

О СИНХРОНИЗАЦИИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДЫХ ЧАСТЕЙ ГИДРОМЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

***Аннотация.** Поставлена и решена новая задача о движении гидромеханической системы с вязкой жидкостью. Рассмотрен вопрос о синхронизации вращательного движения твердых частей системы. Определены условия, при выполнении которых синхронность реализуется или не реализуется (предотвращается). Обнаружено наличие различных типов синхронной динамики гидромеханической системы.*

V.L. Sennitskii

**Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of SB of RAS
Novosibirsk State University
Novosibirsk, Russia**

ON THE SYNCHRONIZATION OF A ROTATIONAL MOTION OF SOLID PARTS OF A HYDRO-MECHANICAL SYSTEM

***Abstract.** The new problem is formulated and solved on the motion of hydro-mechanical system with a viscous liquid. The question is considered on the synchronization of a rotational motion of solid parts of the system. The conditions are determined under which the synchronicity is realized or not realized (is prevented). It is revealed that various types of the synchronic dynamics of the hydro-mechanical system exist.*

Целью данной работы является определение условий, при выполнении которых реализуется (или предотвращается) синхронизация периодического вращательного движения твердых частей гидромеханической системы.

Одним из перспективных направлений исследований в механике жидкости является изучение динамики гидромеханических систем при периодических по времени воздействиях. Важность данного научного направления обусловлена наличием у результатов проводимых исследований как фундаментального, так и прикладного содержания [1—5], тем что периодические воздействия способны качественным образом влиять на динамику гидромеханических систем, быть средством управления системами, а также возможностью использования получаемых результатов при поиске оригинальных подходов к решению актуальных научных и технических проблем.

Состояние исследований в рассматриваемом направлении адекватно характеризуется работами [2, 4, 5], краткий обзор ранее проведенных исследований содержится в [1]. К числу важных современных научно-технических задач с очевидностью может быть отнесена задача синхронизации (или недопущения синхронизации) движения составных частей механических систем (задача организации (или предотвращения) движения составных частей механических систем по одному и тому же временному закону). Данная задача актуальна, в частности, для гидромеханических систем, подвергающихся периодическим по времени воздействиям. Настоящая работа посвящена рассмотрению задачи о синхронизации периодического вращательного движения твердых частей гидромеханической системы с вязкой жидкостью посредством внешнего периодического силового воздействия на систему.

Имеются несжимаемая вязкая жидкость и абсолютно твердые бесконечно длинные тела η , ξ . Тело η ограничено круговыми цилиндрическими поверхностями Γ_η радиуса R_η и Γ'_η радиуса $R'_\eta < R_\eta$. Тело ξ ограничено изнутри круговой цилиндрической поверхностью Γ_ξ радиуса $R_\xi > R_\eta$. Оси поверхностей Γ_η , Γ'_η , Γ_ξ находятся на оси Z инерциальной прямоугольной системы координат X , Y , Z . Плотность тела η не зависит от координаты Z . Жидкость заполняет область Σ : $R_\eta < R < R_\xi$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $-\infty < Z < \infty$ ($R = \sqrt{X^2 + Y^2}$, θ , Z – цилиндрическая система координат). Тело η и тело ξ совершают вращательное движение вокруг оси Z . Движение тела ξ является заданным. Угловая скорость Ω_ξ вращения тела ξ вокруг оси Z периодически с периодом T изменяется со временем t ($\Omega_\xi = \hat{\Omega}_\xi \sin(2\pi t / T)$; $\hat{\Omega}_\xi > 0$ – постоянная). Тело η подвергается внешнему периодическому силовому воздействию. Тело η является свободным: его движение не задано, угловая скорость Ω_η вращения тела η вокруг оси Z подлежит определению.

Пусть $\tau = t/T$; $r = R/R_\xi$; $r_\eta = R_\eta/R_\xi$; $\mathbf{e}_\theta$ – единичный базисный вектор, направление которого совпадает с направлением возрастания θ ; $\mathbf{V}$, ρ и ν – соответственно скорость, плотность и кинематический коэффициент вязкости жидкости; $\mathbf{v} = T\mathbf{V}/R_\xi = v(r, \tau) \mathbf{e}_\theta$; P – давление в жидкости; $p = T^2 P / (\rho R_\xi^2) = p(r, \tau)$; $\omega_\eta = T\Omega_\eta$; $\omega_\xi = T\Omega_\xi = \hat{\omega}_\xi \sin 2\pi\tau$; η^* – абсолютно твердое тело, часть тела η , заполняющая в (какой-либо) момент времени $t = t^*$ область Q^* : $R'_\eta < R < R_\eta$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $Z^* < Z < Z^* + D$ (Z^* , $D > 0$ – постоянные); I – момент инерции тела η^* относительно оси Z ; $Re = R_\xi^2 / (\nu T)$ – число

