Уменьшение концентрации атомов водорода в приповерхностных слоях сформированных структур под воздействием анализирующего пучка ионов азота N^+ можно объяснить дегазацией атомов водорода и его соединений водорода, которые оказались химически слабо связаны с другими атомами покрытия.

Методом ионно-ассистируемого осаждения получены Ti/Si, Zr/Si и Mo/Si-структуры. Время осаждения покрытий составляло 1-6 ч при ускоряющем напряжении U = 5-10 кВ и плотности ионного тока ~4–5 мкА/см^2. В рабочей камере в процессе осаждения покрытий поддерживался вакуум при давлении ~10^{-2} Па.

Исследования поверхности Me/Si-структур, полученных ионно-ассистируемым осаждением металлсодержащих покрытий, с применением методов резерфордовского обратного рассеяния ионов гелия в сочетании с моделирование RUMP и резонансных ядерных реакций, показали, что сформированные структуры содержат атомы осажденного металла (~5–10 ат. %), атомы кремния из подложки (10–15 ат. %) и атомы технологических примесей: водорода (3–15 ат. %), углерода (20–25 ат. %) и кислорода (10–15 ат. %). Источником технологических примесей является летучая фракция углеводородов вакуумного масла диффузионного паромасляного насоса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Doolittle L.R. A semiautomatic algorithm for rutherford backscattering analysis // Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. 1986. Vol. B15. P. 227–234.

2. Тульев В.В., Ташлыков И.С. Изучение композиционного состава покрытий на основе Cr, Ti и Zr, сформированных на алюминии и кремнии методом ионно-ассистированного нанесения в условиях саморадиации // Труды IV Междунар. науч. конф. «Радиационно-термические эффекты и процессы в неорганических материалах». Томск, 2004. С. 92–95.

УДК 536.24

Т. Б. Карлович, доц. (БГТУ, г. Минск, РБ)

ИНТЕГРАЛ ДЖЕЛЕТТА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ВОЛЧКА TIP-TOP В СЛУЧАЕ НЕНУЛЕВОГО МОМЕНТА СИЛЫ ТРЕНИЯ

Волчок tip-top является примером механической системы, которая может быть распечатана на 3D-принтере с высокой точностью и с которой можно проводить эксперименты без какого-либо специального оборудования.

В настоящей работе нами использовался волчок, состоящий из тонкостенной сферы диаметром 38 мм и толщиной 1 мм, срезанной на одну четверть диаметра, и конусовидной ножки длиной 39 мм, имеющей меньший диаметр 3 мм в точке крепления шляпки к ножке и больший диаметр 5 мм на противоположной стороне ножки. Ножка и шляпка распечатывались по отдельности на 3D-принтере PLA-пластиком. Вес волчка составил 7 г, экваториальный и осевой моменты инерции соответственно были равны 14,0 г·см^2 и 15,3 г·см^2, расстояние между центром масс и центром сферы составило 4 мм. Модель и прототип китайского волчка представлены на рис. 1.

2

1 2

Рисунок 1 – Волчок tip-top: *1* – модель в компьютерной программе; *2* – прототип, распечатанный на 3D – принтере

Волчок раскручивался вручную на горизонтальной поверхности с нанесенным на нее тонким слоем муки, позволяющем фиксировать траекторию движения точки касания волчка плоскости [1]. Негатив одной из таких траекторий, обведенный белым контуром для лучшей видимости, представлен на рис. 2. На отрезке *AB* происходит движение волчка на шляпке по непрямолинейной спиралевидной траектории, в точке *B* происходит переворот на ножку и дальше движение продолжается по скручивающейся спирали до точки *C*, в точке С происходит обратный переворот волчка на шляпку и до точки *D* движение продолжается по раскручивающейся спирали.

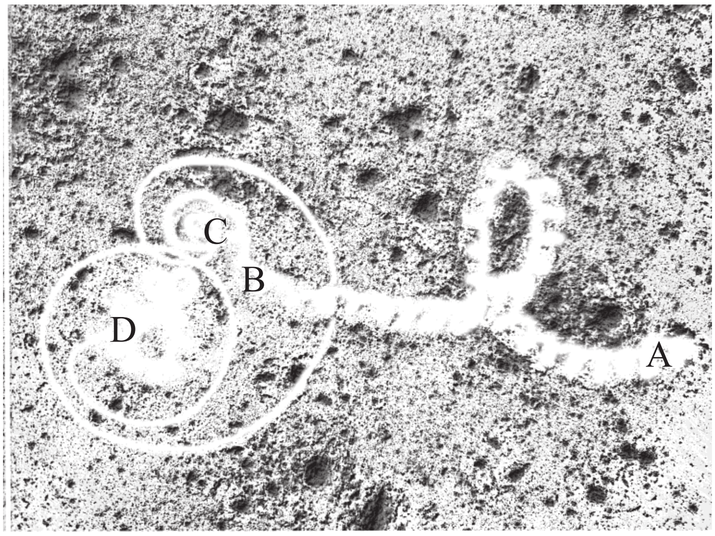

Рисунок 2 – След точки касания волчка tip-top горизонтальной поверхности: *A* – начало движения волчка на шляпке, *B* – переворот волчка на ножку, *C* - обратный переворот на шляпку, *D* – конец движения

