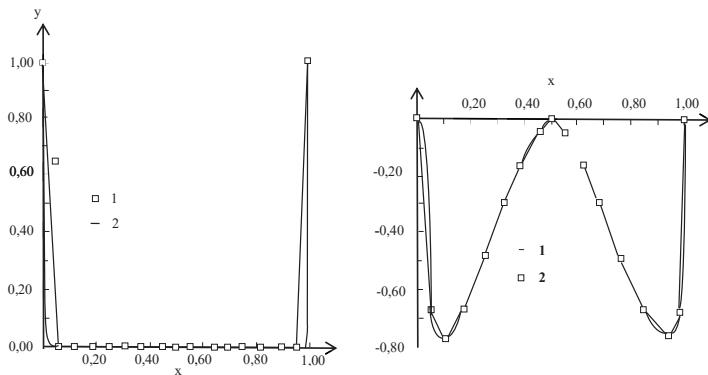


Пример1. Решить граничную задачу с одним пограничным слоем вида  $\varepsilon y''(x) - (x - 1/2)y'(x) - y(x) = 0$  с граничными условиями:  $y(0) = 1, y(1) = 1, \varepsilon = 10^{-3}$ .

Пример 2. Решить граничную задачу с двумя пограничными слоями вида  $\varepsilon y''(x) - y(x) = \cos^2 \pi x + 2\varepsilon \pi^2 \cos 2\pi x$  с граничными условиями:  $y(0) = 0, y(1) = 0, \varepsilon = 10^{-3}$ .

Решения обеих задач представлено в виде двух графиков.



## ЛИТЕРАТУРА

1. Соловьева, И.Ф. Исследование влияния малого параметра на решение граничных задач с пограничным слоем // Труды БГТУ. – 2019. – № 2: Физ.-мат. науки и информатика. – С. 12–16.

УДК 535+539.196.5+517.925

В.А. Савва, проф.; С.А. Банжак, асп.  
(БГТУ. г. Минск, РБ)

## ОСОБЕННОСТИ ДИНАМИКИ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ, ВОЗБУЖДАЕМЫХ КОГЕРЕНТНЫМ ПОЛЕМ ИЗЛУЧЕНИЯ, И ЗАКОНЫ ДИАЛЕКТИКИ

Разработанный авторами дискретный спектральный алгоритм приводит к точному решению задачи о когерентном возбуждении квантовых систем (КС) классическим излучением. Эта модель, как и ее полностью квантовый вариант лежат в основе ряда современных технологий: лазерное разделение изотопов, управление химическими реакциями, создание квантовых компьютеров, криптографии и др. Алгоритм использует два пространства: энергия – время, с искомой функцией  $a_n(t)$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$  – амплитудой вероятности КС и спектральное

Фурье пространство с задаваемой спектральной функцией  $\sigma(x)$  дискретного аргумента  $x$ , имеющего смысл частоты. Все величины безразмерны. КС характеризуется натуральным  $N$  – числом переходов между уровнями, на которые действует излучение с заданными амплитудой и частотой, дипольными моментами  $f_1, f_2, \dots, f_N$  переходов и относительными отстройками  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N$  частот переходов от частоты излучения. Используя спектральную функцию, алгоритм строит спектры Фурье КС. Спектры связаны с амплитудами дискретным конечным преобразованием Фурье. Амплитуды приводят к экспериментально определяемой величине – вероятностному распределению КС по уровням энергии. Распределение (иначе населенности уровней) зависит от времени и от физических и спектральных параметров КС. Алгоритм также доставляет взаимно-однозначное соотношение между физическими и спектральными параметрами. Таким образом получаем точное решение задачи, полное представление о динамике возбуждения КС и физические характеристики КС. Параметры КС могут изменяться в определенных пределах, потому результаты описывают многопараметрическое семейство КС с однородным и неоднородным Фурье пространством. Простой случай ( $N = 2$ )–КС, два нижних перехода  $E_0 \xleftarrow[\varepsilon_1]{f_1=1} E_1 \xleftarrow[\varepsilon_2]{f_2} E_2$  которой возбуждает излучение, предусматривает задание спектральной нормированной функции

$$\sigma(x) = \{1 - a - b, a, b\}; \quad x = \{0, 1, c\}; \quad \sum_{k=0}^{k=N=2} \sigma(x_k) = 1. \quad (1)$$

Здесь  $\{a, b; c\}$  – спектральные параметры,  $x$  безразмерная сетка Фурье частот,  $a, b$  – амплитуды спектра на частотах. Спектральная функция полностью определяет Фурье пространство КС и является спектральным образом амплитуды  $a_0(t)$  КС. Населенности ( $N = 2$ )–КС

