В, $x_2^* = 2.26$ — оптимальная ёмкость резервуара С, $x_3^* = 11.23$ — оптимальный годовой отбор воды на ирригацию, $x_4^* = 3.13$ — оптимальная мощность гидроэлектростанции.

Максимальная приведённая стоимость чистых выгод составляет:

$$max f(x) = f(x^*) = 524.8119 \text{ усл. единиц.}$$

Полученные результаты показывают возможность эффективного использования ресурсов при сбалансированном подходе к проектированию системы водоснабжения. Оптимальные параметры позволяют максимизировать выгоду, обеспечивая устойчивое водоснабжение для ирригации и энергетики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bazara, M., Shetty, C.M. Methods of Linear and Nonlinear Programming,1982. – 583 с.

2. Maass, Arthur. Design of Water Resource Systems. – Cambridge: Harvard University Press, 1962. – 459 с.

УДК 517.977

У.А. Анисович, студ.; В.В. Крахотко, доц.
(БГУ, г. Минск)

УПРАВЛЯЕМОСТЬ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ ДИНАМИЧЕСКИХ РЕГУЛЯТОРОВ. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

В докладе рассматривается задача управляемости ансамбля линейных непрерывных систем динамическим регулятором. Эта задача сводится к нахождению решения специальной задачи линейного программирования. Доказано достаточное условие управляемости таких систем и решено несколько примеров.

Рассмотрим линейную систему:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), x(0) = x_0, \tag{1}$$

где $x(t)$ – n-вектор состояния, x_0 – начальное состояние, A – (n × n)-матрица, B – (n × r)-матрица, $u(t)$ – r-вектор управления. Здесь матрицы A и B и вектор x_0 являются интервальными параметрами, удовлетворяющими следующим условиям: $\underline{A} \le A \le \overline{A}$, $\underline{B} \le B \le \overline{B}$, $\underline{x}_0 \le x_0 \le \overline{x}_0$. Матрицы A и B принимают значения независимо друг от друга, то есть мы имеем совокупность линейных систем (1), называемых ансамблем.

На вход системы (1) подадим управление

$$u(t) = Cy(t), \tag{2}$$

которое является выходом динамической системы

$$\dot{y}(t) = Dy(t), y(0) = y_{0,} \tag{3}$$

где C − постоянная матрица размерности (r × n), y, y_0 − n-векторы, D – (n × n)-матрица.

Зафиксировав матрицы *A, B* и некоторый вектор y_0, получим единственное решение для системы (1): $x(t_1) = My_0 - P$, где $P = -F(t_1, \tau)x_0$, $M = \int_0^{t_1} F(t_1, \tau)BCe^{D\tau}d\tau$ и $F(t, \tau)$ − фундаментальная матрица решений однородной системы.

Ансамбль систем (1) называется управляемым динамическим регулятором (3), если для любого начального состояния x_0 найдутся такой момент времени $t_1, (0 < t_1 < +\infty)$, и вектор y_0, что регулятор (3) приводит все сечения $x(t_1)$ решений ансамбля в нуль.

При такой формулировке задача управления имеет решение только в исключительных случаях. Поэтому вместо нее рассматривается задача нахождения такого вектора y_0, чтобы динамический регулятор (3) приводил все решения ансамбля в некоторую ε-окрестность нуля, то есть $|x(t_1)| = |My_0 - P| \le \varepsilon$, где вектор $|x(t_1)|$ состоит из модулей компонент вектора $x(t_1)$, ε − n-вектор, $\varepsilon \ge 0$, при этом значение $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i$ является минимальным. Тогда нахождение минимальной ε-окрестности нуля можно свести к решению задачи линейного программирования относительно переменных ε и y_0.