Асимптотическое спиралевидное движение волчка предсказывается в работе [2] для тяжелого динамически симметричного тела сферической формы в случае малого расстояния между центром тяжести и центром сферы и малой силы трения скольжения. Причем качественно описываются как скручивающаяся спираль при движении волчка на ножке, так и раскручивающаяся спираль при движении на шляпке после опрокидывания волчка в точке *C*. Однако эти спирали получаются из эволюционирующей окружности радиуса, не превышающего радиуса динамически симметричного тела. В нашем случае видимый радиус закручивания скручивающейся и раскручивающейся спиралей значительно превышает радиус сферы, описанной вокруг волчка, что может быть связано как с приближениями, используемыми в работе [2], так и с особенностями сил, действующих на рассматриваемый нами волчок tip-top.

Рассмотрим описание движения волчка на основе уравнений, включающих теорему об изменении количества движения и кинетического момента, кинематических уравнений Эйлера и безотрывности движения волчка по горизонтальной поверхности. В качестве неподвижной системы отсчета возьмем систему $Oxyz$, связанную с горизонтальной поверхностью, в качестве подвижной системы отсчета выберем систему $G\xi\eta\sigma$, связанную с волчком и имеющую начало в его центре масс (см. рис. 3).

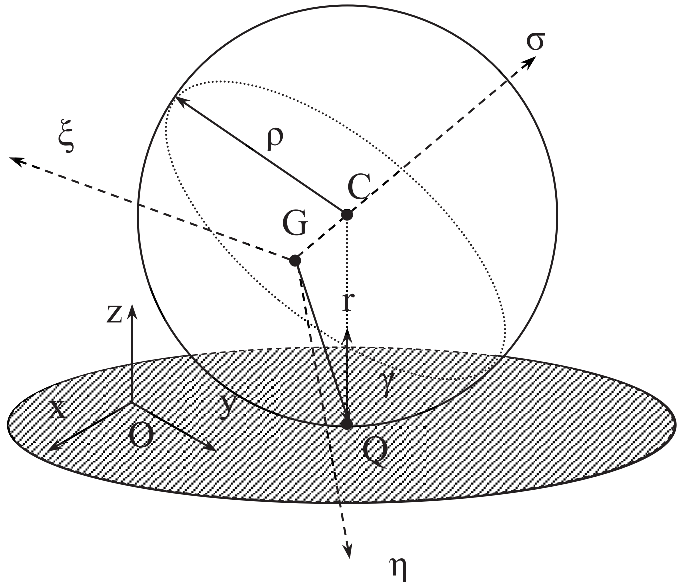

Рисунок 3 – Схематическое движение сферического волчка по горизонтальной плоскости Oxy

Математическая модель эволюции волчка на горизонтальной поверхности, рассмотренная в работе [3] и дополненная моментом сил сопротивления воздуха (сила сопротивления воздуха не учитывается из-за малой скорости поступательного движения волчка по сравнению со скоростью вращательного движения), имеет вид

$$\begin{aligned} & m\dot{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\omega} \times m\mathbf{v} = -mg\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{R}, \\ & I\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times I\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{R} + \boldsymbol{M}, \\ & \dot{\boldsymbol{\gamma}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma} = 0, \\ & \left(\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}\right) \cdot \boldsymbol{\gamma} = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где m – масса волчка, **v –** скорость центра масс, **ω** – угловая скорость, $\boldsymbol{r}$ – радиус-вектор, проведенный из центра масс к нижней точке сферы Q, **γ** – единичный вектор восходящей вертикали, $\boldsymbol{R}$ – реакция**,** приложенная в точке Q, $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{F}$ – сила трения (учитывается только сила трения скольжения (момент силы трения, представляемый в виде пары сил верчения и качения, обычно мал и им можно пренебречь), $\boldsymbol{N}$ – нормальная составляющая реакции, $\boldsymbol{M}$ – момент силы сопротивления воздуха. I – центральный тензор инерции волчка относительно осей координат $G\xi$, $G\eta$, $G\sigma$, связанных с его осью симметрии и перпендикулярной ей плоскостью. Предполагается, что моменты инерции относительно осей $G\xi$ и $G\eta$ одинаковы между собой, равны $\boldsymbol{A}$, и отличаются от момента инерции относительно оси $G\sigma$ – $\boldsymbol{C}$, так что тензор инерции I имеет вид

$$I = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \tag{2}$$

Покажем, что в случае отсутствия сопротивления воздуха имеет место интеграл Джелетта, означающий постоянство линейной комбинации проекций кинетического момента $\boldsymbol{K} = I\boldsymbol{\omega}$ на вертикаль $\boldsymbol{\gamma}$ и на ось динамической симметрии:

$$\boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{r} = \text{const} \text{ или } \dot{\boldsymbol{K}} \cdot \boldsymbol{r} + \boldsymbol{K} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} = 0. \tag{3}$$

