УДК 519.624

И.Ф. Соловьева, доц. (БГТУ, г. Минск, РБ)

ОСОБЕННОСТИ ПОВЕДЕНИЯ РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ В ЗОНАХ ПОГРАНИЧНЫХ СЛОЕВ

Математическими моделями диффузионно-конвективных процессов являются двухточечные граничные задачи. При этом диффузионным членом является член, содержащий производные второго порядка, а конвективным членом будет называться слагаемое, включающее в себя производные первого порядка. Такого рода задачи возникают в дифференциальных уравнениях, содержащих малый параметр при старшей производной, и являются задачами с одним или двумя пограничными слоями.

Задачи с пограничным слоем относятся к области гидродинамики и аэродинамики, где изучается поведение жидкости или газа вблизи поверхности тела. Пограничный слой – это тонкий слой жидкости или газа рядом с поверхностью, где скорость течения изменяется от нуля (на самой поверхности из-за сцепления) до значения, соответствующего основному потоку.

При малом $\varepsilon > 0$ решение может испытывать резкие изменения вблизи одной из границ области, что приводит к возникновению пограничного слоя. Этот слой — достаточно узкая область, расположенная вблизи границ интервала, где решение, а особенно градиент решения, неограниченно растет, в то время как во внутренней области решение изменяется достаточно плавно.

Рассмотрим двухточечные граничные задачи с малым параметром при старшей производной для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка вида:

$$\begin{cases} -\varepsilon y''(x) + b(x)y(x) = f(x), \ 0 < x < 1, \\ y(0) = A, \quad y(1) = B, \quad b(x) > 0, \quad \varepsilon > 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр при старшей производной. Задача вида (1) имеет два пограничных слоя.

Граничная задача с одним пограничным слоем имеет вид:

$$\begin{cases} \varepsilon y''(x) + a(x)\, y'(x) - b(x)y(x) = f(x), \ 0 < x < 1, \\ y(0) = A, \quad y(1) = B, \quad a(x) > 0, \ b(x) > 0, \quad \varepsilon > 0, \end{cases} \tag{2}$$

Если $a(x) > 0$, то пограничный слой чаще всего возникает в начале, то есть в левой части заданного отрезка вблизи точки $x = 0$, а если $a(x) < 0$, то в конце отрезка, то есть в его правой части, вблизи точки $x = 1$.

Представим обыкновенное дифференциальное уравнение (1) в виде системы о. д. у. вида

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \quad 0 < x < 1, \\ y_2' = -\dfrac{f(x)}{\varepsilon} + \dfrac{b(x)}{\varepsilon} y_1, \end{cases} \tag{3}$$

с граничными условиями:

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(a) + \beta_1 y_2(a) = \gamma_1, \quad \alpha_1{}^2 + \beta_1{}^2 = 1, \\ \alpha_2 y_1(b) + \beta_2 y_2(b) = \gamma_{2,} \quad \alpha_2{}^2 + \beta_2{}^2 = 1, \end{cases} \tag{4}$$

где $f(x)$ – функция, непрерывная на отрезке $[a,b]$, α_i, β_i, γ_i – заданные числа. Предположим, что существует единственное искомое решение задачи (1), (4). Обозначим это решение через $y_1(x)$, а его градиент через $y_2(x)$.

В виде системы уравнений (3) можно представить любое линейное о. д. у. Граничные условия вида (4) представлены в общем виде, что позволяет рассматривать и более широкий класс задач.

Для решения граничных задач с малым параметром при старшей производной и с возникающими при этом пограничными слоями используем метод дифференциальной ортогональной прогонки. А чтобы вблизи пограничных слоев не так быстро росли решение и градиент решения введем в рассмотрение регулирующие множители $m_1(x,\varepsilon) > 0$ и $m_2(x,\varepsilon) > 0$.

Регулирующие множители составляем в виде стабилизируемых произведений $m_1(x,\varepsilon)y_1(x)$ и $m_2(x,\varepsilon)y_2(x)$. Они регулируют поведение функции $y(x)$ и его производной $y'(x)$ вблизи зон пограничных слоев.

Используя метод дифференциальной ортогональной прогонки с найденными решениями трех задач Коши $\Theta(x)$, $u(x)$, $v(x)$, получим выражения для искомого решения и его градиента в виде [1]:

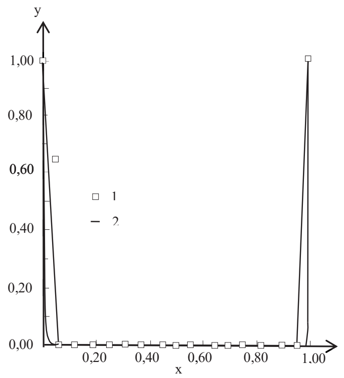
$$\begin{cases} m_1(x,\varepsilon) y_1(x) = \sin\Theta(x) u(x) + \cos\Theta(x) v(x), \\ m_2(x,\varepsilon) y_2(x) = \cos\Theta(x) u(x) - \sin\Theta(x) v(x), \end{cases} \tag{5}$$

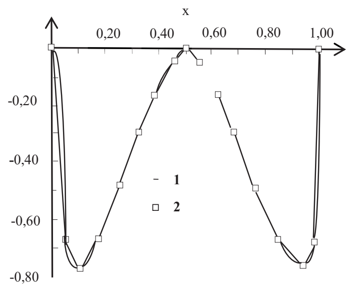
В качестве иллюстрации данного метода представим решение двух задач с малым параметром при старшей производной:

Пример1. Решить граничную задачу с одним пограничным слоем вида $\varepsilon y''(x)-(x-1/2)y'(x)-y(x)=0$ с граничными условиями: $y(0)=1,\ y(1)=1$, $\varepsilon=10^{-3}$.

Пример 2. Решить граничную задачу с двумя пограничными слоями вида $\varepsilon y''(x)-y(x)=\cos^2\pi x+2\varepsilon\pi^2\cos 2\pi x$ с граничными условиями: $y(0)=0,\ y(1)=0$, $\varepsilon=10^{-3}$.

Решения обеих задач представлено в виде двух графиков.





ЛИТЕРАТУРА

1. Соловьева, И.Ф. Исследование влияния малого параметра на решение граничных задач с пограничным слоем // Труды БГТУ. – 2019. – № 2: Физ.-мат. науки и информатика. – С. 12–16.

УДК 535+539.196.5+517.925

В.А. Савва, проф.; С.А. Банжак, асп.
(БГТУ. г. Минск, РБ)

ОСОБЕННОСТИ ДИНАМИКИ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ, ВОЗБУЖДАЕМЫХ КОГЕРЕНТНЫМ ПОЛЕМ ИЗЛУЧЕНИЯ, И ЗАКОНЫ ДИАЛЕКТИКИ

Разработанный авторами дискретный спектральный алгоритм приводит к точному решению задачи о когерентном возбуждении квантовых систем (КС) классическим излучением. Эта модель, как и ее полностью квантовый вариант лежат в основе ряда современных технологий: лазерное разделение изотопов, управление химическими реакциями, создание квантовых компьютеров, криптографии и др. Алгоритм использует два пространства: энергия –время, с искомой функцией $a_n(t),\ n=0,1,\ldots,N$ – амплитудой вероятности КС и спектральное