Рейнольдса; $\kappa = \rho R_\eta^2 R_\xi^2 D/I$; M_{liq} – момент сил, действующих со стороны жидкости на тело η^* , относительно оси Z ; $\mu_{\text{liq}} = T^2 M_{\text{liq}}/I = 2\pi(\kappa/\text{Re})(\partial v/\partial r - v/r)|_{r=r_\eta}$; M_{ext} – момент внешних сил, действующих на тело η^* , относительно оси Z ; $\mu_{\text{ext}} = T^2 M_{\text{ext}}/I = \hat{\mu} \sin(2\pi\tau + \varphi)$ ($\hat{\mu} > 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ – параметры).

Задачу о движении гидромеханической системы (свободных частей системы – жидкости и тела η) составляют уравнение движения тела η (тела η^*), уравнение Навье–Стокса и условия на твердых границах жидкости

$$\frac{d\omega}{d\tau} = \mu_{\text{liq}} + \mu_{\text{ext}}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{v} \quad \text{в } \Sigma; \quad (2)$$

$$v = \omega_\eta r_\eta \quad \text{при } r = r_\eta, \quad v = \omega_\xi \quad \text{при } r = 1. \quad (3)$$

Задача (1)–(3) имеет (точное) решение, которое определяется формулами

$$p = \int_{r_\eta}^r \frac{v^2}{r'} dr' + c, \quad v = \text{Real}\{G_1^{-1}[(\hat{\omega}_\eta r_\eta K_1(q) + i\hat{\omega}_\xi K_1(qr_\eta))I_1(qr) -$$

$$-(\hat{\omega}_\eta r_\eta I_1(q) + i\hat{\omega}_\xi I_1(qr_\eta))K_1(qr)]e^{2\pi i\tau}\},$$

$$\omega_\eta = \text{Real}(\hat{\omega}_\eta e^{2\pi i\tau}), \quad \hat{\omega}_\eta = i \frac{2\pi\kappa\hat{\omega}_\xi - r_\eta \text{Re} G_1 \hat{\mu} e^{i\varphi}}{qr_\eta(qG_1 - 2\pi\kappa r_\eta G_2)},$$

$$G_1 = I_1(qr_\eta)K_1(q) - I_1(q)K_1(qr_\eta), \quad G_2 = I_2(qr_\eta)K_1(q) + I_1(q)K_2(qr_\eta) \quad (4)$$

(c – функция τ ; $q = (1+i)\sqrt{\pi\text{Re}}$; I_1, I_2, K_1, K_2 – модифицированные функции Бесселя).

Обратимся к вопросу о синхронизации движения твердых частей гидромеханической системы посредством внешнего силового воздействия на систему. Представим комплексную амплитуду $\hat{\omega}_\eta$ в виде $\hat{\omega}_\eta = \hat{\omega} e^{i\psi}$ ($\hat{\omega}$ и ψ – соответственно модуль и аргумент амплитуды $\hat{\omega}_\eta$). Из (4) следует $\omega_\eta = \hat{\omega} \cos(2\pi\tau + \psi)$. Синхронность движения тела η и тела ξ состоит в том, что при любом значении τ выполняется соотношение $\cos(2\pi\tau + \psi) = \sin 2\pi\tau$, что имеет место тогда и только тогда, когда удовлетворяются условия

$$\sin \psi = -1, \quad \cos \psi = 0. \quad (5)$$

Пусть значения числа Рейнольдса $\text{Re} > 0$ малы по сравнению с единицей. Используя (4), получим

$$\hat{\omega}_\eta \sim -i\hat{\omega}_\xi \left[1 + \frac{1 - r_\eta^2}{4\pi\kappa} \left(\frac{\hat{\mu} e^{i\varphi}}{\hat{\omega}_\xi} - iQ \right) \text{Re} \right],$$

$$\sin \psi \sim -1, \quad \cos \psi \sim \frac{1 - r_\eta^2}{4\pi i} \left(\frac{\hat{\mu}}{\hat{\omega}_\xi} \sin \varphi - Q \right) \text{Re} \quad \text{при } \text{Re} \rightarrow 0, \quad (6)$$

где

$$Q = \pi[2 + \pi\kappa(1 - r_\eta^2)].$$

Согласно (5), (6) при малых значениях Re имеет место следующее.

1. В нулевом приближении (при учете только слагаемых, не зависящих от Re) тело η и тело ξ движутся синхронно, независимо от того, каков момент μ_{ext} (независимо от значений параметров $\hat{\mu}$, φ).