Для доказательства равенства воспользуемся разложением вектора $\boldsymbol{r}$:и его производной на составляющие вектора:

$$\boldsymbol{r} = a\boldsymbol{e}_\sigma - \rho\boldsymbol{\gamma}, \;\; \dot{\boldsymbol{r}} = -\rho\dot{\boldsymbol{\gamma}}, \tag{4}$$

где a – расстояние между центром сферы и центром масс, ρ – радиус сферы. В силу постоянства вектора $\boldsymbol{\gamma}$ справедливо следующее соотношение между вектором $\boldsymbol{\gamma}$ и его производной

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}. \tag{5}$$

С учетом формул (4) и (5) и циклической перестановки в смешанном произведении векторов, второе слагаемое в формуле (3) можно представить в виде

$$\boldsymbol{K} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} = \rho\boldsymbol{\gamma}\left(\boldsymbol{K} \times \boldsymbol{\omega}\right). \tag{6}$$

Для расчета первого слагаемого в формуле (3) сначала выразим из второго уравнения системы (1) производную кинетического момента

$$\dot{\boldsymbol{K}} = -\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{K} + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{R} + \boldsymbol{M}. \tag{7}$$

Далее рассмотрим векторное произведение угловой скорости и кинетического момента в формуле (7). Для этого разложим оба вектора по базису векторов подвижной системы отсчета $\boldsymbol{e}_\xi$, $\boldsymbol{e}_\eta$, $\boldsymbol{e}_\sigma$ и запишем векторное произведение в виде определителя третьего порядка

$$\begin{gathered} \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{K} = \boldsymbol{\omega} \times I\boldsymbol{\omega} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_\xi & \boldsymbol{e}_\eta & \boldsymbol{e}_\sigma \\ \boldsymbol{\omega}_\xi & \boldsymbol{\omega}_\eta & \boldsymbol{\omega}_\sigma \\ A\boldsymbol{\omega}_\xi & A\boldsymbol{\omega}_\eta & A\boldsymbol{\omega}_\sigma \end{vmatrix} = \\ = \boldsymbol{e}_\xi\left(C - A\right)\boldsymbol{\omega}_\eta\boldsymbol{\omega}_\sigma - \boldsymbol{e}_\eta\left(C - A\right)\boldsymbol{\omega}_\xi\boldsymbol{\omega}_\sigma. \end{gathered} \tag{8}$$

Затем скалярно домножим левую и правую часть формулы (7) на вектор $\boldsymbol{r}$ и учтем тот факт, что векторное произведение кинетического момента и угловой скорости является вектором, лежащим в плоскости, перпендикулярной оси $G\sigma$ в силу равенства экваториальных моментов инерции вдоль осей $G\xi$ и $G\eta$. Тогда первое слагаемое равенства (3) записывается в виде

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{K}}\cdot\boldsymbol{r} &= \left(-\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{K}+\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}+\boldsymbol{M}\right)\cdot\boldsymbol{r} = -\left(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{K}+\boldsymbol{M}\right)\cdot\left(a\boldsymbol{e}_\sigma-\rho\boldsymbol{\gamma}\right)= \\ &= -\rho\boldsymbol{\gamma}\left(\boldsymbol{K}\times\boldsymbol{\omega}\right)+\boldsymbol{M}\cdot\left(a\boldsymbol{e}_\sigma-\rho\boldsymbol{\gamma}\right).\end{aligned}\tag{9}$$

Из формул (6) и (9) следует, что в случае равенства нулю момента сил сопротивления воздуха $\boldsymbol{M}$, суммарный результат формул (6) и (9) также равен нулю и интеграл Джелетта имеет место. В работе [2] была рассмотрена именно такая задача о движении шара по горизонтальной поверхности. Дополнительный учет сопротивления воздуха может модифицировать траекторию движения точки касания волчка горизонтальной поверхности в виде скручивающейся и раскручивающейся спиралей малого радиуса.

В работе экспериментально исследована траектория движения точки касания волчка tip-top горизонтальной поверхности. Показано, что после переворота волчка на ножку и подъема центра тяжести выше центра описанной вокруг него сферы он движется по скручивающейся спирали, а после обратного переворота на шляпку – по раскручивающейся спирали Подобное движение шара описывается в теоретической работе [2], однако параметры спиралей не совпадают с предсказываемыми значениями. При сравнении теоретической и экспериментальной модели сделан вывод, что в теоретической модели необходимо дополнительно учитывать момент сопротивления воздуха, который, однако, усложняет ее, так как условия для существования интеграла Джелетта становятся невыполнимыми.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карлович Т.Б., Васеха А.П., Ласовский Р.Н. Экспериментальное исследование траектории точки касания волчка тип-топ с горизонтальной поверхностью при его движении // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. – 2024. № 2 (284). С. 19-24.

2. Маркеев А.П. К динамике волчка // Изв. АН СССР. Механ. тв. тела. – 1984. № 3. С. 30-38.

3. Карапетян А.В. Глобальный качественный анализ динамики китайского волчка (тип-топ) // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2008. Т. 43, № 3. С. 33-41.