$M_2 = \{0;100^\circ C\}$ на уровне океана изменяется, когда процесс протекает на горной вершине, где вода закипает при меньшей температуре. 4. Самый сложный пример – «Периодический закон химических элементов» Д. И. Менделеева, записанный им в виде Таблицы. Ее современный вид содержит разбиение аргумента (заряда ядра) на 18 групп (вместо прежних 8). Группа $M_1 = \{3Li, 11Na, 19K, ...\}$ – щелочные металлы, группа $M_{18} = \{10Ne, 18Ar, 36Kr, ...\}$ – инертные газы. Химические свойства элементов группы определяется не общим числом электронов, равным заряду ядра, а их числом во внешней оболочке. Подобная закономерность описана выше у КС. Все элементы в M_1 имеют по одному внешнему электрону, а у элементов M_{18} внешняя оболочка пуста.

УДК 514.76

Н.П. Можей, доц. (БГУИР, г. Минск, РБ)

НЕРЕДУКТИВНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА СО СВЯЗНОСТЬЮ И НЕНУЛЕВОЙ АЛГЕБРОЙ ГОЛОНОМИИ

«Необходимость сравнивать те или иные геометрические величины в разных точках «кривого» пространства делает понятие связности одним из важнейших в геометрии и физике» [1]. С описанием трехмерных нередуктивных однородных пространств, допускающих связности только ненулевой кривизны, можно ознакомиться в статье [2], также в ней приведен более подробный тематический обзор и обоснование применяемых методов; в данной работе изучаются трехмерные нередуктивные пространства со связностью и ненулевой алгеброй голономии.

Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\bar{G}$, $G = \bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли $\bar{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра, соответствующая подгруппе G. Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к $\mathfrak{g}$ в $\bar{\mathfrak{g}}$, и факторпространство $\mathfrak{m} = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$. Аффинной связностью на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется такое отображение $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, что его ограничение на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представ-ление подалгебры $\mathfrak{g}$, а все отображение является $\mathfrak{g}$-инвариантным. Тензор кручения $T \in InvT_2^1(\mathfrak{m})$ и кривизны $R \in InvT_3^1(\mathfrak{m})$ имеют вид: $T(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = \Lambda(x)y_{\mathfrak{m}} - \Lambda(y)x_{\mathfrak{m}} - [x, y]_{\mathfrak{m}}$, $R(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y])$ для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$. Связность с нулевым тензором кривизны еще называется плоской. Будем говорить, что Λ имеет нулевое кручение или является связностью без кручения, если $T = 0$. Под эквиаффинной связностью будем понимать аффинную связность Λ (без кручения), для которой $\mathrm{tr}\Lambda(x) = 0$ для всех $x \in \bar{\mathfrak{g}}$. Однородное пространство редуктивно, если алгебра Ли $\bar{\mathfrak{g}}$ может быть разложена в прямую сумму векторных пространств – алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathrm{ad}(G)$–инвариантного подпространства, в противном случае пространство не является редуктивным. Этот класс однородных пространств ввел в рассмотрение П. К. Рашевский, у редуктивных пространств при параллельном переносе сохраняются тензор кривизны и тензор кручения. Если пространство редуктивно, то оно всегда допускает инвариантную связность [2]. Алгебра Ли группы голономии инвариантной связности на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ – это подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$ вида $V + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V] + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V]] + \ldots$, где V – подпространство, порожденное $\{[\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x,y]) \mid x, y \in \bar{\mathfrak{g}}\}$. Поскольку множество V порождается операторами кривизны, то если тензор кривизны ненулевой, то и алгебра голономии ненулевая.

Будем описывать пару $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ при помощи таблицы умножения алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}$. Через $\{e_1, ..., e_n\}$ обозначим базис $\bar{\mathfrak{g}}$ ($n = \dim \bar{\mathfrak{g}}$). Будем полагать, что $\mathfrak{g}$ порождается $e_1, ..., e_{n-3}$, а $\{u_1 = e_{n-2}, u_2 = e_{n-1}, u_3 = e_n\}$ – базис $\mathfrak{m}$. Для нумерации подалгебр используем запись $d.n$, а для нумерации пар – запись $d.n.m$, соответствующие приведенным в [2].