В силу [2], матрица *F* является интервальной, значит, матрицы *P* и *M* также принимают значения из некоторого интервала. Опираясь на результаты работы [2], получим задачу линейного программирования относительно ε, y_0 и ω:

$$\begin{aligned} & e'\varepsilon \to min, \\ & M_0 y_0 + \Delta M\omega - \varepsilon \le P_0 - \Delta P, \\ & -M_0 y_0 + \Delta M\omega - \varepsilon \le -P_0 - \Delta P, \\ & \varepsilon \ge 0, -\omega \le y_0 \le \omega. \end{aligned} \tag{4}$$

Множество планов этой задачи не пусто и целевая функция на нем ограничена снизу, значит, оптимальный план задачи существует.

Теорема. Для управляемости ансамбля систем (1) достаточно, чтобы разрешимая задача линейного программирования (4) имела оптимальный план (ε^0, y_0^0, ω^0) с $\varepsilon^0 = 0$. В противном случае пучок траекторий систем переходит в минимальную ε^0-окрестность нуля.

Пример 1.

Рассмотрим задачу управляемости системы (1) со следующими параметрами:

$$\begin{pmatrix} -0.1 & 0.7 \\ -0.75 & -0.1 \end{pmatrix} \le A \le \begin{pmatrix} -0.05 & 0.75 \\ -0.6 & -0.05 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.055 \\ 0.5 \end{pmatrix} \le B \le \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.65 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0.65 \\ 0.65 \end{pmatrix} \le x_0 \le \begin{pmatrix} 0.85 \\ 0.85 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 2 & -0.5 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} -0.4 & 0.3 \\ -0.2 & -0.4 \end{pmatrix}.$$

С этими параметрами решив задачу (4), получим оптимальный план (рис. 1).

$$\varepsilon^0 = \begin{pmatrix} 0.3995 \\ 0.0688 \end{pmatrix}, \; y_0^0 = \begin{pmatrix} -0.4383 \\ 3.4709 \end{pmatrix}.$$

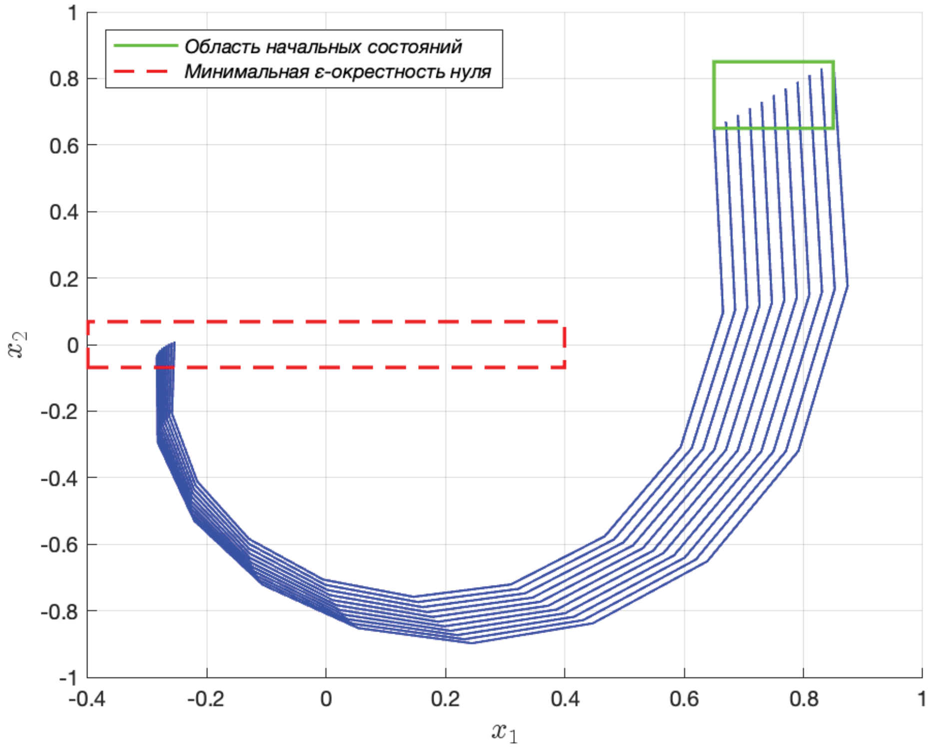

Рисунок 1 – Фазовый портрет траекторий $t_1 = 3, N = 10$

Как видно из рис. 1, все траектории ансамбля попадают в найденную ε^0-окрестность нуля за конечное время.

