры u раўнаваўся нулю: $v' - \frac{2}{x}v = 0$. Рэшым гэтае ўраўненне з раздзельнымі зменнымі і атрымаем: $v = x^2$.

Падставім v у $u'v = x$: $x^2 u' = x$. Раздзяліўшы зменныя і праінтэграваўшы гэтае ўраўненне, атрымаем $u = \ln |Cx|$.

Агульнае рашэнне будзе мець выгляд $y = x^2 \ln |Cx|$.

Адказ: $y = x^2 \ln |Cx|$.

Задача 2. Знайсці функцыю, якая характарызуе змяненне нацыянальнага даходу $y = y(t)$, калі вядома, што велічыня спажывання зададзена функцыяй $c = 2t$, каэфіцыент капіталаёмкасці прыросту даходу $B = \frac{1}{2}$, $y(0) = 2$.

Рашэнне. Найбольш простую мадэль вытворчасці нацыянальнага даходу можна сфармуляваць, калі выконваюцца дзве ўмовы:

- 1) прапарцыянальнасць вытворчага назаплення прыросту нацыянальнага даходу ў той жа момант часу;
- 2) незалежнасць дынамікі спажывання.

Гэтая мадэль мае выгляд $y(t) = B \frac{dy}{dx} + C(t)$, дзе B — каэфіцыент капіталаёмістасці нацыянальнага даходу; $C(t)$ — невытворчае спажыванне, невытворчае накапленне, прырост матэрыяльных абаротных сродкаў, дзяржаўных матэрыяльных рэзерваў, страты — усё гэта будзе «спажыванне».

Звяртаючыся да ўмоў задачы, атрымаем ураўненне

$$y(t) = \frac{1}{2} y'(t) + 2t.$$

Гэта значыць, функцыя даходу задавальняе лінейнаму дыферэнцыяльнаму ўраўненню першага парадку. Для яго рашэння скарыстаем падстаноўку:

$$y(t) = u(t)v(t), \quad y'(t) = u'(t)v(t) + u(t)v'(t).$$

Тады ўраўненне прыме выгляд $uv = \frac{1}{2}(u'v + uv') + 2t$, або

$$\frac{1}{2}u'v + \frac{1}{2}uv' - uv = -2t; \quad \frac{1}{2}u'v + u\left(\frac{1}{2}v' - v\right) = -2t.$$

Возьмем v так, каб выраз у дужках раўнаваўся нулю. Тады атрымаем два ўраўненні:

$$\frac{1}{2}v' - v = 0; \quad \frac{1}{2}u'v = -2t.$$

Рашым першае ўраўненне $\frac{1}{2}v' = v$. Гэта ўраўненне з раздзяляльнымі зменнымі: $v' = 2v$, $dv = 2vdt$, $\frac{dv}{v} = 2dt$, $\ln|v| = 2t$, $v = e^{2t}$.

Рашым другое ўраўненне $\frac{1}{2}u'v = -2t$: $u'e^{2t} = -4t$, $u' = -4t \cdot e^{-2t}$

$$u = -4 \int t e^{-2t} dt = -4 \left(-\frac{1}{2} t e^{-2t} + \frac{1}{2} \int e^{-2t} dt \right) = 2t e^{-2t} + e^{-2t} + C.$$

Тады агульнае рашэнне будзе мець выгляд

$$y = e^{2t} (2t e^{-2t} + e^{-2t} + C) = 2t + 1 + C e^{2t}.$$

Значэнне нязменнай C знойдзем з пачатковых умоў $y(0) = u(0) \cdot v(0) = 2$. Адгэтуль $C = 1$.

Частковае рашэнне мае выгляд $y = 2t + 1 + e^{2t}$.

Алказ: Функцыя, якая характарызуе змяненне нацыянальнага даходу, мае выгляд $y = 2t + 1 + e^{2t}$.

2.1.4. Ураўненні Бернулі

Заданні для аудиторнай работы

А

29. Знайсці агульнае або частковае рашэнне дыферэнцыяльных ураўненняў першага парадку:

1) $x y' + y = y^2 \ln x$;

2) $y' + \frac{y}{x} = -x y^2$;

3) $y' - xy = x^3 y^2$;

4) $y' + y = e^{\frac{x}{2}} \sqrt{y}$, $y(0) = \frac{9}{4}$;

5) $2y' + y = \frac{x}{y}$;

6) $y' + \frac{3x^2 y}{x^3 + 1} = y^2 (x^3 + 1) \sin x$, $y(0) = 1$.

Б

30. Знайсці агульнае або частковае рашэнне дыферэнцыяльных ураўненняў першага парадку:

1) $xy \, dy = (y^2 + x) \, dx$;

2) $y' x^3 \sin y = xy' - 2y$;

3) $(2x^2 y \ln y - x) y' = y$;

4) $y x' + x = -yx^2$.

Заданні для самастойнай работы

А

31. Знайсці агульнае або частковае рашэнне дыферэнцыяльных ураўненняў першага парадку:

1) $y' + 2xy = 2x^2 y^3$;

2) $y' + \frac{y}{x+1} + y^2 = 0$;

3) $y' - y \operatorname{tg} x + y^2 \cos x = 0$;

4) $x y' - 4y - x^2 \sqrt{y} = 0$;

5) $(2xy + 3) \, dy - y^2 \, dx = 0$;

6) $(y^4 + 2x) y' = y$.

Б

32. Знайсці агульнае або частковае рашэнне дыферэнцыяльных ураўненняў першага парадку:

1) $(x^2 \ln y - x) y' = y$;

2) $y = x y' + y' \ln y$;

3) $y = x y' + y' \ln y$;

4) $y \, dx + (x + x^2 y^2) \, dy = 0$;

5) $(y^2 + 2y + x^2) y' + 2x = 0$, $y(1) = 0$;

$$6) y dx + 2x dy = 2y \frac{\sqrt{x}}{\cos^2 y} dy, y(0) = \pi.$$

Рашэнне тыпавых задач

Задача. Знайсці агульнае рашэнне дыферэнцыяльнага ўраўнення першага парадку: $xy' + y = xy^2 \ln x$.

Рашэнне. Няхай $y = uv$. Тады $y' = u'v + uv'$. Значэнні y і y' падставім у зададзенае ўраўненне $u'v + uv' + \frac{1}{x}uv = u^2v^2 \ln x$.

Згрупавем складнікі, якія маюць u , і атрымаем

$$u'v + u\left(v' + \frac{1}{x}v\right) = u^2v^2 \ln x.$$

Возьмем функцыю v такім чынам, каб сумножнік пры u раўнаўся нулю: $v' + \frac{1}{x}v = 0$. Рашая гэтае ўраўненне з раздзельнымі зменнымі, атрымаем $v = \frac{1}{x}$. Тады застанецца рашыць другое ўраўненне

$u'v = u^2v^2 \ln x$, або $u' = u^2v \ln x$.

Раздзяліўшы зменныя і праінтэграваўшы гэтае ўраўненне, атрымаем

$$\frac{du}{u^2} = \frac{\ln x}{x} dx; \int \frac{du}{u^2} = \int \frac{\ln x}{x} dx + C; -\frac{1}{u} = \frac{\ln^2 x}{2} + \frac{C}{2}; u = -\frac{2}{C + \ln^2 x}.$$

Агульнае рашэнне будзе мець выгляд $y = -\frac{2}{x(C + \ln^2 x)}$.

Адказ: $y = -\frac{2}{x(C + \ln^2 x)}$.

Пытанні для самакантролю

1. Ці можа дыферэнцыяльнае ўраўненне $y' = f(x)$ мець канечны лік рашэнняў?

2. Ці існуе інтэгральная крывая ўраўнення $y' = k y$, якая праходзіць праз пункты:

а) $M(1; 2)$, б) $M(1; 2)$ і $N(2; 3)$, в) $M(1; 2)$ і $P(1; 3)$, г) $M(1; 2)$ і $K(4; 2)$?

3. У якіх випадках мноства ўсіх рашэнняў дыферэнцыяльных ураўненняў $y' = y$ можна прывесці да выгляду:

а) $y = C e^x$; б) $y = C^2 e^x$; в) $y = (\ln C) e^x$; г) $y = (\cos C) e^x$.

4. Паказаць, ці можа мноства ўсіх рашэнняў дыферэнцыяльных ураўненняў з раздзяляльнымі зменнымі мець выгляд $y = C_1 x + C_2$, дзе C_1 і C_2 — адвольныя пастаянныя.

5. Праверыць, ці будзе функцыя $y = C_1 x + \frac{1}{C_1}$, рашэннем дыферэнцыяльнага ўраўнення $x y' - y + \frac{1}{y} = 0$.

6. Праверыць, ці з'яўляецца функцыя $y = y(x)$, зададзеная ў няўным выглядзе ўраўненнем $e^x = C y$, інтэгралам дыферэнцыяльнага ўраўнення $x y' - y^2 = x^2 y'$.

7. Ці можа рашэнне дыферэнцыяльнага ўраўнення $y' = y$ у выпадках, калі яно не абарачаецца ў нуль ні для якіх значэнняў аргумента, мець пункты экстрэмума?

Задачы на паўтарэнне

33. Указаць тып дыферэнцыяльнага ўраўнення і метады яго рашэння:

1) $y' x + y = -x y^2$; б

2) $x y' \ln \frac{y}{x} = x + y \ln \frac{y}{x}$; оды

3) $y = y' \ln y$; рп

4) $(1 + y^2) dx = \sqrt{x} dy$;

5) $y' + y \cos x = \cos x$;

6) $x y' + y = \sin x$;

7) $y' + x y = x^3$;

8) $x dy - y dx = \sqrt{x^2 + y^2} dx$;

9) $y' - \frac{3}{x} y = x$;

10) $x^2 dy + y^2 dx = 3(x^2 - y^2) dx$;

11) $x y' - y = x^2 \cos x$;

12) $dy = (y + x^2) dx$;

13) $x y' = 3y - x^4 y^2$;

14) $y' + 2e^x y = 2e^x \sqrt{y}$;

15) $y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$;

16) $x' - 3x = e^{-t}$;

17) $x^2 y' + 2xy = -4$;

18) $x(y' - x \cos x) = y$;

19) $(x-1)dy = (y+1)dx$;

20) $x' = 2 + x$;

21) $3y^2 dy = x^2 dx$;

22) $y' = xe^{-y}$;

23) $(x^2 + 1)dy - xy dx = 0$;

24) $\frac{1}{x} y' = 3y \cos x + x$;

25) $v' + t^2 v = e^t$;

26) $\sqrt{y} dx + x^2 dy = 0$;

27) $y' \cos x + y \sin x = 1$;

28) $(x+1) \frac{dy}{dx} - 2y = (x+1)^4$;

29) $\frac{1}{x} \frac{dy}{dx} - 2y = (1-x^2)e^{x^2}$;

30) $xy' + y = xy^2 \ln x$;

31) $y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1$.

2.2. Дыферэнцыяльныя ўраўненні вышэйшых парадкаў, якія дапускаюць зніжэнне парадку

Тэарэтычныя пытанні

1. Даць азначэнне дыферэнцыяльнага ўраўнення n -га парадку і яго агульнага рашэння.

2. Пералічыць тыпы ўраўненняў вышэйшых парадкаў, якія дапускаюць зніжэнне парадку.

3. Схема рашэння дыферэнцыяльнага ўраўнення выгляду $y^{(n)} = f(x)$.

4. Даць азначэнне дыферэнцыяльнага ўраўнення другога парадку.

5. Схема рашэння дыферэнцыяльнага ўраўнення выгляду $F(x; y'; y'') = 0$.

6. Схема рашэння дыферэнцыяльнага ўраўнення выгляду $F(y; y'; y'') = 0$.

7. Схема рашэння дыферэнцыяльнага ўраўнення выгляду $F(y'; y'') = 0$.