Теорема. *Если нередуктивная пара* $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$*, коразмерности 3 допускает инвариантные аффинные связности только с ненулевой алгеброй голономии, но не допускает эквиаффинных связностей, то* $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ *эквивалентна одной и только одной из пар 4.21.24, 4.21.25 (*$\delta = 0, 1$ *соответственно), 3.20.22, 3.20.27:*

<u>4.21.24</u>, <u>4.21.25</u>

	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3	
e_1	0	0	e_3	e_4	u_1	u_2	0	
e_2	0	0	e_4	0	0	u_1	e_2	
e_3	$-e_3$	$-e_4$	0	0	0	0	u_2	
e_4	$-e_4$	0	0	0	0	0	$e_4 + u_1$	
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	0	αe_4	
u_2	$-u_2$	$-u_1$	0	0	0	0	$\alpha e_3 + \delta e_4 - u_2$	
u_3	0	$-e_2$	$-u_2$	$-e_4 - u_1$	$-\alpha e_4$	$-\alpha e_3 - \delta e_4 + u_2$	0	$, \alpha < -1/4,$

<u>3.20.22</u>

	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3	
e_1	0	e_2	$(1/2)e_3$	u_1	0	$(1/2)u_3$	
e_2	$-e_2$	0	0	0	u_1	0	
e_3	$-(1/2)e_3$	0	0	0	e_3	u_1	,
u_1	$-u_1$	0	0	0	$2u_1$	0	
u_2	0	$-u_1$	$-e_3$	$-2u_1$	0	$e_3 - u_3$	
u_3	$-(1/2)u_3$	0	$-u_1$	0	$-e_3 + u_3$	0	

$$
\begin{array}{c|cccccc}
\underline{3.20.27} & \underline{e_1} & \underline{e_2} & \underline{e_3} & \underline{u_1} & \underline{u_2} & \underline{u_3} \\
e_1 & 0 & (4/5)e_2 & (3/5)e_3 & u_1 & (1/5)u_2 & (2/5)u_3 \\
e_2 & -(4/5)e_2 & 0 & 0 & 0 & u_1 & 0 \\
e_3 & -(3/5)e_3 & 0 & 0 & 0 & e_2 & u_1 \\
u_1 & -u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
u_2 & -(1/5)u_2 & -u_1 & -e_2 & 0 & 0 & e_3 \\
u_3 & -(2/5)u_3 & 0 & -u_1 & 0 & -e_3 & 0
\end{array}.
$$

В случаях 4.21.24 и 4.21.25 аффинная связность имеет вид:

$$
\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
\begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
\begin{pmatrix} r_{1,1} & -q_{1,3} & 0 \\ 0 & r_{1,1}+1 & 0 \\ 0 & 0 & r_{1,1}+p_{1,3}+1 \end{pmatrix},
$$

здесь и далее $p_{ij}, q_{ij}, r_{ij} \in \mathbb{R} \quad (i, j = \overline{1,3})$), связность не является эквиаффинной при любых значениях параметров, так как даже $\mathfrak{g}$ не принадлежит $\mathfrak{sl}(\mathfrak{m})$. Аналогично, в случае 3.20.27 аффинная связность имеет вид

$$
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

и не является эквиаффинной. В случае 3.20.22 аффинная связность:

$$
\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
\begin{pmatrix} q_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & q_{1,1}+p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & q_{1,1}+1 \end{pmatrix},
\begin{pmatrix} 0 & 0 & r_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{1,2} & 0 \end{pmatrix},
$$

связность не является эквиаффинной. Прямыми вычислениями получаем, что других трехмерных нередуктивных однородных пространств (допускающих инвариантные связности только только с ненулевой алгеброй голономии), не допускающих эквиаффинных связностей, нет.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеевский Д.В., Виноградов А.М., Лычагин В.В. Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии // Итоги науки и техники. Совр. пробл. мат. Фундамент. направл. М.: ВИНИТИ АН СССР. 1988. Т. 28. С. 5–297.

2. Можей Н.П. Связности ненулевой кривизны на трехмерных нередуктивных пространствах // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, № 4. С. 381–393.