$\rho_n(rt) = A_n + B_n \cos(rt) + C_n \cos(crt) + D_n((c-1)rt); \quad \rho_0 + \rho_1 + \rho_2 = 1 \quad (2)$  содержат три гармоники, коэффициенты  $A_n, \dots, D_n$  и величина  $r(a, b; c)$  зависят от спектральных параметров. Этот полигармонический колебательный режим является периодическим с разными периодами или хаотическим, в зависимости от соизмеримости частот. Это определяют спектральные параметры. Режим описывает КС, обладающие однородным (при  $c = 2$ ) и неоднородным ( $c \neq 2$ ) пространством Фурье.

Выражение (2) описывает сложную динамику ( $N = 2$ )–КС. Особенности динамики характеризует введенная нами целевая функция

$$T(c) - 2\pi M(c), \quad M(c) = \left\{ \begin{array}{ll} \min\{q, pq, |p - q|q\}, & c = (p/q) \in \mathbb{Q} \\ \infty, & c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{array} \right\} \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

описывающая период колебаний населенностей. Она зависит от параметра-аргумента  $c$  спектральной функции  $\sigma(x)$ . Множитель  $M(c)$  принимает целые значения из множества натуральных чисел, конечные при рациональных  $c$  и бесконечное при иррациональных. График функции (3) построить невозможно, на любом интервале значений  $c$  она имеет бесконечно много разрывов-скачков разнообразных определённых конечных значений, а также скачки бесконечной величины. Последние соответствуют хаотическому режиму, когда все частицы, стартовав с основного уровня  $E_0$  более никогда вместе не возвращаются на этот уровень. Это свойство – результат специфической архитектуры действительных чисел. Они составляют множество значений, которые принимает аргумент целевой функции. Действительные числа состоят из рациональных и иррациональных чисел, своеобразно перемешанных. Необычная функция (3) родственна известной функции Дирихле. Но значение целевой функции КС, то есть величина периода определяется не значением ее аргумента, а величиной его дробной части. Чем она меньше, тем период колебаний больше. Некоторое представление о динамике даёт Таблица значений периода колебаний при разных значениях ее аргумента, спектрального параметра  $c$ . Колебательный режим качественно изменяется, когда аргумент  $c$  от рационального числа переходит к иррациональному или наоборот. Оба числа могут быть бесконечно близкими по величине, но числа эти качественно различны. Это принципиально важно для значений функции, описывающей колебательный процесс. Сдвиг  $c$  вызывает резкую смену: количественную периодического режима и качественную, когда периодичность сменяется хаосом или наоборот.

Период  $T(c) = 2\pi M(c)$  полигармонического режима колебаний населенностей когерентно возбуждаемой квантовой системы

$c$	2	1.5		2.2	2.1	2.04	2.02	2.03	$\sqrt{5.063} \approx 2.25011\dots$
	3	2.5	2.25	2.4	2.3	2.08	2.06	2.07	$\sqrt{6.251} \approx 2.5002\dots$
	4	3.5		2.8	2.9			2.09	$\sqrt{8} \approx 2.828\dots$
M	1	2	4	5	10	25	50	100	$\infty$

Скачки-разрывы непрерывности целевой функции, отражающие количественные и качественные смены полигармонического режима возбуждаемой КС, происходят даже при малейших изменениях значений параметра  $c$ . Они вызваны неизбежными изменениями внешних условий, даже измерением и наблюдением, которые меняют физиче-

ские параметры КС, однозначно связанные со спектральными её параметрами, как это показывает алгоритм. В таблице видно, как очень малые изменения аргумента приодят к резкой смене периода: сравните колонки с  $M = 2$  и  $M = 4$  с  $M = \infty$ , или колонки с  $M = 25, 50, 100$ . Полигармонический режим в своём периодическом варианте демонстрирует сосуществование противоположностей в едином колебательном процессе, он представляет строгую периодичность вместе с участком непериодических пульсаций населенностей на протяжении каждого периода. Но режим показывает и «единство и борьбу противоположностей» периодического с непериодическим. При больших периодах на начальном этапе большого периода пульсации выглядят периодическими, различия их амплитуд ничтожны, лежат за пределами наблюдения (измерения). Только к середине периода различие становится наблюдаемым. Пропадает иллюзия, что нарушение периодичности возникает не сразу, но на деле просто ее не сразу удается измерить.