Заданні для аўдыторнай работы

А

34. Знайсці агульнае або частковае рашэнне дыферэнцыяльных ураўненняў вышэйшых парадкаў, якія дапускаюць зніжэнне парадку:

1) $y'' = 3x^2 - 4x + 1$;

2) $y'' = x^2 - \cos x$;

- 3) $y''' \sin^4 x = \sin 2x$; 4) $y'' = 2 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x$;
 5) $e^x (y'' + e^x) = 1$; 6) $x^2 y'' = (y')^2$;
 7) $(1 + x^2) y'' + (y')^2 + 1 = 0$; 8) $x \ln x \cdot y'' = y'$.

Б

35. Знайдіть агульне або часткове рішення диференціальних рівняння вищайших порядків, які допускають зніження порядку:

- 1) $x y'' = y' (\ln y' - \ln x)$; 2) $y'' = \frac{y'}{x} + \frac{x^2}{y'}$, $y(2) = 0$, $y'(2) = 4$;
 3) $x y'' + y' = y' \ln \frac{y'}{x}$; 4) $y^3 y'' = -1$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$;
 5) $x y'' + x (y')^2 - y' = 0$, $y(2) = 2$, $y'(2) = 1$;
 6) $3 y' y'' = y + (y')^3 + 1$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 0$;
 7) $2 y'' = 3 y^2$, $y(-2) = 1$, $y'(-2) = -1$;
 8) $y y'' = (y')^2 - (y')^3$, $y(1) = 1$, $y'(1) = -1$.

Заданні для самостійної роботи

А

36. Знайдіть агульне або часткове рішення диференціальних рівняння вищайших порядків, які допускають зніження порядку:

- 1) $y''' = \sqrt[3]{x-1}$; 2) $y'' = \left(\sqrt{1 + (y')^2} \right)^3$;
 3) $y'' = 3y'$; 4) $y'' (x^2 + 1) = 2x y'$;
 5) $y'' = y' (1 + (y')^2)$; 6) $y'' (x^2 + 1) = 2x y'$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$;
 7) $y^{IV} = \cos^2 x$, $y(0) = \frac{1}{32}$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = \frac{1}{8}$, $y'''(0) = 0$;
 8) $y''' = x e^{-x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 2$.

Б

37. Знайдіть агульне або часткове рішення диференціальних рівняння вищайших порядків, які допускають зніження порядку:

- 1) $x^2 y''' = (y'')^2$; 2) $x y^{IV} = y^{IV}$;
 3) $y' y'' = 3(y'')^2$; 3) $y''' + y'' \operatorname{tg} x = \sec x$.
 4) $y y'' - y^2 y' - (y')^2 = 0$; 5) $2y y'' - 3(y')^2 = 4y^2$;

$$6) y'' + \frac{2}{1-y} (y')^2 = 0;$$

$$7) y'' = \frac{y'}{x} + x;$$

$$8) y'' - 2 \operatorname{ctg} x y' = \sin^3 x;$$

$$9) (1-x^2)y'' - x y' = 2;$$

$$10) y'' = y'(1+y')^2;$$

$$11) y'' + y' + 2 = 0;$$

$$12) y'' = \sqrt{1+y};$$

38. З сямейства інтэгральных крывых дыферэнцыяльнага ўраўнення $y'' = 6(1-x)$ знайсці тую, якая ў пункце $M(1; 5)$ мае датычную з вуглом наклону да восі x , роўным $\frac{\pi}{4}$.

Рашэнне тыпавых задач

Задача 1. Знайсці агульнае рашэнне дыферэнцыяльнага ўраўнення

$$y''' = \frac{8}{(x-3)^5}.$$

Рашэнне. Панізім парадак вытворнай:

$$y'' = \int y''' dx = 8 \int \frac{dx}{(x-3)^5} = -\frac{2}{(x-3)^4} + C_1.$$

Зноў панізім парадак вытворнай:

$$y' = \int y'' dx = \int \left(-\frac{2}{(x-3)^4} + C_1 \right) dx = \frac{2}{3(x-3)^3} + C_1 x + C_2.$$

Атрымаем агульнае рашэнне дыферэнцыяльнага ўраўнення:

$$y = \int y' dx = \int \left(\frac{2}{3(x-3)^3} + C_1 x + C_2 \right) dx = -\frac{1}{3(x-3)^2} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

Адказ: $y = -\frac{1}{3(x-3)^2} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$

Задача 2. Знайсці частковае рашэнне дыферэнцыяльнага ўраўнення: $x y'' = y' \ln \frac{y'}{x}$, $y(1) = e$, $y'(1) = e^2$.

Рашэнне. Зададзенае ўраўненне мае агульны выгляд $F(x; y'; y'') = 0$. У ім адсутнічае y . Панізім парадак гэтага ўраўнення.

Няхай $z = y'$, $z' = y''$. Тады зададзенае ўраўненне будзе аднародным ураўненнем першага парадку адносна зменнай x : $x z' = z \ln \frac{z}{x}$.

Рашым яго з дапамогай падстаноўкі $z = ux$, $z = u'x + u$. Ураўненне прыме выгляд $u'x + u = u \ln u$.

Раздзяліўшы зменныя і праінтэграваўшы абедзве часткі атрыма-
нага ўраўнення, атрымаем: $\frac{du}{u(\ln u - 1)} = \frac{dx}{x}$;

$$\ln |\ln u - 1| = \ln |x| + \ln C_1; \ln u - 1 = C_1 x, u = e^{1+C_1 x},$$

адкуль $z = x e^{1+C_1 x}$.

Так як $z = y'$, то апошняе ўраўненне з'яўляецца дыферэнцыаль-
ным ураўненнем першага парадку. Яно рашаецца аднаразовым інтэ-
граваннем: $y' = x e^{1+C_1 x}$, адкуль

$$y = \int x e^{1+C_1 x} dx = \left| \begin{array}{l} u = x \\ dv = e^{1+C_1 x} dx \\ v = \frac{1}{C_1} e^{1+C_1 x} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{x}{C_1} e^{1+C_1 x} - \frac{1}{C_1} \int e^{1+C_1 x} dx = \frac{x}{C_1} e^{1+C_1 x} - \frac{1}{C_1^2} e^{1+C_1 x} + C_2 = \frac{C_1 x - 1}{C_1^2} e^{1+C_1 x} + C_2.$$

Такім чынам, агульнае рашэнне ўраўнення:

$$y = \frac{C_1 x - 1}{C_1^2} e^{1+C_1 x} + C_2.$$

Вызначым значэнні адвольных пастаянных C_1 і C_2 . Выкарыстоў-
ваючы пачатковыя ўмовы $y(1) = e$, $y'(1) = e$, атрымаем сістэму ўраў-
ненняў

$$\begin{cases} e = \frac{C_1 - 1}{C_1^2} e^{1+C_1} + C_2 \\ e^2 = e^{1+C_1} \end{cases}$$

Адгэтуль знойдзем, што $C_1 = 1$ і $C_2 = e$. Частковае рашэнне прыме
выгляд $y = (x - 1)e^{1+x} + e$.

Адказ: $y = (x - 1)e^{1+x} + e$.

Задача 3. Знайсці агульнае рашэнне $y'' \operatorname{tg} y = 2(y')^2$.

Рашэнне. Гэтае ўраўненне мае агульны выгляд $F(y; y'; y'') = 0$ і залежыць ад y .

Няхай $y' = p$, тады $y'' = p \frac{dp}{dy}$. Падставім значэнні y' і y'' у зададзенае ўраўненне $p \frac{dp}{dy} \operatorname{tg} y = 2p^2$. Атрымаем ураўненне з раздзяляльнымі зменнымі. Рашым яго:

$$\frac{dp}{p} = \frac{2dy}{\operatorname{tg} y}, \quad \int \frac{dp}{p} = 2 \int \frac{\cos y}{\sin y} dy + C_1; \quad \ln |p| = 2 \ln |\sin y| + \ln C_1;$$

$$\ln |p| = \ln(C_1 \sin^2 y),$$

адкуль $p = C_1 \sin^2 y$.

Звяртаючыся да падстаноўкі $y' = p$, атрымаем $y' = C_1 \sin^2 y$.

Гэта ўраўненне з раздзяляльнымі зменнымі. Раздзелім іх і праінтэгруем абедзве часткі дыферэнцыяльнага ўраўнення: $\frac{dy}{\sin^2 y} = C_1 dx$;

$$C_2 - \operatorname{ctg} y = C_1 x; \quad \operatorname{ctg} y = C_2 - C_1 x; \quad y = \operatorname{arccotg}(C_2 - C_1 x).$$

Алказ: $y = \operatorname{arccotg}(C_2 - C_1 x)$.

2.3. Лінейныя аднародныя і неаднародныя ўраўненні вышэйшых парадкаў з нязменнымі каэфіцыентамі

2.3.1. Лінейныя аднародныя дыферэнцыяльныя ўраўненні вышэйшых парадкаў

Тэарэтычныя пытанні

1. Даць азначэнне лінейнага аднароднага дыферэнцыяльнага ўраўнення з нязменнымі каэфіцыентамі.
2. Даць азначэння агульнага рашэння аднароднага ўраўнення n -га парадку.
3. Сфармуляваць тэарэму аб структуры агульнага рашэння лінейнага аднароднага дыферэнцыяльнага ўраўнення.
4. Як запісаць характарыстычнае ўраўненне для зададзенага аднароднага дыферэнцыяльнага ўраўнення?

5. Дать означэнне лінейнага аднароднага дыферэнцыяльнага ўраўнення другога парадку з нязменнымі каэфіцыентамі.

6. Дать означэнне агульнага рашэння аднароднага ўраўнення другога парадку з нязменнымі каэфіцыентамі.

7. Запісаць агульнае рашэнне аднароднага дыферэнцыяльнага ўраўнення другога парадку з нязменнымі каэфіцыентамі ў наступных выпадках:

а) рэчаісных і розных каранёў характарыстычнага ўраўнення;

б) рэчаісных і роўных каранёў характарыстычнага ўраўнення;

в) камплексных каранёў характарыстычнага ўраўнення.

Заданні для аўдыторнай работы

А

39. Знайсці агульнае або частковае рашэнне лінейнага аднароднага дыферэнцыяльнага ўраўнення другога парадку з нязменнымі каэфіцыентамі:

1) $y'' + y' - 2y = 0$;

2) $y'' - 2y = 0$;

3) $y'' + 3y' = 0$;

4) $y'' - 2y' + y = 0$;

5) $y'' + y = 0$;

6) $y'' + 5y' + 6y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -6$;

7) $y'' + 6y' + 13y = 0$;

8) $y'' - 10y' + 25y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

9) $y'' - 2y' + 10y = 0$, $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$, $y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = e^{\frac{\pi}{6}}$.

Б

40. Знайсці агульнае або частковае рашэнне лінейнага аднароднага дыферэнцыяльнага ўраўнення вышэйшых парадкаў з нязменнымі каэфіцыентамі:

1) $y^{IV} - 4y''' + 4y'' = 0$;

2) $y^{IV} + 5y'' + 4y = 0$;

3) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$;

4) $y''' - 13y' - 12y = 0$;

5) $y''' + y'' - 4y' - 4y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = 9$.

Заданні для самастойнай работы

А

41. Знайсці агульнае або частковае рашэнне лінейнага аднароднага дыферэнцыяльнага ўраўнення другога парадку з нязменнымі каэфіцыентамі:

1) $4y'' - 8y' + 3y = 0$;

2) $9y'' + 6y' + y = 0$;

3) $2y'' + 3y' + y = 0$;

4) $y'' + 8y' + 25y = 0$;

5) $y'' + 5y = 0$;

6) $y'' + y = 0, y(0) = 1, y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$;

7) $y'' + 3y' = 0, y(0) = 1, y'(0) = 2$.

