УДК 517.968

С.В. Пономарева, доц (ГП «Стравита», г. Минск);
О.Н. Пыжкова, зав. каф. (БГТУ, г. Минск, РБ)

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ КОШИ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ КАПУТО

На сегодняшний день существует немалое число видов дробного интегродифференцирования, обобщающих производные и интегралы целых порядков, что позволяет тонко ранжировать подходы к решению возникающих в этой области задач в зависимости от условий и требований к каждому конкретному случаю.

При этом, например, производные нецелого порядка в форме Римана-Лиувилля наиболее близки к «привычному» дифференцированию для функций, определенных и обладающих свойством гладкости нужного порядка на конечном отрезке действительной оси, на полуоси это уже производные Чженя или Лиувилля, в случаях периодических или почти периодических функций предпочтительней использовать конструкции Вейля, в приближенных вычислениях наиболее удобной оказывается конструкция Грюнвальда-Летникова, производная Капуто-Герасимова является более простой с вычислительной точки зрения, хотя и не равна в общем случае обычной производной при целых порядках.

Каждая конструкция дробного дифференцирования «старается сохранить» какие-то ключевые свойства производных целых порядков, необходимые для определенного класса задач, жертвуя другими, что усложняет выбор вида дробной производной для конкретной задачи. Описание и свойства указанных видов дробного интегродифференцирования можно найти в [1], [2].

В данной работе будем рассматривать задачу Коши

$$D^{\alpha}x(t) = f(t, x), \tag{1}$$

$$x^{(k)}(0) = \xi_k,\ k = \overline{0,\ m-1}, \tag{2}$$

где m – целое число из условия $m–1 < \alpha \le m$, D^{α} – дробная производная порядка α в смысле Капуто (если $x(t)$ является гладкой функцией):

$$D^{\alpha}x(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_0^t (t-s)^{m-\alpha-1}\, x^{(m)}(s)ds,\ \ t > 0.$$

Функцию $f(t, x)$ будем предполагать непрерывной по совокупности переменных на множестве $(0, T] \times (-\infty;\ \infty)$.

Задача будет изучаться в специальном пространстве функций

$C_{(m-\alpha)}[0,T]$, представимых в виде $x(t)=\xi\frac{t^{m-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}+x_c(t)$ $(\xi\in\mathbb{R},\ x_c(t)\in C[0,T])$ с нормой $\left\|\xi\frac{t^{m-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}+x(t)\right\|_{(m-\alpha)}=|\xi|+\|x(t)\|_C$. Это пространство не совпадает с весовым функциональным пространством $C_{m-\alpha}[0,T]$ (но его замыкание совпадает), однако непрерывно в него вложено (см. [3]). Напомним, что пространство $C_\nu[0,T]$ весовых функций определяется как пространство функций *x(t)*, заданных на отрезке [0, *T*], таких, что $t^\nu x(t)\in C[0,T]$:

$$C_\nu[0,T]=\left\{x(t)\colon \|x\|_{C_\nu}=\|t^\nu x(t)\|_C<\infty\right\},\ C_0[0,T]=C[0,T].$$

В работе [3] рассматривается задача типа Коши для дробно-дифференциальных уравнений, но с начальными условиями в виде дробной производной Римана-Лиувилля в специальных функциональных пространствах $C_{(1-\alpha)}[0,T]$, а также даются условия разрешимости и единственности решения.

Вопросы разрешимости задачи (1)–(2) в шкалах весовых пространств исследуются, например, в [4], где устанавливается нелокальная теорема о единственной разрешимости. В [5] задача типа Коши исследуется в случае неограниченной правой части образующего уравнения.

Задача Коши с начальными условиями в виде (2) выглядит более естественно по сравнению с задачей типа Коши с начальными условиями в виде производных дробного порядка, однако нужно помнить об особенности дробной конструкции Капуто, не дающей в общем случае равенства «обычной» производной при целых значениях порядка дифференцирования.

Во всех рассмотренных случаях исследование разрешимости начальной задачи сводится к отысканию неподвижных точек интегрального оператора вольтерровского типа.

Учитывая результаты работ [3–5], рассмотрим задачу (1)–(2) в специальных функциональных пространствах $C_{(1-\alpha)}[0,T]$ с $0<\alpha<1$.

Пусть нелинейность правой части (1) удовлетворяет неравенству (аналогично рассмотренной в [3] задаче типа Коши)

$$|f(t,u)|\le\mu(t)+\nu(t)|u|, \qquad (3)$$

где *μ(t)* и *ν(t)* – некоторые непрерывные неотрицательные функции.

Следуя классической схеме, отыскание решений задачи Коши (1)–(2) сводится к нахождению неподвижных точек интегрального оператора

$$Ax(t)=\xi\frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}f\big(s,x(s)\big)ds.$$

Оператор A будет ограниченно действовать в пространстве $C_{(1-\alpha)}[0,T]$, если для функций $\mu(t)$ и $\nu(t)$ выполняются условия

$$\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mu(s)ds \in C[0,T]\,, \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}s^{\alpha-1}\nu(s)ds \in C[0,T]. \quad (4)$$

Более того, этот оператор является вполне непрерывным (см. [3]).

Согласно принципу Шаудера неподвижной точки в банаховом пространстве *X*, вполне непрерывный оператор, оставляющий инвариантным ограниченное замкнутое выпуклое множество *B*∈*X*, имеет в *B* по крайней мере одну неподвижную точку (т.е. уравнение x=Ax имеет по крайней мере одно решение).

В качестве инвариантного для оператора *A* множества будем рассматривать множество $B = \{x(t): |x(t) - \xi t^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)| \leq u(t)\}$, где *u(t)* – непрерывная функция.

Из рассуждений вышеприведенных вытекает следующая теорема:

Теорема 1. Пусть для правой части уравнения (1) выполняются ограничения (3) и (4). Тогда задача Коши (1)-(2) при любом ξ ∈R имеет хотя бы одно решение $x \in C_{(1-\alpha)}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

2. Kilbas, A.A. Theory and Applications of Fractional Differential Equations (North-Holland Mathematics Studies. Vol. 204) / A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo. – Elsevier, 2006. – 523 p. – https://doi.org/10.1016/s0304-0208(06 x8001-5).

3. Забрейко, П.П. О разрешимости задачи Коши для уравнений с дробными производными Римана–Лиувилля / П. П. Забрейко, С. В. Пономарева // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2018. – Т. 62, № 4. – С. 391-397. – https://doi. org/10.29235/1561-8323-2018-62-4-391-397.

4. Баркова, Е.А. Нелокальная теорема о задаче коши для дифференциальных уравнений дробных порядков в весовых пространствах непрерывных функций / Е. А. Баркова, П. П. Забрейко, // Весці Нац. акад. навук Беларусі. Серыя фіз.-мат. навук. – 2015. – № 4. – С. 48-52.

5. Забрейко, П.П. О решении задачи Коши с неограниченной правой частью для уравнений дробного порядка / П.П. Забрейко, С.В. Пономарева // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2020. – Т. 64, № 1. – С. 13-20. – https://doi. org/10.29235/1561- 8323-2020-64-1-13-20