Пример 2.

Возьмем систему с параметрами:

$$\begin{pmatrix} -0.2 & 0.82 \\ -0.87 & -0.1 \end{pmatrix} \le A \le \begin{pmatrix} -0.15 & 0.87 \\ -0.72 & -0.05 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.06 \\ 0.64 \end{pmatrix} \le B \le \begin{pmatrix} 0.105 \\ 0.79 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -0.75 \\ -0.75 \end{pmatrix} \le x_0 \le \begin{pmatrix} -0.55 \\ -0.65 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1.88 & -0.56 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} -0.074 & 0.55 \\ -0.045 & -0.54 \end{pmatrix}.$$

Решая задачу (4), получим (рис. 2):

$$\varepsilon^0 = \begin{pmatrix} 0.2303 \\ 0.1314 \end{pmatrix}, \ y_0^0 = \begin{pmatrix} 0.3467 \\ -1.0428 \end{pmatrix}.$$

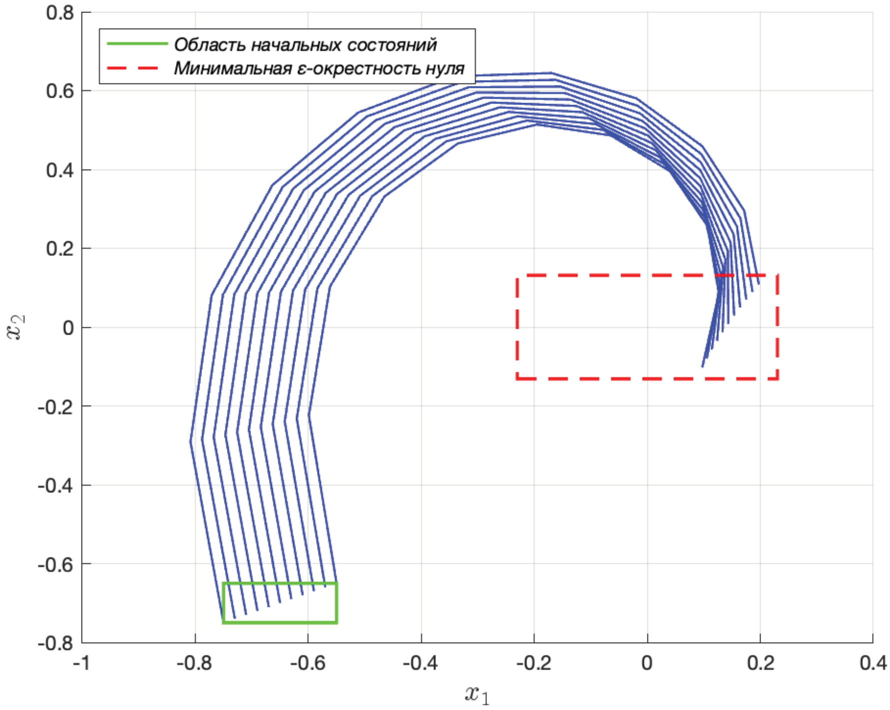

Рисунок 2 – Фазовый портрет траекторий $t_1 = 3, N = 10$

Из рис. 2 видно, что все траектории ансамбля также попали в найденую ε^0-окрестность нуля за конечное время.

ЛИТЕРАТУРА

1. Игнатенко В.В. Управляемость динамических систем с помощью регулятора // Вестн. БГУ. – Сер. 1. – 1976. – № 2. – С. 56–58.

2. Ащепков Л.Т. Внешние оценки и ступенчатая управляемость интервальных линейных систем // Автоматика и телемеханика. – 2008. – № 4. – С. 51-58.