Б

42. Знайсці агульнае або частковае рашэнне лінейнага аднароднага дыферэнцыяльнага ўраўнення вышэйшых парадкаў з нязменнымі каэфіцыентамі:

1) $y''' - 2y'' + y' = 0$;

2) $y^{IV} - 13y'' + 36y = 0$;

3) $y''' - 4y'' + 3y' = 0$;

4) $y''' + 5y'' = 0$;

5) $y^{IV} - 8y'' - 9y = 0$;

6) $y''' - 3y'' + 4y = 0$;

7) $y''' - 2y'' + 9y' - 18y = 0, y(0) = 3, y'(0) = 4, y''(0) = 17$.

43. Матэрыяльны пункт з масай, роўнай m , рухаецца па восі Ox пад уздзеяннем сілы, якая ўстанаўлівае рух, нахілена да пачатку кардынат і прапарцыянальна адлегласці рухаючага пункта ад пачатку. Наваколле, у якім адбываецца рух, аказвае руху пункта супраціўленне, прапарцыянальнае хуткасці руху. Знайсці закон руху.

Пытанні для самакантролю

1. Сярод дадзеных дыферэнцыяльных ураўненняў указаць лінейныя аднародныя дыферэнцыяльныя ўраўненні другога парадку з нязменнымі каэфіцыентамі:

1) $y'' = x$;

2) $y'' - xy' + y = 0$;

3) $y'' - 5y = 0$;

4) $y'' + y^2 = 0$;

5) $y'' - y' + 3y = x^2$;

6) $3y'' + 5y' - 6y = 0$;

7) $(y'')^2 + 2y' + 3y = 0$;

8) $y''' - 3y' + 4 = 0$.

2. Праверыць, ці з'яўляюцца дадзеныя функцыі рашэннямі дадзеных ураўненняў:

1) $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} \quad y'' + 2y' + 2y = 0$;

2) $y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x) \quad y'' - 2y' + 2 = 0$;

3) $y = (C_1 + C_2 x) e^{-2x} \quad y'' + 6y' + 9y = 0$.

3. Саставіць лінейнае аднароднае дыферэнцыяльнае ўраўненне другога парадку з нязменнымі каэфіцыентамі ў наступных выпадках:

1) характарыстычнае ўраўненне мае выгляд:

а) $k^2 + 3k + 2 = 0$;

б) $k^2 - 1 = 0$;

в) $k^2 + 4 = 0$;

г) $2k^2 - 3k - 5 = 0$;

2) калі вядомы карані яго характарыстычнага ўраўнення:

а) $k_1 = 4$, $k_2 = -2$;

б) $k_1 = k_2 = -5$;

в) $k_1 = 5$, $k_2 = -\frac{1}{5}$;

г) $k_{1,2} = 5 \pm 2i$;

3) яго рашэнні маюць выгляд:

а) $y = (C_1 + C_2 x)e^{-3x}$;

б) $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$;

в) $y = e^x (C_1 \cos x - C_2 \sin x)$;

г) $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$.

4. Даказаць, што рашэнні дыферэнцыяльнага ўраўнення $y'' + \omega^2 y = 0$ можна запісаць у наступным выглядзе: $y = A \cos(\omega t + \varphi)$, дзе A і φ — адвольныя нязменныя.

5. Ці можа дыферэнцыяльнае ўраўненне другога парадку мець:

а) другую вытворную функцыі;

б) першую вытворную;

в) шукаемую функцыю;

г) незалежную зменную ў яўным выглядзе?

6. Вядома, што $y = e^x$ і $y = 2e^x$ з'яўляюцца рашэннямі дыферэнцыяльнага ўраўнення $y'' - py' + y = 0$. Ці можна сцвярджаць, што $y = C_1 e^x + 2C_2 e^x$ — мноства ўсіх рашэнняў дадзенага ўраўнення.

7. Паказаць, ці можа мноства ўсіх рашэнняў дыферэнцыяльнага ўраўнення $y'' + \omega^2 y = 0$ мець выгляд:

а) $y = C (\cos \omega x + \sin \omega x)$;

б) $y = C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{-\omega x}$;

в) $y = A \cos(\omega t + \varphi)$;

г) $y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$.

8. Якім дыферэнцыяльным ўраўненнем апісваецца рух цела па закону:

а) $x = C_1 \cos \omega t$;

б) $x = A \cos(\omega t + \alpha)$.

9. Пры якіх значэннях b усі рашэнні дыферэнцыяльнага ўраўнення $y'' + by' + 4y = 0$:

а) імкнуцца да нуля, калі x неабмяжавана ўзрыстае;

б) з'яўляюцца перыядычнымі функцыямі.

10. Які фізічны сэнс маюць нязменныя A і φ у рашэнні $x = A \cos(\omega t + \varphi)$ ўраўнення $x'' + \omega^2 x = 0$.

2.3.2. Лінійныя неаднародныя дыферэнцыяльныя ўраўненні вышэйшых парадкаў

Тэарэтычныя пытанні

1. Даць азначэнне лінейных неаднародных дыферэнцыяльных ўраўненняў вышэйшых парадкаў.
2. Даць азначэнне лінейнага неаднароднага дыферэнцыяльнага ўраўнення другога парадку з нязменнымі каэфіцыентамі.
3. Сфармуляваць тэарэму аб структуры агульнага рашэння лінейнага неаднароднага дыферэнцыяльнага ўраўнення другога парадку.
4. Метад падбору частковых рашэнняў і выпадкі яго ўжывання.
5. Метад варыяцый адвольных пастаянных і выпадкі яго ўжывання.

Заданні для аўдыторнай работы

А

44. Знайсці агульнае або частковае рашэнне лінейнага неаднароднага дыферэнцыяльнага ўраўнення другога парадку з нязменнымі каэфіцыентамі метадам падбору частковых рашэнняў:

- 1) $y'' - 2y' + 2y = 6x^2 + 14x + 6$; 2) $y'' + 2y' + y = 4x^2 - 3x - 5$;
- 3) $y'' + y = 3x^2 - 7x + 9$ 4) $2y'' + y' - y = 2e^x$;
- 5) $2y'' + 5y' = 2,5e^{-x}$; 6) $y'' - 4y' + 5y = 2\cos x + 6\sin x$;
- 7) $y'' + 2y' = 36\cos x$; 8) $y'' + y = -\sin 2x, y(\pi) = 1, y'(\pi) = 1$;
- 9) $4y'' + 16y' + 15y = 4e^{\frac{3}{2}x}, y(0) = 3, y'(0) = -5,5$.

45. Знайсці агульны выгляд частковых рашэнняў:

- 1) $y'' - 2y' + y = f(x)$:
 - а) $f(x) = 7xe^x$; б) $f(x) = 3\sin x$;
 - в) $f(x) = (3x + 2)e^{-x}$; г) $f(x) = 3x^2 + 4$.
- 2) $2y'' + y' - 3y = f(x)$:
 - а) $f(x) = 5xe^x$; б) $f(x) = 7x^3 - 4$;
 - в) $f(x) = 2\sin 3x$; г) $f(x) = 6(x + 1)^2$.
- 3) $y'' + 4y' + 4y = f(x)$:
 - а) $f(x) = xe^{-2x}$; б) $f(x) = \sin 2x$;
 - в) $f(x) = 5x^2 - 6$; г) $f(x) = x + 4$.

$$4) 2y'' - 3y' - 5y = f(x):$$

$$a) f(x) = 4e^{\frac{5}{2}x};$$

$$б) f(x) = 6xe^{6x};$$

$$в) f(x) = 6\sin\frac{5}{2}x - \cos\frac{5}{2}x;$$

$$г) f(x) = 3x^2 - 5.$$

Б

46. Знайдіть агульне або часткове рашэнне лінейных неаднародных дыферэнцыяльных ураўненняў метадам падбору частковых рашэнняў:

$$1) y'' + 4y' + 4y = xe^{2x};$$

$$2) y'' + 2y' = 4e^x (\sin x + \cos x);$$

$$3) y''' + y' = 1 + \cos x;$$

$$4) y'' - 3y' + 2y = x - e^{-2x} + 1;$$

$$5) y'' - 3y' + 2y = 3x + 5\sin 2x;$$

$$6) y''' + y'' = 6x + e^{-x};$$

$$7) y''' - 2y'' + y' = x^2 + e^x;$$

$$8) y^{IV} + 2y''' + y'' = e^{-x} + x;$$

$$9) y'' + y' + y = (x + x^2)e^x;$$

$$10) y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3), y(0) = 2, y'(0) = 2;$$

$$11) y^{IV} - y = 8e^x, y(0) = 0, y'(0) = 2, y''(0) = 4, y'''(0) = 6.$$

47. Знайдіть агульне рашэнне лінейных неаднародных дыферэнцыяльных ураўненняў другога парадку з нязменнымі каэфіцыентамі метадам варыяцый адвольных пастаянных:

$$1) y'' + y = \frac{1}{\sqrt{\cos 2x}};$$

$$2) y'' + 4y = \operatorname{ctg} 2x;$$

$$3) y'' + 5y' + 6y = \frac{1}{1 + e^{2x}};$$

$$4) y'' + \frac{1}{4}y = \frac{1}{\cos \frac{x}{2}};$$

$$5) y'' + y + \operatorname{ctg}^2 x = 0;$$

$$6) y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{1 + x^2}.$$

Заданні для самастойнай работы

А

48. Знайдіть агульне або часткове рашэнне лінейнага неаднароднага дыферэнцыяльнага ўраўнення другога парадку з нязменнымі каэфіцыентамі метадам падбору частковых рашэнняў:

$$1) y'' - 3y' = 18x^2 - 2;$$

$$2) y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x};$$

$$3) y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \sin 2x;$$

$$4) y'' + 4y' + 4y = xe^{2x};$$

- 5) $y'' - y' + y = x^3 + 6$; 6) $5y'' - 6y' + 5y = 5e^{\frac{3}{5}x}$;
 7) $y'' + 2y' = 4e^x(\sin x + \cos x)$;
 8) $y'' - 2y' + 10y = 10x^2 + 18x + 6$, $y(0)=1$, $y'(0)=3,2$;
 9) $y'' - y' = 2(1-x)$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$.

49. Знайдіть агульний вигляд часткових рашэнняў:

- 1) $y'' + 3y' + 2y = f(x)$
 а) $f(x) = 6e^{-2x}(x+4)$; б) $f(x) = 9\cos x$;
 в) $f(x) = 3x^2 + 5$; г) $f(x) = (x+1)e^{-x}$.
 2) $y'' + 5y' - 6y = f(x)$
 а) $f(x) = 3e^x(x+2)$; б) $f(x) = \cos x + 3\sin x$;
 в) $f(x) = e^{-6x}x^2$; г) $f(x) = 5x^2 - 4x + 1$.
 3) $y'' + 6y' + 9y = f(x)$
 а) $f(x) = e^{-3x}(5x+6)$; б) $f(x) = -2\cos 3x + \sin 3x$;
 в) $f(x) = e^{3x}\cos 3x$; г) $f(x) = 6e^{-3x}$.
 4) $y'' - 2y' - 4y = f(x)$
 а) $f(x) = 3xe^{(1+\sqrt{5})x}$; б) $f(x) = 4\cos 5x$;
 в) $f(x) = x^2 + 4x - 3$; г) $f(x) = 6e^{(1-\sqrt{5})x}$.

Б

50. Знайдіть агульнае або частковае рашэнне лінейных неаднародных дыферэнцыяльных ураўненняў метадам падбору частковых рашэнняў:

- 1) $y'' - 4y' + 4y = 2(\sin 2x + x)$; 2) $y''' + y'' = xe^{2x} + x^2$
 3) $2y'' + 5y' = 0,1e^{-2,5x} - 25\sin 2,5x$; 4) $y'' + 4y' + 4y = 8(x^2 + e^{2x} + \sin 2x)$;
 5) $4y'' + 16y' + 15y = 4e^{\frac{3}{2}x}$, $y(0)=3$;
 6) $y''' - y = 2x$, $y(0)=y'(0)=0$, $y''(0)=2$;
 7) $y''' - 3y' = 3(2 - x^2)$, $y(0)=y'(0)=y''(0)=1$;
 8) $y^{IV} - 2y'' + y = 8(e^x + e^{-x}) + 4(\sin x + \cos x)$;
 9) $y' + y''' = x^2 - 1$.

