УДК 517.584

Л.Д. Яроцкая, доц. (БГТУ, г. Минск, РБ)

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМ СУММИРОВАНИЯ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

При решении вычислительных задач, связанных с суммированием величин, отношение которых является некоторой рациональной функцией, важную роль играют гипергеометрические ряды.

Обобщенный гипергеометрический ряд

$$ {}_pF_q\left(\begin{matrix} a_1,\ldots,a_p \\ b_1,\ldots,b_q \end{matrix};z\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_1)_k\ldots(a_p)_k}{(b_1)_k\ldots(b_q)_k}\frac{z^k}{k!} \qquad (1)$$

содержит в числителе p, а в знаменателе q параметров, коэффициенты определяются символом Похгаммера по формуле:

$$(a)_k=a(a+1)\ldots(a+k-1)=\frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)},\quad (a)_0=1,$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера [1]. Чтобы избежать деления на ноль в правой части (1), ни одно b не может быть нулем или целым отрицательным. В остальном все a и b могут быть любыми. Отрицательное целое число в качестве верхнего параметра превращает бесконечный ряд в конечную сумму.

Г-функция является одной из простейших неэлементарных функций и осуществляет естественное распространение факториала на вещественные значения аргумента

$$\Gamma(k+1)=k!,\quad \Gamma(1)=1.$$

Отметим, что вопросы сходимости бесконечных гипергеометрических рядов рассматриваются в теории функции комплексного переменного. Для исследования сходимости ряда можно применить, например, признак Даламбера.

Рассмотрим, например, бесконечный ряд с отношением членов

$$\frac{u_{k+1}}{u_k}=\frac{k^2+6k+8}{9k^2+1},$$

которые являются некоторыми многочленами от k. Согласно основной теореме алгебры любая рациональная функция от k может быть разложена на линейные множители над полем комплексных чисел. Имеем

$$\frac{u_{k+1}}{u_k}=\frac{k^2+6k+8}{9k^2+1}=\frac{(k+2)(k+4)(k+1)(1/9)}{(k+i/3)(k-i/3)(k+1)}.$$

В числитель и знаменатель добавили множитель $(k+1)$, константу обозначим z. Таким образом,

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = {}_3F_2\left(\begin{matrix}2,4,1\\ i/3,-i/3\end{matrix};\frac{1}{9}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2)_k(4)_k(1)_k}{(i/3)_k(-i/3)_k}\frac{(1/9)^k}{k!}=$$

$$=1+2\cdot 4+\ldots+\frac{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2+k-1)\cdot 4\cdot 5\ldots\cdot(4+k-1)}{10\cdot\ldots\cdot\left(9(k-1)^2+1\right)}+\ldots.$$

Обобщенные гипергеометрические ряды порождают специальный класс функций – функции гипергеометрического типа, которые при частных значениях своих параметров содержат такие простые элементарные функции, как степенная, экспоненциальная, логарифмическая, специальные многочлены, тригонометрические и обратные тригонометрические функции, и являются естественными аналитическими обобщениями этих элементарных функций.

Гипергеометрические ряды (1) также могут быть использованы для вычислить в замкнутом виде некоторых сумм, содержащих, например, биномиальные коэффициенты. При этом используются следующие методы:

- придание специальных значений аргументу z,
- выбор в качестве параметров a или b отрицательных целых чисел,
- сравнение коэффициентов при одинаковых степенях z в различных выражениях для гипергеометрического ряда.

Приведем несколько формул такого рода при $z=1$.

Теорема суммирования Гаусса:

$$ {}_2F_1(a,b;c;1)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)},\quad \mathrm{Re}(c-a-b)>0. \qquad (2)$$

Теорема суммирования Вандермонда:

$$ {}_2F_1(-n,a;c;1)=\frac{(c-a)_n}{(c)_n}. \qquad (3)$$

Теорема суммирования Заальшютца:

$$ {}_3F_2(-n,a,b;c1+a+b-c-n;1)=\frac{(c-a)_n(c-b)_n}{(c)_n(c-a-b)_n}. \qquad (4)$$

Частным случаем формулы (2) является **биномиальная теорема**:

$$ {}_2F_1(-a,1;1;-z) = (1+z)^a = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} z^k, \tag{5} $$

которая имеет многочисленные приложения в различных областях, включая математику, статистику, компьютерные науки. Биномиальный коэффициент в правой части формулы (5), определенный для произвольного действительного показателя a, связан с Г-функцией следующим образом:

$$ \binom{a}{k} = \frac{\Gamma(1+a)}{k!\,\Gamma(1+a-k)}. $$

Отметим, что одно из фундаментальных тождеств для биномиальных коэффициентов – свертка Вандермонда:

$$ \sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n} $$

является следствием теоремы 3. Примерами сумм с двумя и тремя биномиальными коэффициентами являются формулы

$$ {}_2F_1(-a,1;-b;z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{a}{k}}{\binom{b}{k}} z^k, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{a}{k}}{\binom{b}{k}} = \frac{b+1}{b-a+1}, $$

$$ {}_2F_1(-a,-b;1-a+b;-1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{a}{k}\binom{b}{k}}{\binom{a-b-1}{k}} \text{ – формула Куммера.} $$

Отметим, что многочисленные результаты, относящиеся к теории специальных функций и, в частности, функций гипергеометрического типа, можно найти в справочнике [2] или на сайте Wolfram Functions Site.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М., «Наука», 1973. 296 с.

2. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М., «Наука», 1986. 800 с.