Таким образом, динамика когерентно возбуждаемой КС наглядно иллюстрирует законы диалектики: «Закон перехода количественных изменений в качественные, Закон борьбы и единства противоположностей и Закон отрицания отрицания». Когда периодический режим становится хаотическим, а потом уступает место новому периодическому режиму. Законы диалектики всеобщи, и несмотря на необычные свойства целевой функции КС, в природе несомненно существуют иные процессы и объекты, описываемые целевыми функциями с подобными свойствами. Такие примеры есть. Их функции обладают разделенным аргументом. Это множество  $M$  чисел, упорядоченных по величине, но обладающих двумя или более качествами по отношению к значениям функции. У КС это подмножества рациональных и иррациональных чисел. Такой аргумент естественно разделен на подмножества  $M_k$ , каждое из них часто содержит числа из разных участков общего множества  $M$ . Объекты не похожи друг на друга, но имеют единое математическое описание. Приведем примеры. 1. Случайное событие: партнеры подбрасывают игральный кубик. Приз – выпадение 6. Функция  $\Phi(x = 6) = 1$ ,  $\Phi(x \neq 6) = 0$ . Разделение:  $M_1 = \{1, \dots, 5\}$ ,  $M_2 = \{6\}$ . Изменим условие игры: приз – выпадение числа, не являющегося простым. Разбиение иное, совпадает с математическим качественным различием чисел, разбиение с  $M_2 = \{4; 6\}$ . 2. Функция Дирихле равная 1 и 0, когда ее аргумент  $x$  выражен рациональным и иррациональным числом, соответственно:  $M_1$  – рациональные и  $M_2$  – иррациональные числа. 3. Функция фазовых переходов  $H_2O$  лед – вода – пар при изменении температуры. Разбиение аргумента на подмножества с

$M_2 = \{0; 100^\circ C\}$  на уровне океана изменяется, когда процесс протекает на горной вершине, где вода закипает при меньшей температуре. 4. Самый сложный пример – «Периодический закон химических элементов» Д. И. Менделеева, записанный им в виде Таблицы. Ее современный вид содержит разбиение аргумента (заряда ядра) на 18 групп (вместо прежних 8). Группа  $M_1 = \{3Li, 11Na, 19K, \dots\}$  – щелочные металлы, группа  $M_{18} = \{10Ne, 18Ar, 36Kr, \dots\}$  – инертные газы. Химические свойства элементов группы определяется не общим числом электронов, равным заряду ядра, а их числом во внешней оболочке. Подобная закономерность описана выше у КС. Все элементы в  $M_1$  имеют по одному внешнему электрону, а у элементов  $M_{18}$  внешняя оболочка пуста.

УДК 514.76

Н.П. Можей, доц. (БГУИР, г. Минск, РБ)

## НЕРЕДУКТИВНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА СО СВЯЗНОСТЬЮ И НЕНУЛЕВОЙ АЛГЕБРОЙ ГОЛОНOMИИ

«Необходимо сравнивать те или иные геометрические величины в разных точках «кривого» пространства делает понятие связности одним из важнейших в геометрии и физике» [1]. С описанием трехмерных нередуктивных однородных пространств, допускающих связности только ненулевой кривизны, можно ознакомиться в статье [2], также в ней приведен более подробный тематический обзор и обоснование применяемых методов; в данной работе изучаются трехмерные нередуктивные пространства со связностью и ненулевой алгеброй голономии.

Пусть  $M$  – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа  $\bar{G}$ ,  $G = \bar{G}_x$  – стабилизатор произвольной точки  $x \in M$ . Пусть  $\bar{\mathfrak{g}}$  – алгебра Ли группы Ли  $\bar{G}$ , а  $\mathfrak{g}$  – подалгебра, соответствующая подгруппе  $G$ . Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к  $\mathfrak{g}$  в  $\bar{\mathfrak{g}}$ , и факторпространство  $\mathfrak{m} = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ . Аффинной связностью на паре  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$  называется такое отображение  $\Lambda: \bar{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ , что его ограничение на  $\mathfrak{g}$  есть изотропное представление подалгебры  $\mathfrak{g}$ , а все отображение является  $\mathfrak{g}$ -инвариантным. Тензор кручения  $T \in InvT_2^1(\mathfrak{m})$  и кривизны  $R \in InvT_3^1(\mathfrak{m})$  имеют вид:  $T(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = \Lambda(x)y_{\mathfrak{m}} - \Lambda(y)x_{\mathfrak{m}} - [x, y]_{\mathfrak{m}}$ ,  $R(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y])$  для всех  $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$ . Связность с нулевым тензором кривизны еще