51. Знайдіть агульнае рашэнне лінейных неаднародных дыферэнцыяльных ураўненняў другога парадку з нязменнымі каэфіцыентамі метадам варыяцый адвольных пастаянных:

$$1) y'' - y' = \frac{e^x}{1 + e^x};$$

$$2) y'' - y' = e^{2x} \sqrt{1 - e^{2x}};$$

$$3) y'' - y' = e^{2x} \operatorname{cose}^x;$$

$$4) y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x};$$

$$5) y'' + 4y = 2 \operatorname{tg} x;$$

$$6) y'' + y' = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

2.4. Системы дифференциальных уравненияў

Тэарэтычныя пытанні

1. Даць азначэнне і напісаць агульны выгляд нармальнай сістэмы n дыферэнцыяльных ураўненняў першага парадку з невядомымі функцыямі $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$.

2. Даць азначэнне парадку сістэмы n дыферэнцыяльных ураўненняў.

3. Сфармуляваць задачу Кашы для сістэмы дыферэнцыяльных ураўненняў першага парадку.

4. Сфармуляваць тэарэму аб існаванні і аднолькавасці рашэння задачы Кашы.

5. Даць азначэнне агульнага рашэння сістэмы n дыферэнцыяльных ураўненняў першага парадку.

6. Даць азначэнне частковага рашэння сістэмы n дыферэнцыяльных ураўненняў першага парадку.

7. Даць азначэнне і напісаць агульны выгляд сістэмы лінейных дыферэнцыяльных ураўненняў.

8. Даць азначэнне аднароднай сістэмы лінейных дыферэнцыяльных ураўненняў.

9. Даць азначэнне неаднароднай сістэмы лінейных дыферэнцыяльных ураўненняў.

10. Метад звязвання сістэмы да аднаго ураўнення.

Заданні для аўдыторнай работы

A

52. Знайсці агульнае або частковае рашэнне сістэм лінейных дыферэнцыяльных ураўненняў з нязменнымі каэфіцыентамі:

$$1) \begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3x + 4y \end{cases};$$

$$3) \begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = -6x - 3y \end{cases};$$

$$5) \begin{cases} x' = y + 2e^t \\ y' = x + t^2 \end{cases};$$

$$7) \begin{cases} x' = y - 5\cos t \\ y' = 2x + y \end{cases};$$

$$9) \begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = y - 2x + 18t \end{cases};$$

$$2) \begin{cases} x' = x - y \\ y' = -4x + y \end{cases};$$

$$4) \begin{cases} x' = 6x - y \\ y' = 3x + 2y \end{cases};$$

$$6) \begin{cases} x' = 3x - 4y + e^{-2t} \\ y' = x - 2y - 3e^{-2t} \end{cases};$$

$$8) \begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = 2y - x + 5e^t \sin t \end{cases};$$

$$10) \begin{cases} x' = 2y - x \\ y' = 4y - 3x + e^{3t} \end{cases};$$

Б

53. Знайдіть агульне рішення систем лінійних диференціальних рівнянь з нязменними коефіцієнтами:

$$1) \begin{cases} x' = 2y \\ y' = 2z \\ z' = 2x \end{cases};$$

$$2) \begin{cases} x' = x + y + 3z \\ y' = x + 5y + z \\ z' = 3x + y + z \end{cases};$$

$$3) \begin{cases} x' = 3x - y + z \\ y' = -x + 5y - z \\ z' = x - y + 3z \end{cases};$$

$$4) \begin{cases} x' = y + z \\ y' = x + y - z \\ z' = y + z \end{cases};$$

54. Знайдіть рішення системи однородних диференціальних рівнянь, яка з'являється математичної моделлю замкнутої виробничої системи у разі розриву двох галів, калі матриці прямих матеріальних затрат A і коефіцієнта капіталаємкості приросту виробництва B мають вигляд

$$A = \begin{bmatrix} 0,18 & 0,29 \\ 0,29 & 0,38 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0,48 & 0,48 \\ 1,01 & 0,83 \end{bmatrix} \text{ при початкових умовах}$$

$$X(0) = \begin{bmatrix} 50 \\ 60 \end{bmatrix}.$$

Задання для самостійної роботи

А

55. Знайдіть агульне або часткове рішення систем лінійних диференціальних рівнянь з нязменними коефіцієнтами:

$$1) \begin{cases} x' = 4x - y \\ y' = -x + 4y \end{cases};$$

$$3) \begin{cases} x' = x + 4y \\ y' = 2x + 3y \end{cases};$$

$$5) \begin{cases} y' = -5y + 2z + 40e^t \\ z' = y - 6z + 9e^{-t} \end{cases};$$

$$7) \begin{cases} y' = y + z \\ z' = -10y - z + t \end{cases};$$

$$9) \begin{cases} x' = 7x - 5y + t^2 \\ y' = 10x - 7y - 3t \end{cases};$$

$$11) \begin{cases} x' = y + t \\ y' = x + e^t \end{cases}, x(0)=1, y(0)=0.$$

$$2) \begin{cases} x' = 7x + 3y \\ y' = x + 5y \end{cases};$$

$$4) \begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 2x + 8y \end{cases};$$

$$6) \begin{cases} x' = 2y - x + 1 \\ y' = 3y - 2x \end{cases};$$

$$8) \begin{cases} x' = 4x - 3y + \sin t \\ y' = 2x - y - 2\cos t \end{cases};$$

$$10) \begin{cases} x' = 10x - 9y + \cos t \\ y' = 11x - 10y - \sin t \end{cases};$$

Б

56. Знайсці агульнае рашэнне сістэм лінейных дыферэнцыяльных ураўненняў з нязменнымі каэфіцыентамі:

$$1) \begin{cases} x' = 3x - y + z \\ y' = x + y + z \\ z' = 4x - y + z \end{cases};$$

$$2) \begin{cases} x' = 4y - 2z - 3x \\ y' = z + x \\ z' = 6x - 6y + 5z \end{cases};$$

57. Знайсці рашэнне сістэмы аднародных дыферэнцыяльных ураўненняў, якая з'яўляецца матэматычнай мадэллю замкнутай вытворчай сістэмы ў разрэзе дзвюх галін, калі матрыцы прамых матэрыяльных затрат A і каэфіцыентаў капіталаёмкасці прыросту вытворчасці B маюць выгляд

$$A = \begin{bmatrix} 0,25 & 0,30 \\ 0,30 & 0,35 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,6 \\ 0,9 & 0,8 \end{bmatrix} \text{ пры пачатковых умовах } X(0) = \begin{bmatrix} 70 \\ 80 \end{bmatrix}.$$

Рашэнне тыпавых задач

Задача 1. Знайсці рашэнне сістэмы аднародных дыферэнцыяльных ураўненняў, якая з'яўляецца матэматычнай мадэллю замкнутай вытворчай сістэмы ў разрэзе дзвюх галін, калі матрыцы прамых матэрыяльных затрат A і каэфіцыентаў капіталаёмкасці прыросту вытворчасці B маюць выгляд

$$A = \begin{bmatrix} 0,21 & 0,32 \\ 0,32 & 0,45 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0,52 & 0,52 \\ 1,00 & 0,83 \end{bmatrix} \text{ пры пачатковых умовах}$$

$$X(0) = \begin{bmatrix} 60 \\ 60 \end{bmatrix}.$$

Рашэнне. Для атрымання сістэмы аднародных дыферэнцыяльных ураўненняў, палічым матрыцы $(E - A)$, B^{-1} і іх здабытак $(E - A)B^{-1}$:

$$(E - A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,21 & 0,32 \\ 0,32 & 0,45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,79 & -0,32 \\ -0,32 & 0,55 \end{pmatrix};$$

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{21} \\ B_{12} & B_{22} \end{pmatrix} = -\frac{1}{0,0884} \begin{pmatrix} 0,83 & -0,52 \\ -1,00 & 0,52 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9,39 & 5,88 \\ 11,31 & -5,88 \end{pmatrix};$$

$$(E - A)B^{-1} = \begin{pmatrix} 0,79 & -0,32 \\ -0,32 & 0,55 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9,39 & 5,88 \\ 11,31 & -5,88 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11,04 & 6,53 \\ 9,23 & -5,12 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Саставім сістэму: } \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -11,04x_1 + 6,53x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = 9,23x_1 - 5,12x_2 \end{cases}$$

Знойдзем яе рашэнне метадам звязвання сістэмы да аднаго ўраўнення. Для гэтага прадыверэнцыруем першае з ураўненняў. Прымем да ўвагі выразы для $\frac{dx_1}{dt}$ і $\frac{dx_2}{dt}$, атрымаем

$$\begin{aligned} \frac{d^2x_1}{dt^2} &= -11,04 \frac{dx_1}{dt} + 6,53 \frac{dx_2}{dt} = -11,04(-11,04x_1 + 6,53x_2) + \\ &+ 6,53(9,23x_1 - 5,12x_2) = 182,15x_1 - 105,52x_2. \end{aligned}$$

$$\text{Атрымаем ураўненне } \frac{d^2x_1}{dt^2} = 182,15x_1 - 105,52x_2.$$

Падставім значэнне x_2 , знойдзенае з першага ўраўнення сістэмы: $x_2 = \frac{1}{6,53} \frac{dx_1}{dt} + \frac{11,04}{6,53} x_1$:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = 182,15x_1 - 105,52 \left(\frac{1}{6,53} \frac{dx_1}{dt} + \frac{11,04}{6,53} x_1 \right) = -16,16 \frac{dx_1}{dt} + 3,75x_1,$$

$$\text{або } \frac{d^2x_1}{dt^2} + 16,16 \frac{dx_1}{dt} - 3,75x_1 = 0.$$

Агульнае рашэнне гэтага ўраўнення атрымаем у выглядзе

$$x_1 = C_1 e^{0,23t} + C_2 e^{-16,39t}.$$

Так як $\frac{dx_1}{dt} = 0,23 C_1 e^{0,23t} - 16,39 C_2 e^{-16,39t}$, тады

$$x_2 = \frac{1}{6,53} (0,23 C_1 e^{0,23t} - 16,39 C_2 e^{-16,39t}) + \frac{11,04}{6,53} (C_1 e^{0,23t} + C_2 e^{-16,39t}) = \\ = 1,73 C_1 e^{0,23t} - 0,82 C_2 e^{-16,39t}.$$

Такім чынам, агульнае рашэнне сістэмы мае наступны выгляд

$$x_1 = C_1 e^{0,23t} + C_2 e^{-16,39t}, \quad x_2 = 1,73 C_1 e^{0,23t} - 0,82 C_2 e^{-16,39t}.$$

Знойдзем частковае рашэнне, якое здавальняе зададзеным пачатковым умовам. Няхай $t = 0$, тады

$$x_1(0) = C_1 + C_2 = 60; \quad x_2(0) = 1,73 C_1 - 0,82 C_2 = 60;$$

$$\text{або } \begin{cases} C_1 + C_2 = 60 \\ 1,73 C_1 - 0,82 C_2 = 60 \end{cases}, \quad \text{адкуль } \begin{cases} C_1 = 42,82 \\ C_2 = 17,18 \end{cases}.$$

Падставім значэнні адвольных пастаянных $C_1 = 42,82$ і $C_2 = 17,18$ у агульнае рашэнне і знойдзем частковае рашэнне:

$$x_1 = 42,82 e^{0,23t} + 17,18 e^{-16,39t},$$

$$x_2 = 74,08 e^{0,23t} - 14,09 e^{-16,39t}.$$

Выснова: Тэхналагічны тэмп прыросту нацыянальнага даходу роўны 0,23. Другі складальнік у частковым рашэнні вельмі хутка імкнецца да нуля. Рашэнне гэтай сістэмы характарызуе тэхналагічныя магчымасці развіцця вытворчасці пры зададзеных A і B , калі ўсе рэсурсы нацыянальнага даходу напраўлены на пашырэнне вытворчасці.