2. В первом приближении (при учете наряду со слагаемыми, не зависящими от Re , также слагаемых, пропорциональных Re) тело η и тело ξ движутся синхронно или несинхронно в зависимости от значений управляющих параметров $\hat{\mu}$, φ . При выполнении неравенства $(\hat{\omega}_\xi/\hat{\mu})Q > 1$ синхронность движения невозможна. Для значений управляющего параметра $\hat{\mu}$, при которых имеет место соотношение $(\hat{\omega}_\xi/\hat{\mu})Q \leq 1$ тело η и тело ξ движутся синхронно, если управляющий параметр φ удовлетворяет условию

$$\sin \varphi = (\hat{\omega}_\xi/\hat{\mu})Q \quad (7)$$

(если $\sin \varphi \neq (\hat{\omega}_\xi/\hat{\mu})Q$, синхронность отсутствует).

Пусть $C = \sqrt{1 - (\hat{\omega}_\xi/\hat{\mu})^2 Q^2}$. При выполнении (7) синхронное (с движением тела ξ) движение тела η может осуществляться со следующими (различными) угловыми скоростями:

$$\omega_\eta = \hat{\omega}_\xi \sin 2\pi t \quad \text{для } \varphi = \pi/2 \quad (8)$$

(угловые скорости тел η и ξ совпадают);

$$\omega_\eta = \hat{\omega}_\xi \{1 + [(1 - r_\eta^2)/(4\pi i \hat{\omega}_\xi)] \hat{\mu} C \text{Re}\} \sin 2\pi t \quad \text{для } 0 < \varphi < \pi/2 \quad (9)$$

(амплитуда угловой скорости тела η больше, чем амплитуда угловой скорости тела ξ);

$$\omega_\eta = \hat{\omega}_\xi \{1 - [(1 - r_\eta^2)/(4\pi i \hat{\omega}_\xi)] \hat{\mu} C \text{Re}\} \sin 2\pi t \quad \text{для } \pi/2 < \varphi < \pi \quad (10)$$

(амплитуда угловой скорости тела η меньше, чем амплитуда угловой скорости тела ξ).

Формулами (4), (8)–(10) определяются типы синхронного движения гидромеханической системы при различных значениях управляющих параметров.

В данной работе представлены постановка и точное решение новой задачи о движении гидромеханической системы с вязкой жидкостью. Установлена возможность синхронизации периодического вращательного движения твердых частей гидромеханической системы посредством внешнего периодического силового воздействия на систему. Определена нетривиальная синхронная динамика гидромеханической системы. Полученные результаты могут

использоваться, в частности, при подготовке и проведении направленных экспериментальных исследований динамики гидромеханических систем, подвергающихся периодическим воздействиям, а также при разработке устройств, содержащих твердые тела, совершающие периодическое движение в жидкой среде.

Список использованных источников

1. Сенницкий В.Л. Парадоксальное движение жидкости // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. 2017. № 8, ч. 1. С. 28—33. DOI: 10.17513/mjprfi.11753.
2. Сенницкий В.Л. Об особенностях течения жидкости в поле силы тяжести // Сибирские электронные математические известия. 2022. Т. 19, № 1. С. 241—247. DOI: 10.33048/semi.2022.19.018.
3. Сенницкий В.Л. Особенности движения вязкой жидкости в присутствии стенок // Сборник статей Международной научно-технической конференции Минские научные чтения-2024 (г. Минск, 3—5 декабря 2024 г.). В 3-х т. Минск: БГТУ, 2024. 1277 с. Т. 3. С. 320—324. ISBN 978-985-897-238-7.
4. Сенницкий В.Л. О движении гидромеханической системы с вязкой жидкостью при периодических воздействиях // Ученые записки Казанского университета. Серия физико-математические науки. 2025. Т. 167, кн. 1. С. 125—139. DOI: 10.26907/2541-7746.2025.1.125-139.
5. Сенницкий В.Л. О структуре течения вязкой жидкости при периодических воздействиях, не имеющих выделенного направления в пространстве // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2025. Т. 33, № 4. С. 427—440. DOI: 10.18500/0869-6632-003163.

УДК 621.74

Н.Ф. Тихонов

«Чувашский государственный университет имени И.Н. Ульянова»,
г. Чебоксары, Россия

БУДУЩЕЕ ПРОИЗВОДСТВА ПРОТИВОПРИГАРНЫХ ПОКРЫТИЙ

***Аннотация.** Будущее производства противопригарных покрытий, основанных на доступных материалах, выглядит многообещающим. С учетом растущего интереса к устойчивым и экологически чистым технологиям, можно ожидать, что такие разработки будут получать все большее внимание со*