Задача 2. Рашыць неаднародную сістэму:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x - 3y + 2e^{3t} \\ \frac{dy}{dt} = x + y + 5e^{-t} \end{cases}, \quad \text{або } \begin{cases} x' = 5x - 3y + 2e^{3t} \\ y' = x + y + 5e^{-t} \end{cases}.$$

Рашэнне. Гэта неаднародная сістэма ўраўненняў, паколькі $f_1(t) = 2e^{3t}$, $f_2(t) = 5e^{-t}$. Прывядзем яе да неаднароднага лінейнага ўраўнення другога парадку з нязменнымі каэфіцыентамі. Для гэтага прадыверэнтцыруем першае ўраўненне па t і падставім выраз для y' з другога ўраўнення сістэмы:

$$x'' = 5x' - 3y' + 6e^{3t}, \text{ або } x'' - 5x' + 3x + 3y = 6e^{3t} - 15e^{-t}.$$

З першага ўраўнення зададзенай сістэмы выразім y :

$$y = \frac{1}{3}(5x - x' + 2e^{3t}).$$

Гэты выраз падставім у апошняе ўраўненне, атрымаем дыферэнцыяльнае ўраўненне другога парадку з нязменнымі каэфіцыентамі

$$x'' - 5x' + 3x + 5x - x' + 2e^{3t} = 6e^{3t} - 15e^{-t}, \text{ або}$$

$$x'' - 6x' + 8x = 4e^{3t} - 15e^{-t}.$$

Агульнае рашэнне гэтага ўраўнення знойдзем па формуле

$$x = x + x_*,$$

дзе x — агульнае рашэнне аднароднага дыферэнцыяльнага ўраўнення; x_* — частковае рашэнне неаднароднага дыферэнцыяльнага ўраўнення.

Аднароднае дыферэнцыяльнае ўраўненне мае выгляд $x'' - 6x' + 8x = 0$. Яго характарыстычнае ўраўненне $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$ будзе мець карані $\lambda_1 = 2$ і $\lambda_2 = 4$.

Тады атрымаем, што агульнае рашэнне аднароднага дыферэнцыяльнага ўраўнення мае выгляд

$$\bar{x} = C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t}.$$

Частковае рашэнне неаднароднага дыферэнцыяльнага ўраўнення x_* запішам як $x_* = Ae^{3t} + Be^{-t}$. Знойдзем яго вытворныя x'_* і x''_* :

$$x'_* = 3Ae^{3t} - Be^{-t};$$

$$x''_* = 9Ae^{3t} + Be^{-t}.$$

Падставім x_* і яго вытворныя x'_* і x''_* у агульны выгляд ураўнення замест x, x', x'' :

$$9Ae^{3t} + Be^{-t} - 18Ae^{3t} + 6Be^{-t} + 8Ae^{3t} + 8Be^{-t} = 4e^{3t} - 15e^{-t}$$

Прыраўнуем каэфіцыенты пры аднолькавых функцыях, атрымаем сістэму ўраўненняў

$$\begin{cases} 9A - 18A + 8A = 4 \\ B + 6B + 8B = -15 \end{cases}$$

рашыўшы якую, знойдзем, што $A = -4, B = -1$. Тады $x_* = -4e^{3t} - e^{-t}$, а агульнае рашэнне ўраўнення: $x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t} - 4e^{3t} - e^{-t}$.

Так як $x' = 2C_1 e^{2t} + 4C_2 e^{4t} - 12e^{3t} + e^{-t}$, то знойдзем значэнне y :

$$y = \frac{1}{3}(5C_1 e^{2t} + 5C_2 e^{4t} - 20e^{3t} - 5e^{-t} - 2C_1 e^{2t} - 4C_2 e^{4t} + 12e^{3t} - e^{-t} + 2e^{3t}) = \\ = \frac{1}{3}(3C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t} - 8e^{3t} - 6e^{-t} + 2e^{3t}) = \frac{1}{3}(3C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t} - 6e^{3t} - 6e^{-t}),$$

$$\text{або } y = C_1 e^{2t} + \frac{1}{3}C_2 e^{4t} - 2e^{3t} - 2e^{-t}.$$

Такім чином, агульнае рашэнне зададзенай сістэмы будзе мець выгляд

$$\begin{cases} x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t} - 4e^{3t} - e^{-t} \\ y = C_1 e^{2t} + \frac{1}{3}C_2 e^{4t} - 2e^{3t} - 2e^{-t} \end{cases}$$

Адказ: агульнае рашэнне сістэмы

$$\begin{cases} x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t} - 4e^{3t} - e^{-t} \\ y = C_1 e^{2t} + \frac{1}{3}C_2 e^{4t} - 2e^{3t} - 2e^{-t} \end{cases}$$

АДКАЗЫ

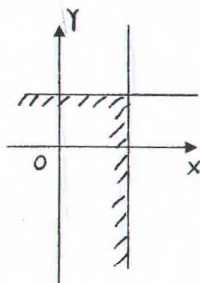
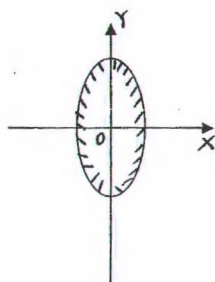
Глава 1

1. $S = \sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}$; $D: 0 < x < p; 0 < y < p; x+y > p$; $E: 0 < S < (p^2\sqrt{3})/9$; 2. 1) $x^2 + y^2 > 25$; 2) $y \geq -2$; $-1 \leq x \leq 1$; 3) $x > 0$; $y > 0$; $z > 0$; 4) $x^2 + y^2 + z^2 < 9$. 4. $z(0;0)=0$; $z(-1;1)=2$; $z(1;y)=1+y^2$. 5. $x^2 + y^2 + 4x = c$; $x^2 + y^2 + 4x = 0$; $x^2 + y^2 + 4x = 5$. 6. $y = c(x^2 + 1)$; $y = x^2 + 1$; $y = -2x^2 - 2$. 7. $x^2 + y^2 + 4z^2 = c$; $x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$. 8. 1) -18 ; 2) -16 ; 3) 0 ; 4) e^4 . 9. $(-2; 1)$. 10. 1) лінії раз-рыву $y = x$, $y = -x$; 2) паверхня разрыву $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

$$11. \begin{cases} x > 0 \\ y > 1+x \\ x < 0 \\ x < y < x+1 \end{cases}$$

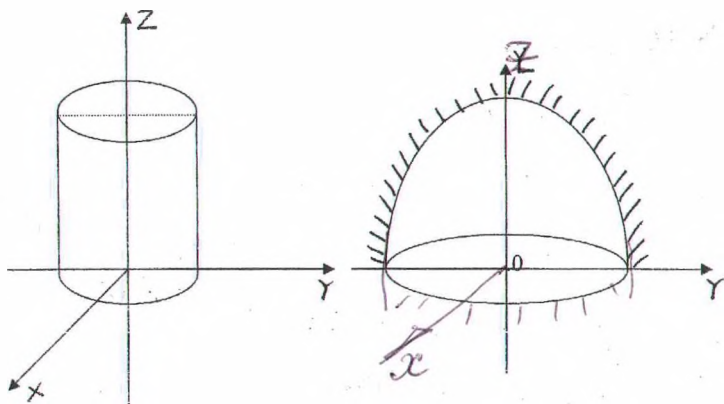
$$14. 1) \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} \leq 1;$$

$$2) \begin{cases} y \leq 1 \\ x \leq 1 \end{cases}$$



$$3) \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 3 \end{cases}$$

$$4) z > 4 - x^2 - y^2.$$



15. $x^2 + y = C$; $y = 4 - x^2$; $y = 2 - x^2$. 16. $x + y + z = 4$. 17. 1) 2; 2) 1;
 3) 0; 4) ∞ . 18. 1) лінія розриву $y = x^2$; 2) поверхні розриву $x = 0$,
 $y = 0$, $z = 0$. 20. 1) $x^2 + y^2 = C$ ($C = \text{const}$); 2) $y = x^2 \ln C + C$ ($C > 0$).
 21. 1) непарнуна; 2) парнуна. 23. $z = x\sqrt{y-1} + x^2\sqrt{1-y}$. 24. Не.

26. 1) так; 2) не. 27. 1) $z'_x = 2xy - y^2 + 4$; $z'_y = x^2 - 2xy$;

2) $z'_x = (3x^2 + x^3 y^2) e^{xy^2}$; $z'_y = 2x^4 y e^{xy^2}$; 3) $z'_x = 2xy \cos(x^2 - y^3)$;

$z'_y = \sin(x^2 - y^3) - 3y^3 \cos(x^2 - y^3)$; 4) $z'_x = \frac{2y \operatorname{tg}(xy + 4)}{\cos^2(xy + 4)}$;

$z'_y = \frac{2x \operatorname{tg}(xy + 4)}{\cos^2(xy + 4)}$. 28. 1) $u'_x = 2y$; $u'_y = 2x + 3z$; $u'_z = 3y + 3z^2$;

2) $u'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 3y^2 + 4z^2}}$; $u'_y = \frac{-3y}{\sqrt{x^2 - 3y^2 + 4z^2}}$; $u'_z = \frac{4z}{\sqrt{x^2 - 3y^2 + 4z^2}}$;

3) $u'_x = \frac{y}{z^2 + xy}$; $u'_y = \frac{x}{z^2 + xy}$; $u'_z = \frac{2z}{z^2 + xy}$; 4) $u'_x = -\frac{z}{x} \left(\frac{y}{x} \right)^z$;

$u'_y = \frac{z}{x} \left(\frac{y}{x} \right)^{z-1}$; $u'_z = \left(\frac{y}{x} \right)^z \ln \frac{y}{x}$. 29. $z'_x = 4$; $z'_y = -26$. 30. $dz = 0,4$;

$\Delta z = 0,438$. 31. 1) $dz = -\sin(x - y^2)(dx - 2ydy)$; 2) $dz = \frac{dx + 3y^2 dy}{x + y^3}$.

$$\begin{aligned}
& 32. \frac{2dx + dy}{\cos^2 2} . 33. 5,022. 34. z'_x = -\ln v \frac{y}{x^2} + \frac{u}{v} 2x = \\
& = -\frac{y}{x^2} \ln(x^2 + y^2) + \frac{2y}{x^2 + y^2}; z'_y = \ln v \frac{1}{x} + \frac{u}{v} 2y = \\
& = \frac{1}{x} \ln(x^2 + y^2) + \frac{2y^2}{x(x^2 + y^2)}. 35. \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{e^x}{e^x + e^y}; \frac{dz}{dx} = \frac{e^x \sqrt{x^2 + 1} + x e^y}{(e^x + e^y) \sqrt{x^2 + 1}}. \\
& 36. \frac{dz}{dt} = \frac{0,5 \ln t + 1}{\sqrt{t(1 + t \ln^2 t)}}. 37. z'_x = -\frac{y^2 + 2xz^3}{2z + 3x^2 z^2}; z'_y = -\frac{2xy}{2z + 3x^2 z^2}. \\
& 38. z'_x = 1; z'_y = 2. 41. f'_x = 2e^5 - e; f'_y = 4e^5. \\
& 43. du = (xy)^{z-1} (yz dx + xz dy + xy \ln(xy) dz). \\
& 44. dz = (2xy^4 - y \sin 2xy) dx + (4x^2 y^3 - x \sin 2xy) dy. \\
& 45. d^2 z = e^{2y} (-9 \cos 3x dx^2 - 12 \sin 3x dx dy + 4 \cos 3x dy^2). \\
& 46. 1) z'_x = 4x^3 + 2xy^2; z'_y = 2x^2 y + 4y^3; 2) z'_x = -\frac{1}{y} \sin \frac{2x}{y}; \\
& z'_y = \frac{x}{y^2} \sin \frac{2x}{y}; 3) z'_x = 5^{x-2y} \ln 5; z'_y = -2 \ln 5 \cdot 5^{x-2y}; 4) z'_x = \frac{y^2}{\sqrt{1-x^2} y^4}; \\
& z'_y = \frac{2xy}{\sqrt{1-x^2} y^4}. 47. 1) u'_x = \frac{2x}{x^2 + y^2 + z^2}; u'_y = \frac{2y}{x^2 + y^2 + z^2}; \\
& u'_z = \frac{2z}{x^2 + y^2 + z^2}; 2) u'_x = 2x + yz 2^{yz} \ln 2; u'_y = xz 2^{yz} \ln 2; \\
& u'_z = xy 2^{yz} \ln 2; 3) u'_i = c_i, i = 1, 2, \dots, n. 48. z'_x = \frac{3}{37}; z'_y = \frac{2}{37}. \\
& 49. dz = -0,02; \Delta z = -0,0203. \\
& 50. dz = (y^2 + \sin 2(x-y)) dx + (2xy \sin 2(x-y)) dy. \\
& 51. dz = 16 \ln 2 (2dx + dy). 52. 3,048. 3.0048 \\
& 53. \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2u}{u^2 - v^2} y^2 - \frac{2v}{u^2 - v^2} \frac{1}{\cos^2(x-y)}, \text{ где } u = xy^2, v = \operatorname{tg}(x-y); \\
& \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{4u}{u^2 - v^2} xy + \frac{2v}{u^2 - v^2} \frac{1}{\cos^2(x-y)}. 54. \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}}; \\
& \frac{dz}{dx} = \frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2y} e^{\sqrt{x}} \right).
\end{aligned}$$

$$55. \frac{dz}{dt} = \cos(t^3 + t \ln t)(3t^2 + 2t \ln t + 2t \ln^2 t). \quad 56. \quad 1) \quad z'_x = \frac{\sin(y^2 - x)}{2z};$$

$$z'_y = \frac{y \sin(x - y^2)}{z}; \quad 2) \quad z'_x = \frac{yz - x^2}{z^2 - xy}; \quad z'_y = \frac{2 + 3xz - 6y^2}{3z^2 - 3xy}. \quad 59. \quad f'_x = 5;$$

$$f'_y = 7. \quad 60. \quad dz = 2e^{-2}(dx - dy). \quad 61. \quad 7 \text{ см.} \quad 69. \quad 1) \quad 4x + 4y + z - 11 = 0;$$

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+1}{1}; \quad 2) \quad x + 11y + \sqrt{z} - 13 = 0; \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{11} = \frac{z+1}{+5}$$

$$71. \frac{7\sqrt{2}}{2}. \quad 72. \quad \text{grad } z = \{8; 5\}; \quad |\text{grad } z| = \sqrt{89}. \quad 73. \frac{4\sqrt{2}}{7}. \quad 74. -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$75. \quad 1) \quad \text{grad } u = \{6; 0\}; \quad 2) \quad \text{grad } u = \left\{-\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right\}. \quad 76. \quad \left\{\frac{2}{\sqrt{17}}; \frac{3}{\sqrt{17}}; -\frac{2}{\sqrt{17}}\right\}.$$

$$77. \quad E_x^z = \frac{abx^a}{bx^a + ay^b}; \quad E_y^z = \frac{aby^b}{bx^a + ay^b}. \quad 79. \quad \cos \varphi = -0,16. \quad 80. \quad \frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$82. \quad 1) \quad z = 2; \quad \frac{x}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z-2}{-1}; \quad 2) \quad 3x + 4y - 6z = 0; \quad \frac{x-4}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{-6}.$$

$$83. \quad \frac{81}{\sqrt{2}}. \quad 84. \quad \text{grad } z = \{45; 20\}; \quad |\text{grad } z| = 5\sqrt{29}. \quad 85. \quad x^2 + y^2 + z^2 = C^2;$$

$$\text{grad } v = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \quad 86. \quad E_x^z = \frac{ax}{(x-a_1)\ln(x-a_1)^a (y-b_1)^b};$$

$$E_y^z = \frac{by}{(y-b_1)\ln(x-a_1)^a (y-b_1)^b}. \quad 87. \quad \cos \varphi = -\frac{4}{\sqrt{41}}, \quad \varphi = \pi - \arccos \frac{4}{\sqrt{41}}$$

$$88. \quad 0,8\sqrt{5}. \quad 94. \quad \frac{y}{x} = 1 - (x-1) + (y-1) + (x-1)^2 - \frac{1}{2}(x-1)(y-1) + \dots$$

$$95. \quad 1) z_{\min}(5; 6) = -61; \quad 2) z_{\min}(-1; 0) = -2. \quad 96. \quad x = \sqrt{\frac{c_1}{b_1}}, \quad y = \sqrt{\frac{c_2}{b_2}}. \quad 97. \quad \text{Усе}$$

$$\text{каны роўныя 3.} \quad 98. \quad 1) \quad z_{\min}(1; 0) = 0; \quad z_{\max}\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27}; \quad 2) \quad z_{\min}(a; a) = \frac{2}{a};$$

$$z_{\max}(-a; -a) = -\frac{2}{a}. \quad 99. \quad 1) \quad \max_D z = z(1; 0) = 6; \quad \min_D z = z(0; 1) = 3;$$

$$2) \quad \max_D z = 1 \text{ на мяжы } x^2 + y^2 = 1, \quad x \in [0; 1]; \quad \min_D z = z(0; 0) = 1;$$

$$3) \quad \max_D z = z(2; -1) = 13; \quad \min_D z = z(0; -1) = z(1; 1) = -1.$$

100. $\max_D z = z\left(\frac{7}{4}; \frac{1}{4}\right) = \frac{9}{4}$; $\min_D z = z(0; 0) = 0$. 101. 0,9015. 102. Урау-

ненне визначає дві функції, перша з яких має максимум $z_{\max}(1; -2) = 8$, друга має мінімум $z_{\min}(1; -2) = -2$; абидві функції мають міжові екстремум $z = 3$ у пунктах акружності

$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$. 103. $(1, 6; 3, 2)$. 104. $u_{\min}\left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; 1\right) = -\frac{4}{3}$.

105. $u_{\max}(2; 4; 6) = 2 \cdot 4^2 \cdot 6^3$.

106. $e^{x+y} = 1 + (x-1) + (y+1) + \frac{1}{2}((x-1) + (y+1))^2 + \dots$

107. 1) $z_{\min}(-2; -2) = 0$; 2) $z_{\min}(3; 0) = -54$; $z_{\max}(-3; 0) = 54$.

108. $z_{\min}\left(-\frac{9}{5}; -\frac{4}{5}\right) = -5$; $z_{\max}\left(\frac{2}{5}; 1\right) = \sqrt{5}$. 109. $\frac{a}{3}; \frac{a}{3}; \frac{a}{3}$.

110. 1) $\max_D z = z(0; 0) = 5$; $\min_D z = z(0; 1) = 3$;

2) $\max z = z(2; 0) = z(-2; 0) = 4$; $\min z = z(0; 2) = z(0; -2) = -4$.

112. $\left(\frac{21}{13}; 2; \frac{63}{26}\right)$. 113. $u_{\min}(-1; 2; -2) = -9$; $u_{\max}(1; -2; 2) = 9$.

Глава 2

1. 1) $y = \frac{2C + x^2}{4}$; 2) $y = \arccos e^{Cx}$; 3) $y = C \sqrt{1 + e^{2x}}$;

4) $y = \pm \sqrt{C - \frac{(x-2)^2}{4}}$; 5) $2e^{-y}(y+1) = x^2 + 1$; 6) $2 \ln |\sin y| = e^{(x-1)^2} - 1$;

7) $2^x - 2^y = \frac{3}{32}$; 8) $2(x-2) = \ln^2 y$; 9) $(1 - \sqrt{1-x^2})(1 - \sqrt{1-y^2}) = Cx - y$;

10) $x^2 + y \sin y + \cos y = C$; 11) $2 \sin x + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{y}{2} \right| = C$;

12) $y = \ln \operatorname{tg} \left(e^x + \frac{\pi}{4} - 1 \right)$. 2. 1) $e^{-y}(y+1) = \ln \frac{1+e^x}{2} + 1 - x$;

$$2) y = \pm \sqrt{x - \frac{1}{x} + C}; 3) \frac{y}{1-y} = C(x+1); 4) C \operatorname{tg} \frac{y}{2} = e^{-2 \cos x}; 5) \frac{Cx}{y} = e^{\frac{xy}{xy}};$$

$$6) y = \frac{C \sqrt{1+x^2}}{x + \sqrt{1+x^2}}. 3. y = e^{21,6e^{0,125t}} - 20,6. 4. A_t = A_0 e^{-kt}. 5. xy = 6.$$

$$6. 1) y = Cx - 1; 2) \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = C; 3) y = \sqrt[3]{C+3x-3x^2};$$

$$4) Cx = \frac{y-1}{y}; 5) x+y = \ln |C(x+1)(y+1)|; 6) 2y^2 + 1 = C(3-x^2)^2;$$

$$7) e^t = C(1 - e^{-s}); 8) \sqrt{y} + \sqrt{x} = \ln C \sqrt{y}; 9) y = \frac{1+x}{1-x}; 10) y = e^{\operatorname{tg} \frac{x}{2}};$$

$$11) (1+x^2)(1+y^2) = Cx^2; 12) \sin y = C \cos x. 7. 1) e^x = C(1 - e^{-y});$$

$$2) \ln \left| \operatorname{tg} \frac{y}{4} \right| = C - 2 \sin \frac{x}{2}; 3) \operatorname{tg} y = C(e^x - 1)^3; 4) y = \frac{a+x}{1+ax}.$$

$$8. y = e^{11,905e^{0,216t}} - 10,905. 9. \ln \left| \frac{Q-Q_1}{Q_0-Q_1} \right| = \frac{k_0}{2} (2t - 2t^2). 10. p = 20 + e^{\frac{t}{11}}.$$

$$11. 1) y = x e^{Cx+1}; 2) y^3 = y^2 - x^2; 3) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln \frac{C}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$4) y(\ln |x| + C) = 4x; 5) x^2 = C^2 + 2Cy; 6) y - x = C e^{x-y};$$

$$7) y - x = C e^{\frac{x}{y-x}}; 8) \sin \frac{y}{x} = x; 9) \frac{y}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln C \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$10) \sqrt{\frac{y}{x}} + \ln |x| = C. 12. 1) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \ln(x^2 + y^2) = \frac{\pi}{4} + \ln 2; 2) \frac{x}{y} = -\ln Cx;$$

$$3) \ln(Cy - x) = \frac{x}{y-x}; 4) x^2 + y^2 = Cx^3; 5) \sin \frac{y}{x} = \ln \frac{C}{x}; 6) e^{\frac{y}{x}} + \ln Cx = 0.$$

$$13. p_i = x_i e^{-x_i}. 14. x^2 = -8(y-2). 15. 1) \operatorname{arctg} \frac{0,5y}{x} - 2 \ln x = \frac{\pi}{4};$$

$$2) Cx = e^{\frac{\cos y}{x}}; 3) y = -x \ln |1 - \ln x|; 4) \ln x = \frac{y}{x} \left(\ln \frac{y}{x} - 1 \right) + C;$$

$$\begin{aligned}
& 5) 1 + \sin \frac{y}{x} = Cx \cos \frac{y}{x}; 6) x = Ce^{\frac{x^2}{2y^2}}; 7) x = C \operatorname{arctg} \frac{y}{x}; 8) y^2 = 5 \pm 2\sqrt{5x}; \\
& 9) y = -x. \quad 16. 1) \sin \frac{y}{x} + \ln|x| = 0; 2) 2x^2 + xy - Cy = 0; 3) y \sin \frac{x}{y} = C; \\
& 4) y = x \operatorname{tg}(\ln Cx). \quad 17. p_t = x_i e^{-2x}. \quad 18. x = Ce^{\pm 2\sqrt{y}}. \quad 19. y = \frac{1}{2}(1 - x^2). \\
& 20. 1) y = C \sin x - \cos x; 2) y = Ce^{-x} + x - 1; 3) y = Ce^{-x} + x - 1; \\
& 4) y = Cx^2 + x^3 - x; 5) y = C \ln x - x; 6) y = e^{-x^2} \left(C + \frac{x^2}{2} \right); \\
& 7) y = Ce^{-2x} + \frac{1}{5}e^{3x}; 8) y = (\ln x + C) \ln|\ln x|; 9) y = -\frac{1}{3}(2e^{2x} + e^{-x}); \\
& 10) y = 2x^2 - x. \quad 21. 1) x = \frac{C + y^4}{y^5}; 2) x^2 = y \ln \frac{C}{y}; 3) y = \frac{C}{x^4} - \frac{x^2}{6}; \\
& 4) y = \frac{x \ln Ce^{x \cdot x}}{x + 1}; 5) x e^{-y} + y^2 = 5; 6) x = \frac{1}{4} \frac{\sin 2y - \frac{y}{2} \cos 2y + C}{\cos y}. \\
& 22. p = \frac{15}{4}t - \frac{13}{16} + Ce^{\frac{4}{3}t}. \quad 23. y = 4t + e^{4t} + 3. \\
& 24. 1) y = Ce^{-x} + \frac{\cos x + \sin x}{2}; 2) y = x^2 e^{6x}; 3) x = Cy + y^2; 4) y = \frac{x}{\cos x}; \\
& 5) y = Ce^{\frac{x^2}{2} - x^2 - 2}; 6) y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}; 7) y = Cx^4 - \frac{1}{x}; 8) y = \frac{C}{x^4} - \frac{x^2}{6}; \\
& 9) y = Cx^2 e^x + x^2. \quad 25. 1) y = \frac{x(e^{-x} + C)}{e^x}; 2) y^2 - 2x = Cy^2; \\
& \quad \frac{3x^2}{2} - 2x + C \\
& 3) y = \frac{2}{x - 1}; 4) x = -t \operatorname{arctg} t. \quad 26. y = 6t + e^{6t} + 5. \\
& 27. v = \frac{k_1}{k} \left(t - \frac{m}{k} + \frac{m}{k} e^{\frac{kt}{m}} \right). \quad 28. v = \frac{3}{2} mg \left(1 - e^{\frac{3t}{2m}} \right). \\
& 29. 1) y = \frac{1}{Cx + \ln x + 1}; 2) y = \frac{1}{x^2 + Cx}; 3) y = \frac{1}{Ce^{\frac{x^2}{2} - x^2 + 2}};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 4) y = e^{-x} (0.5e^x - 1)^2; 5) y = Ce^{-x} + 2x - 2; 6) y = \frac{1}{(x^3 + 1) \cos x}. \\
& 30. 1) y = x \sqrt{2(C - \frac{1}{x})}; 2) x = \sqrt{\frac{y}{C - \cos y}}; 3) x = \frac{1}{y(C - \ln^2 y)}; \\
& 4) x = \frac{1}{y(C + \ln y)}. \quad 31. 1) y = \frac{2e^{-x^2}}{\sqrt{2x^2 e^{-2x^2} + e^{-2x^2} + 4C}}; \\
& 2) y = \frac{1}{(x+1)} \cdot (C + \ln|1+x|); 3) y = \frac{1}{(x+C) \cos x}; 4) y = \frac{x^4}{4} \ln^2 |Cx|; \\
& 5) x = Cy^2 - \frac{1}{y}; 6) x = Cy^2 + \frac{y^4}{2}. \quad 32. 1) x = \frac{1}{\ln y + 1 - Cy}; \\
& 2) x = Cy - 1 - \ln y; 3) x = \frac{1}{\ln y + 1 - Cy}; 4) x = \frac{1}{y(y+C)}; 5) x^2 + y^2 = e^{-y}; \\
& 6) xy^2 = (\ln|\cos y| + y \operatorname{tg} y)^2. \quad 34. 1) y = \frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2; \\
& 2) y = \frac{x^4}{12} + \cos x + C_1 x + C_2; 3) y = \ln|\sin x| + C_1 x^2 + C_2 x + C_3; \\
& 4) y = \frac{1}{3} \sin^3 x + C_1 x + C_2; 5) y = e^{-x} - e^x + C_1 x + C_2; \\
& 6) C_1(x - y) = \ln|1 + C_1 x| + C_2; 7) y = (1 + C_1^2) \ln|x + C_1| - C_1 x + C_2; \\
& 8) y = C_1(x \ln x - x) + C_2. \quad 35. 1) y = \frac{(C_1 x - 1)}{C_1^2} e^{C_1 x + 1} + C_2; \\
& 2) y = \frac{2}{5} x^2 \sqrt{2x - \frac{16}{5}}; 3) y = \frac{1}{C_1^2} e^{C_1 x + 2} (C_1 x - 1) + C_2; 4) y = \sqrt{2x - x^2}; \\
& 5) y = 2 + \ln \frac{x^2}{4}; 6) y = -x; 7) y = \frac{4}{(x+4)^2}; 8) y - x = 2 \ln|y|. \\
& 36. 1) y = \frac{27}{280} (x-1)^{10/3} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2; 2) (x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = 1; \\
& 3) y = C_1 e^{3x} + C_2; 4) \sin(y + C_1) = C_2 e^x, y = C; 5) y = x^3 + 3x + 1; \\
& 6) y = \frac{1}{48} x^4 + \frac{1}{8} x^2 + \frac{1}{32} \cos 2x; 7) y = -(x+3)e^{-x} + \frac{3}{2} x^2 + 3. \\
& 37. 1) C_1(x - y) = \ln|1 + C_1 x|; 2) y = C_1 x^5 + C_2 x^3 + C_3 x^2 + C_4 x + C_5;
\end{aligned}$$

- 3) $x = C_1 y^2 + C_2 y + C_3$; 4) $y = -\sin x - C_1 \cos x + C_2 x + C_3$;
 5) $x = \frac{1}{C_1} \ln \frac{y}{x - C_1} + C_2$, $y = C$; 6) $y \cos^2(x + C_1) = C_2$; 7) $y = \frac{x + C_1}{x + C_2}$;
 8) $y = \frac{1}{3} x^3 + C_1 x^2 + C_2$; 9) $y = -\frac{1}{3} \sin^3 x + C_1 \left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \right) + C_2$;
 10) $y = (\arcsin x)^2 + C_1 \arcsin x + C_2$; 11) $|\sin(y + C_1)| = C_2 e^x$, $y = C$;
 12) $y = C_1 - 2x + C_2 e^{-x}$; 13) $y = \frac{1}{12}(x+1)^3 - x + C_2$, $y = -x + C$.
38. $y = -x^3 + 3x^2 - 2x + 5$. **39.** 1) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$;
 2) $y = C_1 e^{\sqrt{2}x} + C_2 e^{-\sqrt{2}x}$; 3) $y = C_1 + C_2 e^{-3x}$; 4) $y = e^x (C_1 + C_2 x)$;
 5) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$; 6) $y = 4e^{-5x} - 3e^{-2x}$;
 7) $y = e^{-3x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$; 8) $y = x e^{5x}$; 9) $y = -\frac{1}{3} e^x \cos 3x$.
40. 1) $y = C_1 + C_2 x + e^{2x} (C_3 + C_4 x)$;
 2) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x$;
 3) $y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x^2 e^x$; 4) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x} + C_3 e^{4x}$;
 5) $y = e^x - \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{3}{2} e^{-2x}$. **41.** 1) $y = C_1 e^{\frac{3}{2}x} + C_2 e^{\frac{1}{2}x}$; 2) $y = e^{-\frac{1}{3}x} (C_1 + C_2 x)$;
 3) $y = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} + C_2 e^{-x}$; 4) $y = e^{-4x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$;
 5) $y = C_1 \cos \sqrt{5}x + C_2 \sin \sqrt{5}x$; 6) $y = \sin x + \frac{1}{\sqrt{3}} \cos x$; 7) $y = \frac{5}{3} - \frac{2}{3} e^{-3x}$.
42. 1) $y = C_1 + C_2 x + C_3 x e^x$; 2) $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} + C_3 e^{2x} + C_4 e^{-2x}$;
 3) $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{3x}$; 4) $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-5x}$;
 5) $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$; 6) $y = C_1 e^{-x} + e^{3x} (C_2 + C_3 x)$;
 7) $y = \frac{44}{13} e^{2x} - \frac{5}{13} \cos 3x - \frac{12}{13} \sin 3x$. **43.** $mx'' + bx' + ax = 0$.
44. 1) $y = e^{-x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + 3x^2 + x - 1$;
 2) $y = (C_1 + C_2 x) e^{-x} + 4x^2 - 19x + 25$; 3) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x - 3x^2 + 7x - 15$;
 4) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{\frac{x}{2}} + e^x$; 5) $y = C_1 + C_2 e^{-2.5x} - \frac{5}{6} e^{-x}$;

$$6) y = e^{2x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + \cos x + \frac{1}{2} \sin x;$$

$$7) y = C_1 + C_2 e^{-2x} - \frac{36}{5} \cos x + \frac{72}{5} \sin x; \quad 8) y = \frac{1}{3} \sin 2x - \frac{1}{3} \sin x - \cos x;$$

$$9) y = (x+1)e^{\frac{3}{2}x} + 2e^{\frac{5}{2}x}. \quad 46. 1) y = \left(C_1 + C_2 x + \frac{x^3}{6} \right) e^{2x};$$

$$2) y = C_1 + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{5} (6 \sin x - 2 \cos x) e^x;$$

$$3) y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x + x - \frac{1}{2} x \cdot \cos x;$$

$$4) y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x + \frac{1}{2} x + \frac{5}{4} - \frac{1}{12} e^{-2x};$$

$$5) y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{3}{2} x + \frac{9}{4} + \frac{3}{4} \cos 2x - \frac{1}{4} \sin 2x;$$

$$6) y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + (x-3)x^2 + e^{-x};$$

$$7) y = C_1 + e^x (C_2 + C_3 x) + \left(\frac{1}{3} x^2 + 2x + 6 \right) x + \frac{e^x x^2}{2};$$

$$8) y = C_1 + C_2 x + e^{-x} (C_3 + C_4 x) + \frac{1}{2} x e^{-x} + \left(\frac{1}{6} x - \frac{1}{6} \right) x^2;$$

$$9) y = e^{\frac{x}{2}} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) + \frac{x^2 - x + 1}{3} e^x;$$

$$10) y = e^x (e^x - x^2 - x + 1); \quad 11) y = 2x e^x.$$

$$47.1) y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \cdot \ln \left| \cos x + \sqrt{\cos^2 x - \frac{1}{2}} \right| +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x \cdot \arcsin(\sqrt{2} \sin x); \quad 2) y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{4} \sin 2x \cdot \ln \operatorname{tg} 2x;$$

$$3) y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{2} e^{-2x} \ln(1 + e^{2x}) - e^{-2x} + e^{-3x} \operatorname{arctg} e^x;$$

$$4) y = C_1 \cos \frac{x}{2} + C_2 \sin \frac{x}{2} + 2x \cdot \sin \frac{x}{2} + 4 \cos \frac{x}{2} \cdot \ln \left| \cos \frac{x}{2} \right|;$$

$$5) y = 2 + C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos x \cdot \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|;$$

$$6) y = e^x \left(C_1 + C_2 x + \ln \sqrt{x^2 + 1} + x \cdot \operatorname{arctg} x \right).$$

$$48. \quad 1) y = C_1 + C_2 e^{3x} - 2x^3 - 2x^2 - \frac{2}{3}x; \quad 2) y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 3x e^{2x};$$

$$3) y = (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) e^{-x} - \frac{1}{4} x e^{-x} \cos 2x; \quad 4) y = \left(C_1 + C_2 x + \frac{x^3}{6} \right) e^{2x};$$

$$5) y = e^2 \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) + x^3 + 3x^2;$$

$$6) y = e^{\frac{3x}{5}} \left(C_1 \cos \frac{4}{5} x + C_2 \sin \frac{4}{5} x \right) + \frac{25}{16} e^{\frac{3x}{5}};$$

$$7) y = C_1 + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{5} (6 \sin x - 2 \cos x) e^x;$$

$$8) y = e^x (0,16 \cos 3x + 0,28 \sin 3x) + x^2 + 2,2x + 0,84; \quad 9) y = e^x + x^2.$$

$$50. \quad 1) y = (C_1 + C_2 x) e^{2x} + \frac{1}{4} \cos 2x + \frac{1}{2} x + \frac{1}{2};$$

$$2) y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + \left(\frac{1}{12} x - \frac{1}{9} \right) e^{2x} + \left(\frac{1}{12} x^2 - \frac{1}{3} x - \frac{1}{3} \right) x^2;$$

$$3) y = C_1 + C_2 e^{\frac{5}{2}x} + \cos 2,5x + \sin 2,5x - 0,02x e^{\frac{5}{2}x};$$

$$4) y = (C_1 + C_2 x) e^{2x} + \cos 2x + 2x^2 + 4x + 3 + 4x^2 e^{2x};$$

$$5) y = (1+x) e^{\frac{3}{2}x} + 2e^{\frac{5}{2}x}; \quad 6) y = 2x - \frac{4}{\sqrt{3}} e^{\frac{x}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x; \quad 7) y = e^x + x^3;$$

$$8) y = (C_1 + C_2 x + x^2) e^x + (C_3 + C_4 x + x^2) e^{-x} + \sin x + \cos x;$$

$$9) y = \frac{1}{60} x^5 - \frac{1}{2} x^3 + C_1 x^2 + C_2 x + C_3 + C_4 \cos x + C_5 \sin x.$$

$$51. \quad 1) y = e^x (x + C_1) - (e^x + 1) \ln(e^x + 1) + C_2;$$

$$2) y = \frac{1}{2} e^x \left(\operatorname{arcsine}^x + e^x \sqrt{1 - e^{2x}} + C_1 \right) + \frac{1}{3} \sqrt{(1 - e^{2x})^3} + C_2;$$

$$3) y = C_1 e^x + \operatorname{cose}^x + C_2; \quad 4) y = e^x (x \ln |x| + C_1 + C_2 x);$$

$$5) y = -x \cos 2x + \sin 2x \cdot \ln |\cos 2x| + C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x;$$

$$6) y = \left(C_1 - \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| \right) \cos x + \left(C_2 - \frac{1}{\sin x} \right) \sin x. \quad 52. 1) \begin{cases} x = C_1 e^{5t} + C_2 e^t \\ y = 3C_1 e^{5t} - C_2 e^t \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x = C_1 e^{3t} + C_2 e^t \\ y = -2C_1 e^{3t} + 2C_2 e^t \end{cases}; 3) \begin{cases} x = C_1 + C_2 e^{-t} \\ y = -2C_1 - 3C_2 e^{-t} \end{cases}; 4) \begin{cases} x = C_1 e^{3t} + C_2 e^{5t} \\ y = 3C_1 e^{3t} + C_2 e^{5t} \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - t^2 - 2 + t e^t \\ y = C_1 e^t - C_2 e^{-t} - 2t + e^t (t-1) \end{cases}; 6) \begin{cases} x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t} + 2e^{-2t} \\ y = \frac{1}{4}(C_1 e^{2t} + 4C_2 e^{-t}) + 11e^{-2t} \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} + 2 \cos t - 1 \sin t \\ y = -C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t} - 2 \sin t - 6 \cos t \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} x = e^t (C_1 + C_2 t) + 5e^t \sin t \\ y = e^t (C_1 - C_2 + C_2 t) + 5e^t \sin t - 5e^t \cos t \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} x = C_1 + C_2 e^{-3t} - 3t^2 + 2t \\ y = 2C_1 + 5C_2 e^{-3t} - 6t^2 + 10t - 2 \end{cases}; 10) \begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{3t} + t e^{3t} \\ y = C_1 e^t + 2C_2 e^{3t} + \frac{e^{3t} (3t+1)}{2} \end{cases}$$

$$53. 1) \begin{cases} x = C_1 e^{2t} + e^{-t} (C_2 \cos \sqrt{3} t + C_3 \sin \sqrt{3} t) \\ y = C_1 e^{2t} + \frac{1}{2} e^{-t} ((C_3 \sqrt{3} - C_2) \cos \sqrt{3} t - (C_2 \sqrt{3} + C_3) \sin \sqrt{3} t); \\ z = C_1 e^{2t} - \frac{1}{2} e^{-t} ((C_3 \sqrt{3} - 6) \cos \sqrt{3} t - (C_2 \sqrt{3} - C_3) \sin \sqrt{3} t) \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{3t} + C_3 e^{6t} \\ y = -C_2 e^{3t} + 2C_3 e^{6t} \\ z = -C_1 e^{-2t} + C_2 e^{3t} + C_3 e^{6t} \end{cases}; 3) \begin{cases} x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + C_3 e^{6t} \\ y = C_2 e^{3t} - 2C_3 e^{6t} \\ z = -C_1 e^{-2t} + C_2 e^{3t} + C_3 e^{6t} \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x = (C_1 + C_2 t) e^t + 2C_3 \\ y = C_1 e^t - C_3 \\ z = (C_1 + C_2 t) e^t + C_3 \end{cases}, \quad 55. 1) \begin{cases} x = C_1 e^{3t} + C_2 e^{5t} \\ y = C_1 e^{3t} - C_2 e^{5t} \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x = C_1 e^{4t} + C_2 e^{3t} \\ y = -C_1 e^{4t} + \frac{1}{3} C_2 e^{3t} \end{cases}; 3) \begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t} \\ y = -\frac{1}{2} C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t} \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x = C_1 e^{4t} + C_2 e^{7t} \\ y = -\frac{1}{2} C_1 e^{4t} - 2C_2 e^{7t} \end{cases}; 5) \begin{cases} y = C_1 e^{-7t} + C_2 e^{-4t} + 7e^t + e^{-t} \\ z = \frac{1}{2} C_2 e^{-4t} - C_1 e^{-7t} + e^t + 2e^{-t} \end{cases};$$

$$6) \begin{cases} x = e^t (C_1 + C_2 t) - 3 \\ y = e^t \left(C_1 + \frac{1}{2} C_2 + C_2 t \right) - 2 \end{cases};$$

$$7) \begin{cases} y = C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t + \frac{1}{9} t \\ z = (3C_2 - C_1) \cos 3t - (3C_1 + C_2) \sin 3t - \frac{1}{9} (t - 1) \end{cases};$$

$$8) \begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + \cos t - 2 \sin t \\ y = C_1 e^t + \frac{2}{3} C_2 e^{2t} + 2(\cos t - \sin t) \end{cases};$$

$$9) \begin{cases} x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + 7t^2 + 17t - 14 \\ y = \frac{1}{5} (7C_1 - C_2) \cos t + \frac{1}{5} (C_1 + 7C_2) \sin t + 10t^2 + 21t - 21 \end{cases};$$

$$10) \begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^t - 5 \cos t - 4 \sin t \\ y = \frac{11}{9} C_1 e^{-t} + C_2 e^t - 5(\cos t + \sin t) \end{cases}; 11) \begin{cases} x = \frac{1}{4} (3e^t + 5e^{-t}) + \frac{1}{2} t e^t - 1 \\ y = \frac{5}{4} (e^t - e^{-t}) + \frac{1}{2} t e^t - t \end{cases}.$$

$$56. 1) \begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + C_3 e^{5t} \\ y = C_1 e^t - 2C_2 e^{2t} + C_3 e^{5t} \\ z = -C_1 e^t - 3C_2 e^{2t} + 3C_3 e^{5t} \end{cases}; 2) \begin{cases} x = C_1 e^t + C_3 e^{-t} \\ y = C_1 e^t + C_2 e^{2t} \\ z = 2C_2 e^{2t} - C_3 e^{-t} \end{cases}$$

ЛІТАРАТУРА

1. Кремер Н.Ш. и др. Высшая математика для экономистов. М.: Банки и биржи: ЮНИТИ, 1997.
2. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. М.: Наука, 1973.
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: В 2 т. М.: Наука, 1985.
4. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: В 2 ч. М.: Айрис-пресс, 2002.
5. Рябушко А.П. и др. Индивидуальные задания по высшей математике. Мн.: Выш. шк., 2000.
6. Шипачев В.С. Высшая математика. М.: Выш. шк., 1985.

ПРАДМОВА.....	3
Глава 1. ФУНКЦЫІ НЕКАЛЬКІХ ЗМЕННЫХ.....	4
1.1. Азначэнне, ліміт, непарыўнасць функцыі некалькіх зменных.....	4
1.2. Дыферэнцаванне функцыі некалькіх зменных. Дыферэнцыял функцыі.....	7
1.3. Датэчная плоскасць і нармаль да паверхні. Вытворная па напрамку. Градыент. Частковая эластычнасць.....	10
1.4. Формула Тэйлара. Экстрэмум функцыі першага парадку	15
Глава 2. ДЫФЕРЭНЦЫЯЛЬНЫЯ УРАЎНЕННІ.....	21
2.1. Дыферэнцыяльныя ўраўненні першага парадку.....	21
2.1.1. Дыферэнцыяльныя ўраўненні з раздзяляльнымі зменнымі.....	21
2.1.2. Аднародныя дыферэнцыяльныя ўраўненні.....	25
2.1.3. Лінейныя дыферэнцыяльныя ўраўненні.....	29
2.1.4. Ураўненні Бернулі.....	33
2.2. Дыферэнцыяльныя ўраўненні вышэйшых парадкаў, якія дапускаюць зніжэнне парадку.....	36
2.3. Лінейныя аднародныя і неаднародныя ўраўненні вышэйшых парадкаў з нязменнымі каэфіцыентамі.....	40
2.3.1. Лінейныя аднародныя дыферэнцыяльныя ўраўненні вышэйшых парадкаў.....	40
2.3.2. Лінейныя неаднародныя дыферэнцыяльныя ўраўненні вышэйшых парадкаў.....	44
2.4. Сістэмы дыферэнцыяльных ураўненняў.....	47
АДКАЗЫ.....	54
ЛІТАРАТУРА.....	67

Вучэбнае выданне
ВЫШЭЙШАЯ МАТЭМАТЫКА ў ПЫТАННЯХ, ЗАДАЧАХ
І ПРАКТЫКАВАННЯХ, ФУНКЦЫІ ЗМЕННЫХ,
ДЫФЕРЭНЦЫАЛЬНЫЯ ўРАВНЕННІ

Метадычны даспаможнік

Складшчыкі: **Звяроніч** Людміла Феліксаўна
Копчыц Раіса Міхайлаўна
Пыжкова Вольга Мікалаеўна
Салаўёва Ірына Фёдараўна
Рысюк Ніна Антонаўна

Рэдактар Ю. В. Краўцова

Падпісана да друку 26.08.2004. Фармат 60x84 $\frac{1}{16}$.

Папера афсетная. Гарнітура Таймс. Друк афсетны.

Ум. друк. арк. 4,6. Ул.-выд. арк. 4,0.

Тыраж 500 экз. Заказ 478.

Установа адукацыі

«Беларускі дзяржаўны тэхналагічны ўніверсітэт».

220050. Мінск, Свярдлова, 13а.

Ліцэнзія ЛІІ № 02330/0133255 ад 30.04.04.

Аддрукавана ў лабараторыі паліграфіі ўстановы адукацыі

«Беларускі дзяржаўны тэхналагічны ўніверсітэт».

220050. Мінск, Свярдлова, 13а.